

低レイノルズ数乱流モデルを用いた 開水路段落ち流れの計算

CALCULATION OF FLOW OVER BACKWARD-FACING STEP IN
OPEN CHANNEL USING LOW-REYNOLDS NUMBER TURBULENCE MODEL

福知正高¹・中山昭彦²

Masataka FUKUCHI and Akihiko NAKAYAMA

¹ 学生会員 神戸大学 自然科学研究科 (〒657 神戸市灘区六甲台町 1-1)

² 正会員 PhD 神戸大学 自然科学研究科 (〒657 神戸市灘区六甲台町 1-1)

Low-Reynolds number turbulence models have been incorporated in the computational method for two-dimensional but complex turbulent flows with a free surface and flow separation so that the boundary complexity and the mean position of the free surface are directly represented. The models used are one of the low-Reynolds number $k-\varepsilon$ methods that has been proved accurate in simple geometry and the $k-\omega$ model that is known to be versatile. Calculations have been performed for flow over a backward-facing step in open channel and the results are compared with experiments and calculations with conventional high-Reynolds number model. Overall results using the low-Reynolds number models do not drastically improve over the high-Reynolds number version using wall-function assumptions, but they do show marked improvements in the recirculating region near the wall.

Key Words: Low Reynolds number turbulence model, $k-\omega$ model, free surface, finite difference, backward-facing step

1. はじめに

工学で適応できる実用的乱流計算法はレイノルズ平均式と渦粘性モデルを用いる2方程式法が殆どで、色々な場合で十分な精度の計算がなされている。ただし、これらのモデルは壁近傍の低レイノルズ数領域には適応できないため、境界条件には平衡状態でのみ立証されている相似則である壁関数を用いる。従って境界が複雑になったり、剥離や自由水面を伴い流れ自体が複雑になる場合、境界条件の適応に問題があり、精度ある計算が期待できない。そこで壁まで計算ができる、低レイノルズ数乱流モデルが必要になり、近年多数のモデルが提唱されている。本研究ではこれまで最もよく用いられてきている $k-\varepsilon$ モデルの低レイノルズ版で、平行平板内流れのDNS計算結果を良く再現できるとされる $k-\tilde{\varepsilon}$ モデル¹⁾及び、複雑境界など柔軟性の上で注目されている $k-\omega$ モデル²⁾を、剥離を伴う自由水面に適応しその妥当性、精度などについて検討する。

開水路段落ち流れは瀬津、中川³⁾により高レイノルズ $k-\varepsilon$ モデルの修正版を用いて計算され、フルード数の低い場合の計算はある程度の精度を持って計算されている。ただ、このモデルの逆流域、再付着点近傍での適応性は疑問である。その後、低レイノルズ数乱流モデルが研究され⁴⁾、最近は逆流を伴う開水路流れにも応用されている⁵⁻⁶⁾が、段落ち流れなど、剥離、逆流域の大きい流れに本格的に使用されていない。

一方、開水路流れでの自由水面の取り扱いについては、計算の簡単化のため、普通対称面と近似されていたが、最近富永ら⁷⁾や武本ら⁸⁾により水面の大きく変化する場合に、直接解くことがなされている。ただし、低レイノルズ数乱流モデルを自由水面を直接解く方法に取り入れたもの、とくに $k-\omega$ モデルはその有用性が指摘されているにもかかわらず⁹⁾、その可能性を調べたものがないので、本研究でその詳しい検討をするものである。

2. 基礎支配方程式

(1) 運動方程式

本研究で対象とする非圧縮二次元非定常流の基礎式は、

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) - g \cos \theta \delta_{i2} \quad (2)$$

である。

ここで、 x_1 は流下方向、 x_2 は水路床に直角な鉛直上方の座標軸であり、 U_1 、 U_2 はそれに対応する平均流速成分、 u_1 、 u_2 は乱れ変動成分である。 p は平均圧力、 ν は動粘性係数、 g は重力の加速度、 θ は河床勾配である。

(2) 乱流モデル

(2)式に現れるレイノルズ応力には次式の等方性渦粘性モデルを用いる。

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

ここで、 k は乱流エネルギー、 ν_t は渦動粘性係数である。

本研究では ν_t のモデルとして2方程式モデルのWilcoxによる低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデル²⁾と川島・河村により提案された $k-\tilde{\varepsilon}$ モデル¹⁾の検討を行う。また標準型 $k-\omega$ モデル²⁾との比較も試みる。それぞれのモデルの基礎式を以下に示す。

