

急勾配拡幅部付近の跳水を伴う流況と そのシミュレーション

A NUMERICAL SIMULATION OF HYDRAULIC JUMP SHAPES ON WIDENING STEEP SLOPE CHANNELS

日下部重幸¹・道上正規²・藤田正治³・檜谷治⁴・宮本邦明⁵

Sigeyuki KUSAKABE, Masanori MICHIE, Masaharu FUJITA,
Osamu HINOKIDANI and Kuniaki MIYAMOTO

¹正会員 工博 神戸市立工業高専教授 都市工学科 (〒651-21 神戸市西区学園東町8-3)

²フェロー 工博 鳥取大学教授 工学部土木工学科 (〒680 鳥取市湖山町南4-101)

³正会員 工博 京都大学助教授 農学研究科森林科学専攻 (〒606-01 京都市左京区北白川)

⁴正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科 (〒680 鳥取市湖山町南4-101)

⁵正会員 工博 鳥取大学助教授 地域共同研究センター (" ")

The MacCormack scheme has some advantages in calculations of flow in steep slope channels with hydraulic jumps. However, in point of calculation stability and so forth, the MacCormack scheme has not become a method which is fully generalized.

We made experiments on hydraulic jump shapes on widening steep slope channels and simulated calculations on experimental results. The comparison between the experimental results and calculated ones indicates the validity of simulation method.

Key Words : the MacCormack scheme, hydraulic jump, widening channel

1. まえがき

急勾配拡幅部の流れは、山地河川や多自然型河川など複雑な形状を有する河川に多く見られるものである。これらの河川では、景観や親水性を考慮して数多くの平面・縦断形状が検討されることがある。しかし、洪水を安全に流下させるという河川的基本的な機能は、常に満たさなければならない。そのためには種々の複雑な形状の流れの解析が簡単にできることが必要で、容易に扱える数値解析の開発が望まれている。

拡幅部の流れが常流または射流のみの場合は、比較的容易に計算をすることができるが、流れが射流から常流に変化し跳水を伴う場合、跳水位置で計算方向を分ける従来の逐次計算では、相当面倒な手法を必要とする。特に平面二次元的に跳水形状が形成される場合は、解析が困難となる。近年、常流・射流が混在する二次元流れの解析にもマッコーマック法が適用され、良好な結果が報告されているが^{1)~3)}、計算の安定性などの点で、まだ十分汎用性のある計算法にはなっていない。本研究は、急勾配拡幅部付近の跳水を伴う流況

の実験とマッコーマック法を用いた平面二次元計算法による再現計算を試みたものである。

2. 基礎式と数値計算法

(1) 流れの基礎方程式

二次元非定常・漸変流の連続式および運動方程式は、図-1のような座標系および記号を用いて、つぎのように表すことができる。

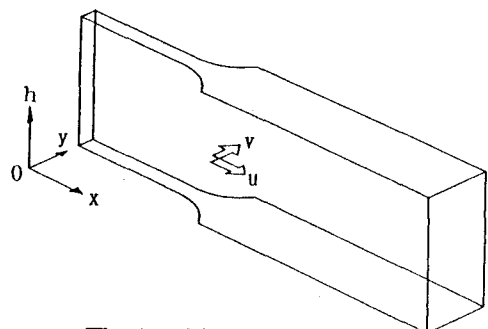


図-1 座標系

連続式：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

運動方程式：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} \\ &= gh(I_x - I_{fx}) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varepsilon \frac{\partial(uh)}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \varepsilon \frac{\partial(uh)}{\partial y} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(v^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) \\ &= gh(I_y - I_{fy}) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varepsilon \frac{\partial(vh)}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \varepsilon \frac{\partial(vh)}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 h は水深、 u は x 方向の平均流速、 v は y 方向の平均流速、 I_x は x 方向の水路勾配、 I_y は y 方向の水路勾配、 I_{fx} は x 方向の摩擦勾配、 I_{fy} は y 方向の摩擦勾配、 ε は水平方向の渦動粘性係数である。

(2) 計算方法と境界条件

前節で示した基礎方程式を、保存形でベクトルの式に書き改めるとつぎのようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = C \quad (3)$$

上式に対してマッコーマック法のスキームは、予測子段階と修正子段階に分けて差分化する。 $U_{i,j}^n$ を格子点 ($x=i\Delta x$, $y=j\Delta y$, $t=n\Delta t$) 上の値とすると、予測子段階と修正子段階でそれぞれ次式のように離散化される。ここでは、予測子段階で後退差分、修正子段階で前進差分を用いている。また、数値振動の発生を抑制するため人工粘性項 D を陽的に付加したものをつぎに示す。

予測子段階：

$$\begin{aligned} \overline{U}_{i,j} &= U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ E_{i,j}^n - E_{i-1,j}^n - (D_{xi,j}^n - D_{xi-1,j}^n) \right\} \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ F_{i,j}^n - F_{i,j-1}^n - (D_{yi,j}^n - D_{yi,j-1}^n) \right\} + \Delta t C_{i,j} \end{aligned} \quad (4)$$

修正子段階：

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2} (U_{i,j}^n + \overline{U}_{i,j}) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \overline{E}_{i+1,j} - \overline{E}_{i,j} + (\overline{D}_{xi+1,j} - \overline{D}_{xi,j}) \right\} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \overline{F}_{i,j+1} - \overline{F}_{i,j} + (\overline{D}_{yi,j+1} - \overline{D}_{yi,j}) \right\} + \frac{1}{2} \Delta t \overline{C}_{i,j} \end{aligned} \quad (5)$$

人工粘性項として、岡部らの定義したもの⁴⁾を二次元に拡張してつぎのように表した。

$$D_{xi,j}^n = K \frac{u_{*,j} h_{i,j}}{\Delta x} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) \quad (6)$$

$$D_{yi,j}^n = K \frac{u_{*,j} h_{i,j}}{\Delta y} (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) \quad (7)$$

ここに、 Δt , Δx , Δy は時間、 x 方向、 y 方向の差分間隔、下付き添字 ij は格子番号、 n は時間、 $\overline{\quad}$ は予測子段階の値を意味する。 K は人工粘性係数、 u_* は摩擦速度を表す。

境界条件は、上下流端および側壁についてつぎのように与えた。上流端および下流端で流量および水深を与えるが、予測子で後退差分を修正子で前進差分を用いており、人工粘性項にはさらに上流と下流の水理量が必要となる。この上下流端境界外の条件としては、非保存変数の直線外挿を行い計算を進める。側壁での境界条件には、側壁の摩擦抵抗を無視した形のいわゆるスリップ条件を用いた。

人工粘性については、縦断 (x) 方向の人工粘性項 D_x は $x+\Delta x$, $x-\Delta x$ が境界であるとき 0 でない最小値とし、横断 (y) 方向の人工粘性項 D_y は $y+\Delta y$, $y-\Delta y$ が境界であるとき 0 でない最小値とした。安定条件は、通常用いられる CFL 条件によるが、安定した計算を行うため本研究では CFL 条件のさらに 1/10 程度の Δt とし、計算の時間間隔を 0.002s とした。また、計算中振幅部で水深が非常に小さくなり計算が不安定化することがある。そのため水深がある値 (本研究では 2.5mm) より小さくなった場合その点の水深を 0 とおき、後に周りの水深がある値 (本研究では 3mm) 以上になった場合その点の水深を回復させた。計算の手順は、十分せき上げた下流端の水位を所定の水位まで徐々に低下させて、定常解を求める方法をとった。本研究では対象とした流れについて、十分な定常解が得られる時間を予備計算で求め、通水時間 20s (繰り返し回数 10000 回) とした。

3. 急勾配振幅部付近の跳水を伴う流況の実験

（１） 実験の概要

実験装置は長さ 12m、幅 0.4m、深さ 0.4m の勾配可変開水路である。水路上流端から 3m の区間を整流部、1.8m を漸縮部、1.8m を水路幅 0.1m の縮小部とし、水路幅 0.1m から 0.4m への拡幅には、図-2 のような半径 0.3m の円の 1/6 を左右兩岸に挿入した拡幅部を設置している。