(a) 低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデル²⁾

標準型 $k-\omega$ モデルでも原理的には低レイノルズ数領域で適用できるが、精度の良い結果は得られないため、低レイノルズ数領域を精度良く再現するために改良されたモデルが低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデルである。低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデルは式(4)のように ν_t を乱流エネルギー k と単位乱流エネルギーあたりの散逸率 ω で表わし、 k と ω については(5)式、(6)式で表わされる輸送方程式を解いて求める。

$$\nu_t = \alpha^* \frac{k}{\omega} \quad (4)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - \beta^* k \omega \quad (5)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + \alpha \frac{\omega}{k} \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - \beta \omega^2 \quad (6)$$

ここで、モデル定数の値は、

$$\alpha^* = \frac{\alpha_0^* + R_{\varepsilon T}/R_k}{1 + R_{\varepsilon T}/R_k}, \quad \alpha = \frac{5}{9} \cdot \frac{\alpha_0 + R_{\varepsilon T}/R_\omega}{1 + R_{\varepsilon T}/R_\omega} \cdot (\alpha^*)^{-1}$$

$$\beta^* = \frac{9}{100} \cdot \frac{5/18 + (R_{\varepsilon T}/R_\beta)^4}{1 + (R_{\varepsilon T}/R_\beta)^4}, \quad \beta = 3/40$$

$$\sigma_k = \sigma_\omega = 1/2, \quad \alpha_0^* = 3/\beta, \quad \alpha_0 = 1/10, \quad R_\beta = 8$$

$$R_k = 6, \quad R_\omega = 27/10, \quad R_{\varepsilon T} = \frac{k}{\omega \nu}$$

(b) 川島・河村による $k-\tilde{\varepsilon}$ モデル¹⁾

このモデルの特徴は ε の代わりに壁面上で0となる $\tilde{\varepsilon}$ を用いるため壁面境界条件が与え易いという点である。このモデルでは ν_t を(7)式で表わし、 k と $\tilde{\varepsilon}$ については(8)式、(9)式で表わされる輸送方程式を解いて求める。

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (7)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - (\tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}) - \frac{1}{2} \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) \quad (8)$$

$$\frac{D\tilde{\varepsilon}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - \left(C_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + \frac{\tilde{\varepsilon} \hat{\varepsilon}}{k} \right) + C_{\varepsilon 3} \nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \right)^2 \quad (9)$$

ここで、 ε は乱流エネルギーの散逸率、 $\tilde{\varepsilon}$ は $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \hat{\varepsilon}$ であり $\hat{\varepsilon}$ は以下の通りである。

$$\hat{\varepsilon} = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2 : \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \geq 0, \quad \hat{\varepsilon} = 0 : \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \leq 0$$

モデル定数の値は、

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_{\varepsilon 3} = 0.6$$

モデル関数は、

$$f_\mu = 1.0 - \exp[-y_\eta/285 - (y_\eta/20)^3]$$

$$\sigma_k = 1.0 - 0.5 \exp[-(y_\eta/20)^2], \quad \sigma_\varepsilon = \sigma_k$$

$$y_\eta = y/\eta (\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4})$$

(3) 自由水面の取り扱い

自由水面の位置は未知とし、その動きは高さ関数法を用いて直接取り扱った。高さ関数法は、自由水面の位置を流下方向の座標 x_1 と時間 t の一価関数 h とし、 h を計算することにより時間とともに変化する水面形をとらえるというものである。式(10)を計算し、水面形を決定し、そこで自由水面における境界条件を与えた。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} = U_2 \quad (10)$$

(4) 境界条件

(a) 自由水面における境界条件

自由水面における境界条件は、(11)式のように自由水面上での圧力を大気圧と等しくし、さらに(12)式のように自由水面上でのせん断応力が0となるようにした。

$$p(x_1, h(x_1, t)) = p_0 \quad p_0 : \text{大気圧} \quad (11)$$

$$(v + v_t) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=h(x_1, t)} = 0 \quad (12)$$

また、 k 、 ω 、 $\tilde{\varepsilon}$ に関しては、それぞれのモデルとも鉛直方向の勾配を0とした。

・標準型 $k-\omega$ モデル

$$\frac{\partial k}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0 \quad (13)$$

・低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデル

$$\frac{\partial k}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0 \quad (14)$$

・ $k-\tilde{\varepsilon}$ モデル

$$\frac{\partial k}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_2} = 0 \quad (15)$$