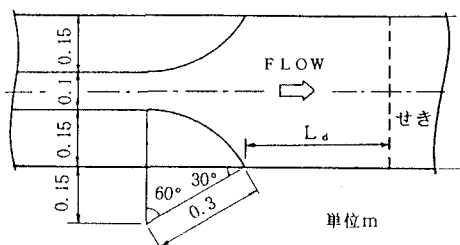


図-2 拡幅部の平面形状

水深と流速の測定にはサーボ式水位計と直径 5mm の超小型プロペラ流速計を用いた。流向は、針に糸を付けて流れに挿入して方向を読み取った。流速計の使えない水深の浅い箇所では、直径数 mm の浮子をビデオ撮影して流向と流速を計測した。

実験は、河床勾配 1/50、Case-A~C で流量 3.9 ℓ/s、上流端水深 3.7cm、Case-E,F で流量 6 ℓ/s、上流端水深 5.0cm とし、下流部のせき上げ位置と高さを表-1 に示すように変化させて行った。

表-1 せき上げ条件と形成される水面形

Case	せき位置	せき高	下流端平均水深	形成される水面形
A	なし	0cm	1.3cm	
B	40cm	4.3	6.0	1S
C	65	2.3	5.0	2S,2R,2L,3S
D	70	2.3	5.0	3S
E	40	3.3	6.2	2S
F	70	3.3	6.2	2R,2L

水深の測定メッシュは、縦断方向および横断方向に 2.5cm 間隔で設定し、拡幅部を含む約 2.6m 区間を測定対象とした。流向および流速の測定メッシュは、縦横とも 4cm 間隔に設定した。

（２） 実験結果

せきのない場合は、拡幅部全体に流れが拡がり拡幅部付近での剥離は見られなかった。せき上げの位置が拡幅部に近く高い場合、もぐり流出の状態(Case-B)あるいは左右対称な水面形状(Case-E)となる。せき上げの位置が拡幅部から離れていて低い場合(Case-D)、横断方向に直線状の一次元的な跳水が起こる。せき上げ位置と高さがその中間の場合(Case-C, Case-F)、数種類の平面的な跳水の形状が見られた。これらの流況を石川ら⁵⁾に習って分けると表-2 に示すように 6 つの形状になる。それぞれの形状を表-2 の記号で表し、各実験条件で形成される水面形を表-1 の右端に示す。

Case-B では、拡幅部で安定したもぐり流出の状態となり明確な跳水は見られず、左右対称な水面形(1s)が形成される。Case-E では安定した左右対称な水面形(3S)となるが、Case-F では主流が右または左に向いた左右非対称な水面形(2R or 2L)が形成される。Case-C では、同じ水理条件に対して途中で与える僅かな条件の違いにより 4 つの水面形(2S,2R,2L,3S)が形成される。この条件では特に意識せずに通水すると主流が右または左に向いた水面形(2R or 2L)となる。この場合、板などを用いて主流方向を右または左に変えることができ、慎重に調整すると主流が中心にあり左右対称な水面形(2S)を形成させることができる。また、一次元的な跳水形状(3S)を形成させるには、最初 Case-D のようにせきを下流へ移して設置し、一旦一次元的な跳水を起こさせた後徐々にせきを上流側へ移動させるか、最初十分低いせきを設置しておいて所定の高さまで徐々に上げて行くことが必要であった。Case-C における左右非対称な水面形状 2R,2L は安定していたが、一次元的な跳水を伴う水面形状 3S は若干不安定であり、左右対称な水面形状 2S は非常に不安定で実験でも長時間この水面形を保つことは困難である。

表-2 実験による拡幅部付近の跳水を伴う流況

もぐり流況		二次元的な跳水を伴う流況			一次元的な跳水
左右対称 (1S)	交互偏向 (1T)	左右対称 (2S)	主流右方向 (2R)	主流左方向 (2L)	直線状の跳水 (3S)

4. 数値計算

(1) 計算条件

計算条件は格子間隔を Δx 、 Δy とともに 2.5cm、時間間隔 Δt を 0.002s とした。粗度係数 n および 渦動粘性係数 ε は 0.01 および $10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ とした。人工粘性係数 K は、跳水を伴う一次元流れに対する最適な K の値 ⑥ を参考に 3.5 とした。ただし、摩擦速度が 0 に近い場合人工粘性項も 0 に近くなり計算が不安定となるので、人工粘性項の最小値（本研究の計算では 0.006）をとることとした。

(2) 計算結果

せきのない場合(Case-A)の実験結果と計算結果を示すと図-3、4 のようになる。実験では拡幅終了部の左右両岸から斜め下流方向へ衝撃波が伝わり菱形の波形が見られる。計算結果ではこの菱形の波形や流速ベクトルを含め水面形全体がよく再現できていると思われる。

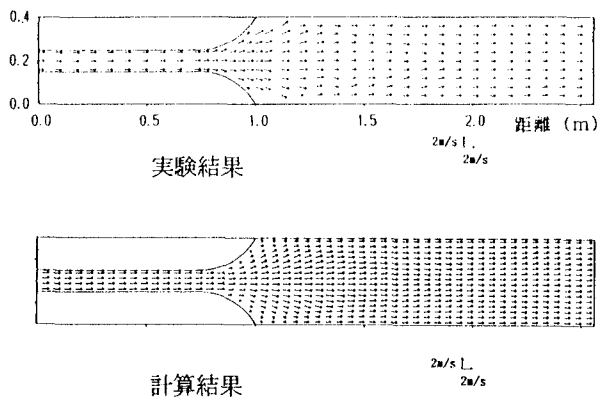


図-3 せきのない流れ(Case-A)の流速ベクトル図

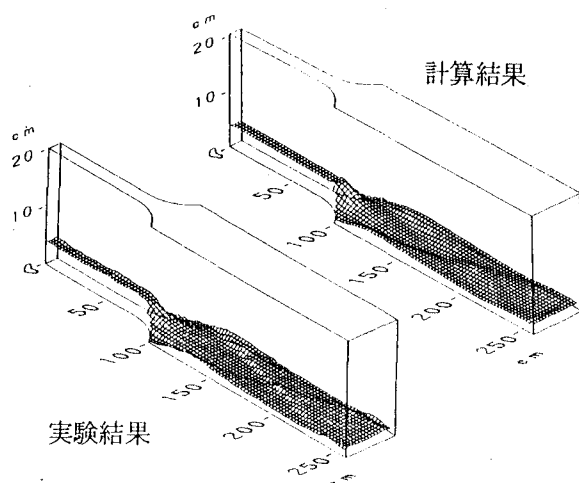


図-4 せきのない流れ(case-A)の水面形

拡幅部の近くでせき上げた場合 (Case-E) の実験結果と計算結果を示すと図-5 のようになり、比較的良好な水面形状が再現できている。

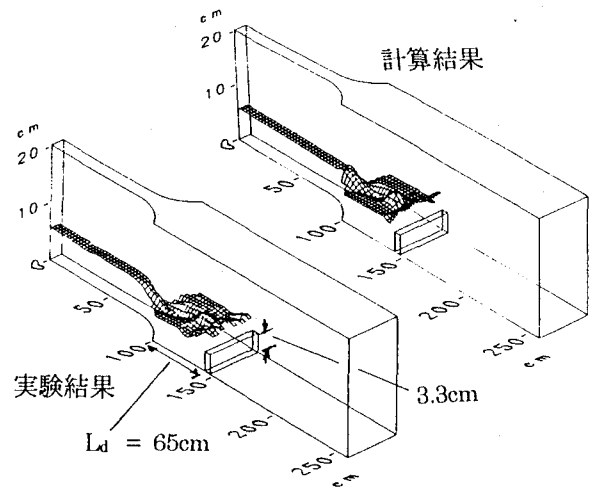


図-5 拡幅部近くでせき上げた場合 (Case-E) の水面形

実験で1つの水理条件に対して4つの水面形が得られた Case-C についての計算結果を示す。まず、左右対称な跳水形状を計算で再現するために、横断方向について計算を交互に行った。これは断面の拡幅部が計算メッシュでは階段状になっており、交互に計算することで左右の対称性を保たせるためである。実験結果と計算結果の水面形を比較すると図-6 のようである。計算の下流端では横断方向の流速を無視し ($v=0$) 水深には実験値の平均値を用いており境界条件として十分でないが、跳水位置が若干ずれている程度で全体的にはよく再現できていると思われる。