(b) 壁面における境界条件

壁面における境界条件は、粘着条件

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0 \quad (16)$$

を課した。

また、 k 、 ω 、 $\tilde{\varepsilon}$ に関しては、標準型 $k-\omega$ モデルでは式(17)のような壁関数を領域内、壁から最も近い第一格子点で与えた。低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデルでは式(18)のように壁面で $k=0$ 、 ω は粗度高さ $k_R=2$ として $\omega = 2500\nu/k_R^2$ とした。 $k-\tilde{\varepsilon}$ モデルでは式(19)のように壁面で k 、 $\tilde{\varepsilon}$ とともに0とした。

・標準型 $k-\omega$ モデル

$$U = \frac{u_\tau}{0.41} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + 5.2 u_\tau, \quad k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{0.09}}$$

$$\omega = \frac{u_\tau}{\sqrt{0.09 \cdot 0.41} y} \quad (17)$$

ここで、 u_τ は壁面摩擦速度である。

・低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデル

$$k = 0, \quad \omega = \frac{2500\nu}{k_R^2} \quad (k_R = 2) \quad (18)$$

・ $k-\tilde{\varepsilon}$ モデル

$$k = 0, \quad \tilde{\varepsilon} = 0 \quad (19)$$

3. 数値計算法

数値計算は、基礎式を離散化し、直交食い違い格子で圧力場と速度場に分解し、HSMAC法に基づく時間発展解法で解いた。自由水面については、新しい速度場が求まった後に先程の高さ関数法による式(10)を時間積分し、新しい自由水面の位置を決定した。時間に関する進行は一次精度のオイラー法、移流項には風上差分、粘性項には二次精度の中心差分を用いた。

4. 計算ケース

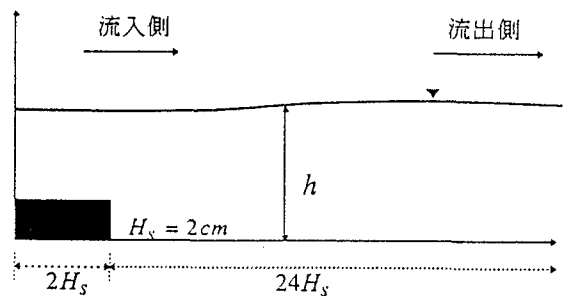


図-1 計算ケース

計算ケースとしては桶津, 中川¹⁰⁾の実験結果と比較するために桶津らの実験と同じケースを考えた。図-1のようなステップ高さ H_s が2cmのバックステップがあるケースを考えた。計算領域は流入部からステップまで $2H_s$ 、ステップから流出部まで $24H_s$ で、計算格子は標準型 $k-\omega$ モデルでは、グリッド数 74×44 の不等間隔格子で、低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデル、 $k-\tilde{\varepsilon}$ モデルは、グリッド数 74×96 の不等間隔格子で壁面近傍で密に取っている。レイノルズ数は H_s を基準として $R_\tau = 3544$ 、下流フルード数は $F_{r2} = 0.20$ とし、初期条件は下流水深 $h/H_s = 3.7$ 、水面下を静水圧、2ステップ上流で流入条件として対数則分布を与えた。