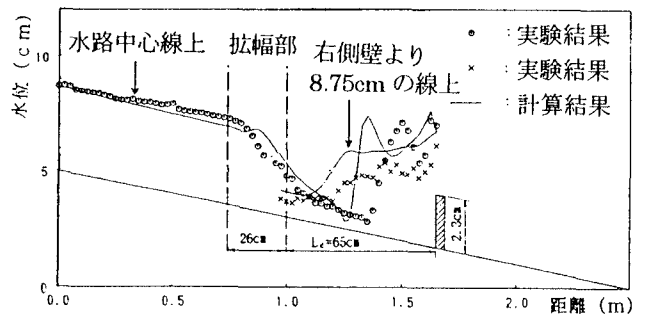


図-6 左右対称な水面形(2S)の実験結果と計算結果

つぎに、水面形が左右非対称になる場合の計算法については、実験と同様に計算初期に左右岸に向かう強制的な流れを与えるという条件を付加して実施した。例えば、主流が右に向く水面形を再現する際は、図-7 に示すように拡幅部の横断方向流速に 0.5cm/s の僅かな流れを各計算 step 毎に付加する。なお、この条件は計算初期の 0.2 秒間 (100 回) のみ与えた。図-8 および図-9 は主流が右または左に向く場合の定常状態 (20 秒後) の計算結果を示したものであるが、上述した条件を初期に付加するだけで、実験と同様な水面形を再現することが可能であることが分かった。

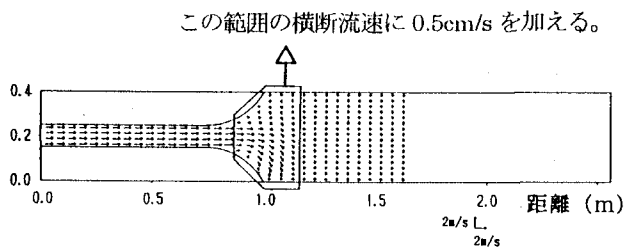


図-7 主流を右に向けた場合の 20 秒後の流速ベクトル図

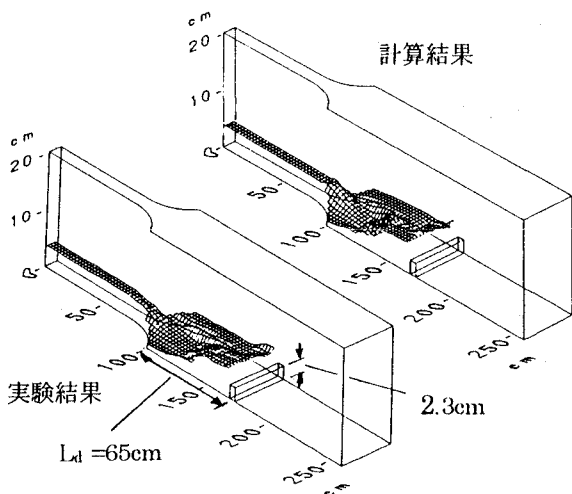


図-8 主流右向きの水面形(2R)

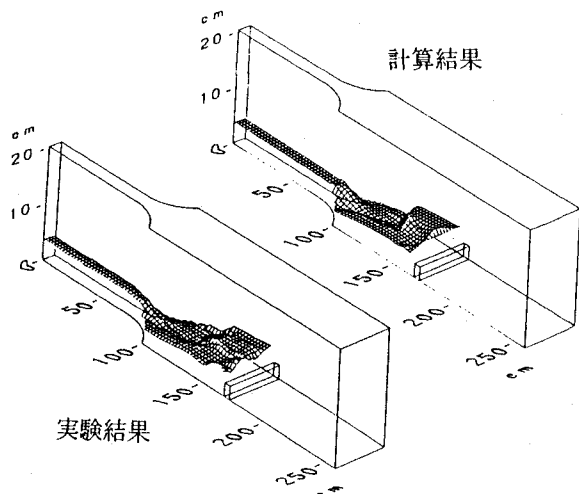


図-9 主流左向きの水面形(2L)

最後に、一次元的な跳水を伴う水面形を計算で再現するために、実験と同様の手順を条件として計算でも用いた。すなわち、最初にせき高を低くして一次元的な跳水を発生させた後徐々に々にせき高を上げて所定の高さにすると、安定した一次元的な跳水を伴う水面形が得られる。実験結果と計算結果の水面形を図-10に示す。この計算結果も実験結果をほぼ再現できていると思われる。

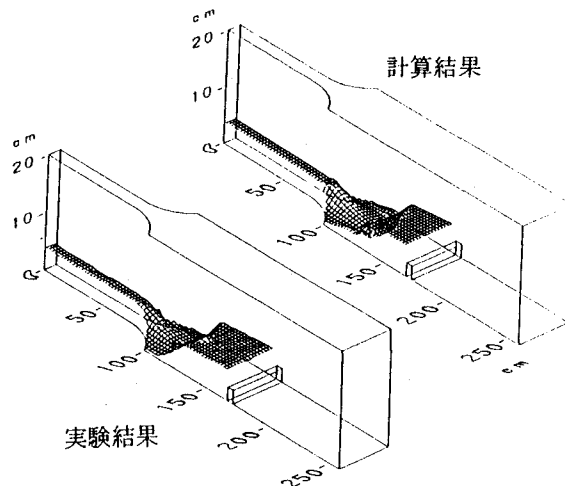


図-10 一次元的な跳水を伴う流れの水面形(3S)

(3) 水面形の安定性

実験により得られる水面形には、安定したものとは不安定なものがある。Case-C の例で示すと、左右対称な水面形 (2S) は非常に不安定であり、一次元的な跳水を伴う水面形(3S)は若干不安定であったが、左右非対称な水面形(2R,2L)は安定していた。これらを計算による定常解と比較してみた。

計算は、すべて 10000 回(20s)行ったが、図-11に示すように最初の 2000 回(4s)は下流端水深の低下中で繰り返しによる計算誤差が大きく、4000 回(8s)程度で繰り返し誤差がなくなり定常解に収束している。前節で述べたように、計算開始時点で 100 回(0.2s)の間拡幅部の流れを右または左へ向けると主流が右または左向きの水面形が得られた。そこで、計算途中の 2000 回および 4000 回の時点で流れに同様の变化を加えてみた。横断方向の流速を変化させた範囲と大きさは図-7に示したのと同じである。

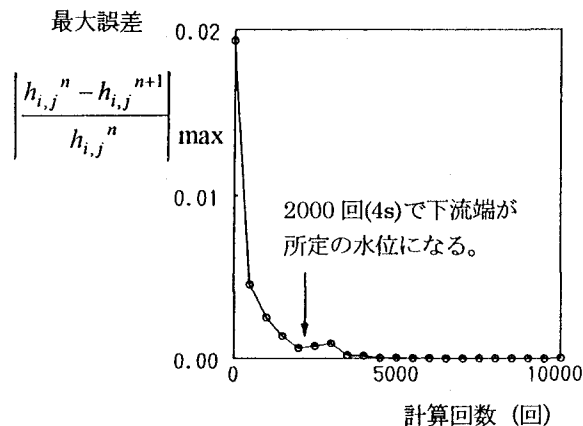


図-11 計算の繰り返しによる誤差の変化
(主流右向き水面形の例)