○：瀬津, 中川¹⁰⁾ による実験値 —：計算値

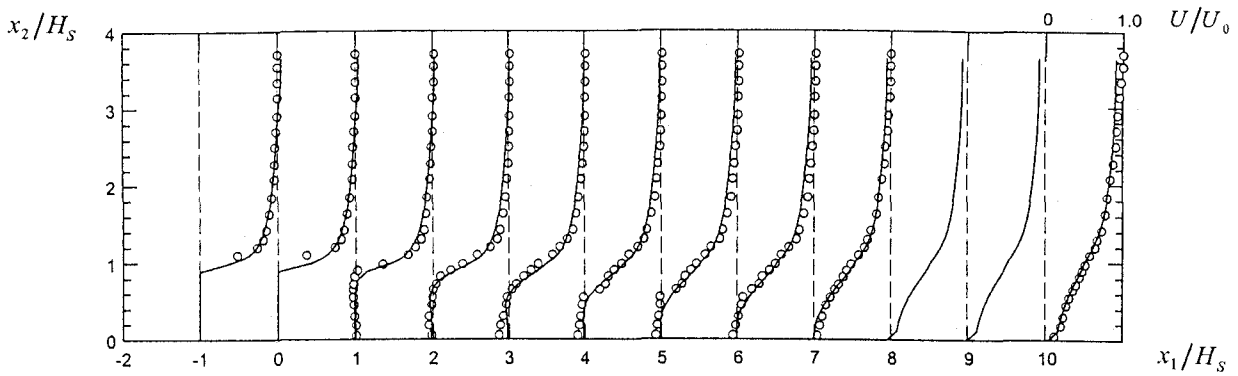


図-2 標準型 $k-\omega$ モデルによる平均流速 U の分布

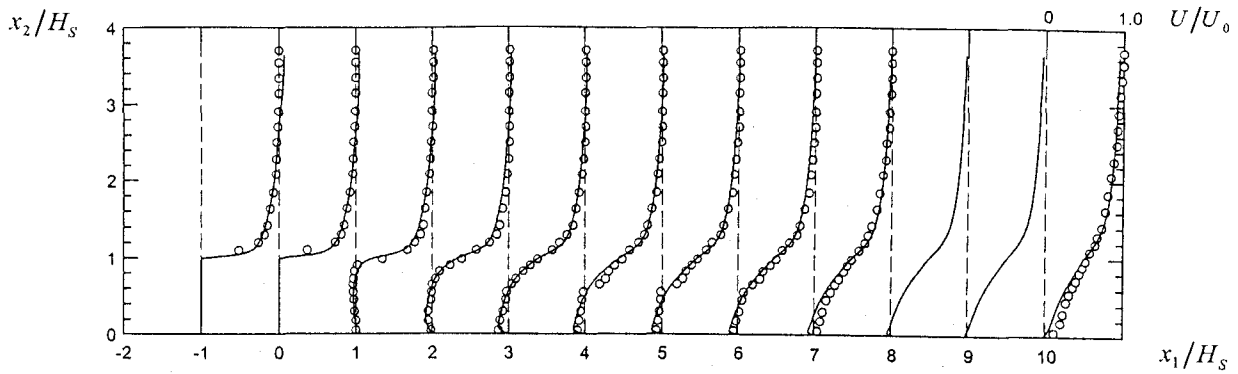


図-3 低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデルによる平均流速 U の分布

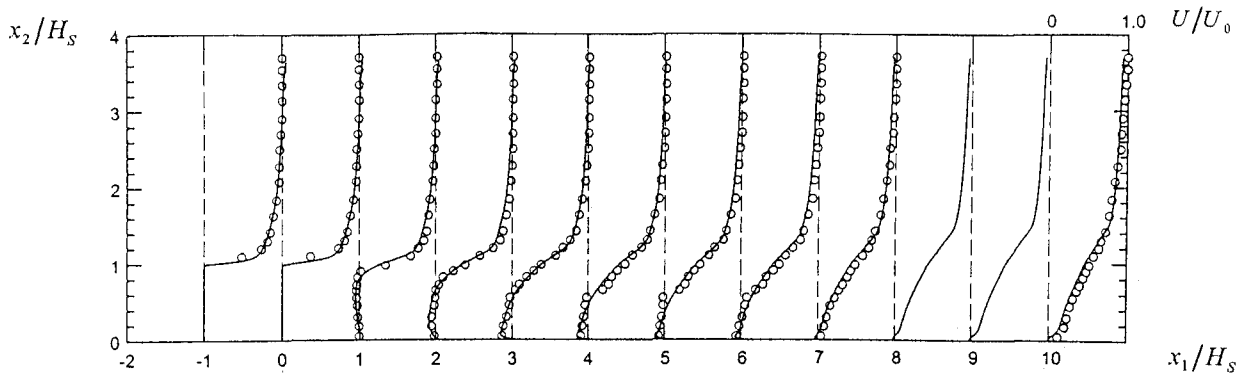


図-4 $k-\epsilon$ モデルによる平均流速 U の分布

5. 計算結果と考察

標準型 $k-\omega$ モデル、低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデル、 $k-\epsilon$ モデルにより計算した平均流速分布を瀬津, 中川¹⁰⁾ の実験結果と比較したものを図-2、図-3、図-4 に示す。それぞれのモデルとも全体的に実験値に近い結果が得られている。逆流域長さは標準型 $k-\omega$ モデルの場合が最も短く、実験値にも近くなっているが、再付着点の予測は必ずしも平均流速分布の予測精度を代表しているとは言えない。逆流域内及びその上方の剥

離せん断層内では標準型 $k-\omega$ モデルはかなり過少予測している。それに対し、低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデル、 $k-\epsilon$ モデルともに逆流域内及び剥離せん断層内で高精度に実験値を予測している。

標準型 $k-\omega$ モデル、低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデル、 $k-\epsilon$ モデルにより計算した乱流エネルギー k を瀬津, 中川¹⁰⁾ の実験結果と比較したものを図-5、図-6、図-7 に示す。全てのモデルとも再付着点前後でピーク値は実験結果を大きく上回っている。しかし、最大ピーク値が表われると思われる $x_1/H_s = 8, 9$ では実験値が欠如しており比較はできない。また、図の最下流

○：瀬津, 中川¹⁰⁾ による実験値 —：計算値

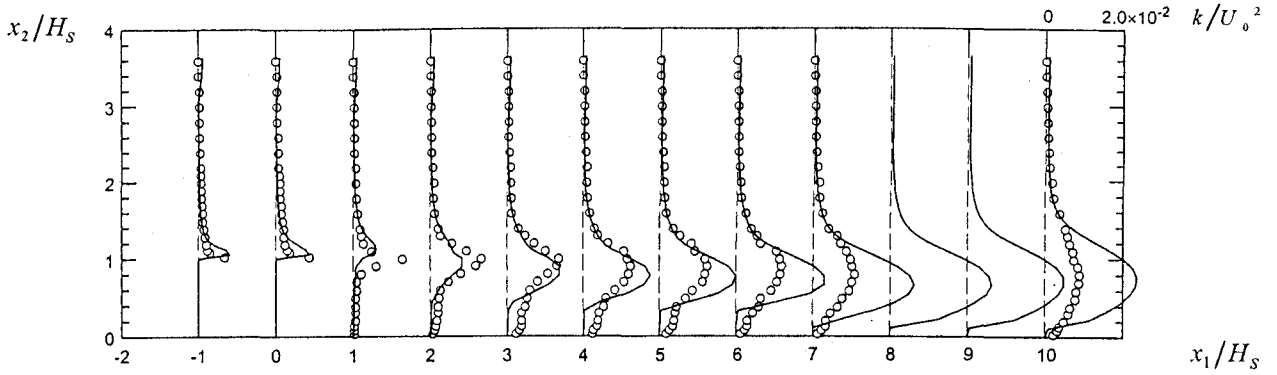


図-5 標準型 $k-\omega$ モデルによる乱流エネルギー k の分布

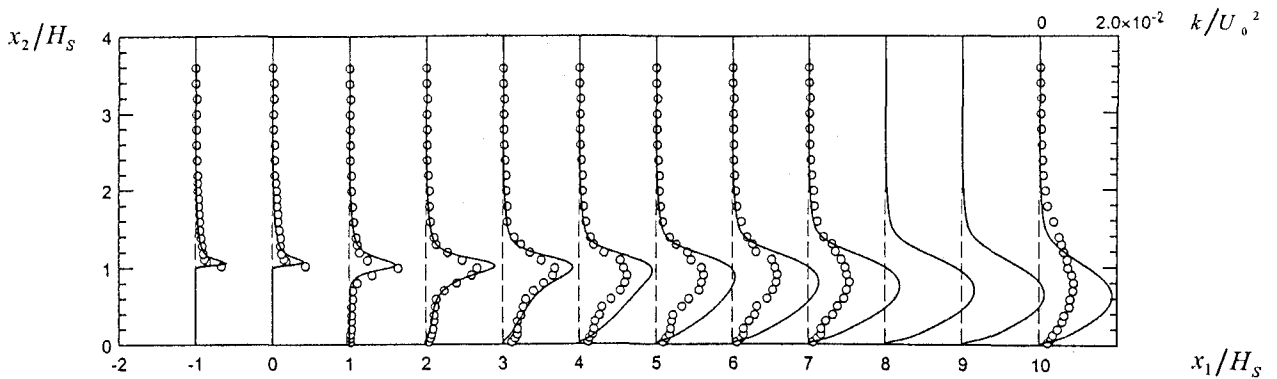


図-6 低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデルによる乱流エネルギー k の分布

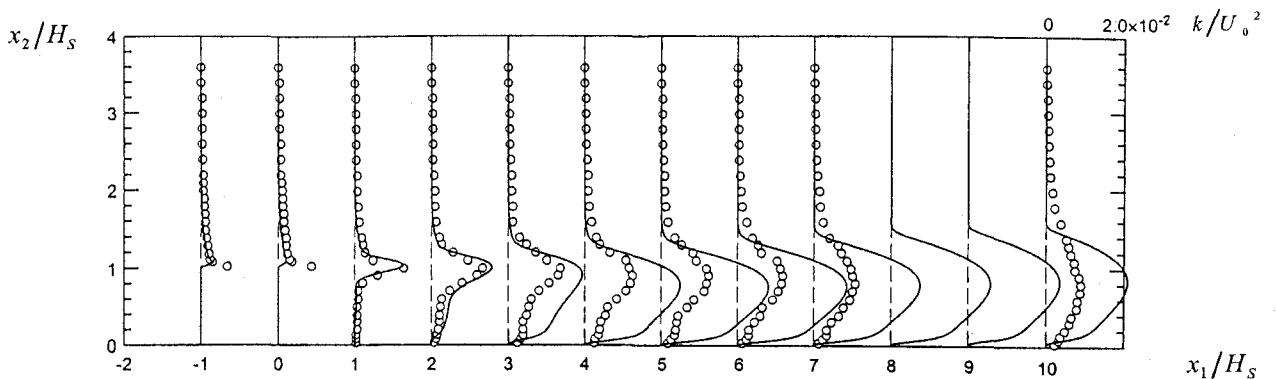


図-7 $k-\epsilon$ モデルによる乱流エネルギー k の分布