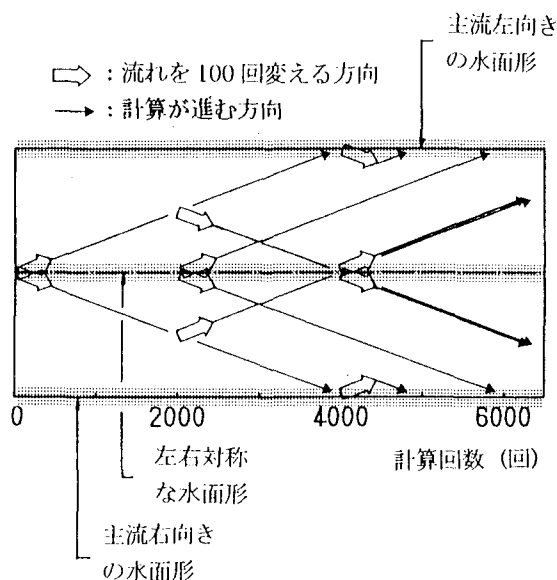


図-12 計算途中で与える条件による水面形の変化

計算される水面形の結果をモデル化して図-12に示す。図より、左右対称な水面形は、どの時点で水面形に変化を加えてもすぐ他の水面形に移行し、不安定な解であることが分かる。一方、主流が右または左に向いた水面形は、途中(2000回)で逆方向の変化を加えると、左右対称な水面形を通過して、反対側の水面形へと移行する。しかし、4000回の計算を終え安定な水面形が形成されると左または右方向に流速の変化を加えても、主流は左または右方向に向かわず元に戻り反対向きの流れには移行せず、主流が右または左に向いた元の水面形が維持される。また、計算の初期条件が異なるので図には示していないが一次元的な跳水を伴う水面形の場合も、4000回の計算を終えると、右または左方向に流速の変化を加えても他の水面形には移行しなかった。計算による水面形の定常解も安定なものとは不安定なものがあり、これらは実験で得られた傾向と一致している。

5. あとがき

急勾配拡幅部付近の跳水を伴う流況の実験と平面二次元マッコーマック法を用いた再現計算を行った。主な結果はつぎの通りである。

(1) 急勾配拡幅部付近の水面形は、二次元マッコーマック法により比較的よく再現することができる。この計算に用いる人工粘性係数の値は、跳水を伴う流れの一次元解析で得られた最適な人工粘性係数の値を参考にして求めることができる。

(2) 水理条件が同じでも跳水を伴う水面形の異なる流れについて、初期条件や計算途中で挿入する条件を変えることでほぼ水面形を再現することができる。この場合の初期条件や途中の挿入条件は、実験で与える条件と同様な手順で与えることができる。

(3) 実験では、拡幅部付近で水面形が安定する場合と不安定な場合がある。また、計算による水面形でも安定なもの、僅かな変化を与えると変化する不安定な水面形が得られ、実験結果の特性を再現できた。しかし、なぜ安定な水面形と不安定な水面形ができるのかなど、現象としての水面形の安定性については今後の検討課題である。

参考文献

- 1) 河村三郎、中谷剛：TVD-MacCormack 法による常・射流混在流の数値計算法、水工学論文集、第37巻、pp.763-768,1993.
- 2) 岡部健士、山下秀基、天野裕仁：常・射流の混在する2次元浅水流の数値計算法、水工学論文集、第39巻、pp.403-410,1995.
- 3) 永瀬恭一、道上正規、檜谷治：狭窄部を持つ急流河川の平面2次元流計算、土木学会第50回年次学術講演会講演概要集、pp.590-591,1995.
- 4) 岡部健士、天羽誠二、石垣昌邦：常流・射流の遷移を伴う不等流の数値計算法について、水工学論文集第36巻、pp.337-342,1992.
- 5) 石川元康、安田陽一、大津岩夫：急拡水路の潜り跳水の特性、土木学会第50回年次学術講演会講演概要集、pp.632-633,1995.
- 6) 日下部重幸、道上正規、藤田正治、檜谷治、宮本邦明：マッコーマック法を用いた砂防ダム上流の堆砂計算法に関する研究、水工学論文集、第40巻、pp.977-982,1996.

(1997. 9. 30 受付)