地点 $x_1/H_s = 10$ でも急速に減少している傾向が見られ、下流で漸近すべき平坦水路流の値に近い予測であるので一概に過大予測と言い切れない。剥離せん断層、逆流域内では低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデルが高精度で実験値を再現していると言える。 $k-\epsilon$ モデルは他のモデルよりも定量的に悪い結果であるが、これは散逸率 ϵ が小さく予測されているためと思われる。実験結果の分布から壁近傍で屈曲点が見て取れるが、 $k-\epsilon$ モデルでは壁近傍での圧力拡散項を取り入れているため絶対値は違うがそのような屈曲点が見て取れる。

低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデル、 $k-\epsilon$ モデルにより計算した流線を図-8, 図-9 に示す。循環領域は $k-\epsilon$ モデルの結果が実験に近い形になっている。

低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデル、 $k-\epsilon$ モデルにより計算したバックステップ下流の水深変化 $\Delta h \equiv (h - h_0)$ (ここで、 h_0 は $x = 0$ での水深) を図-10 に示す。両モデルとも実験結果より小さくなっている。乱れエネルギーを実験値より大きく予測しているためであるかもしれないが、実験結果と定性的には同じ傾向を示している。

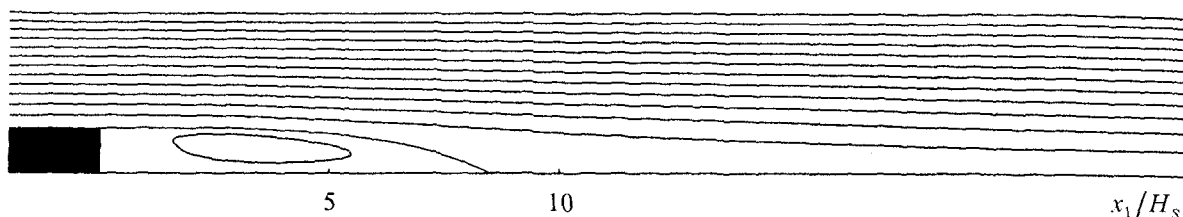


図-8 低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデルによる流線

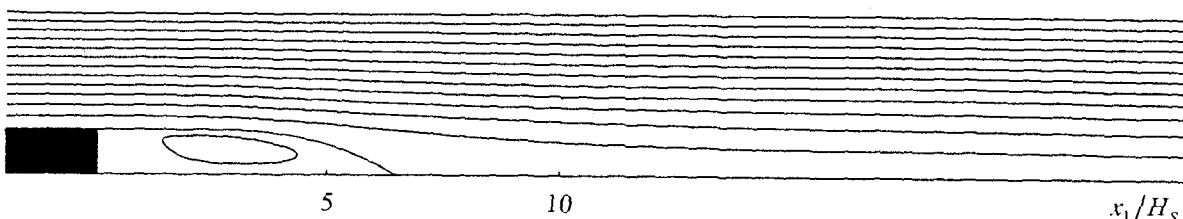


図-9 $k-\epsilon$ モデルによる流線

6. まとめ

本研究では、これまで比較的困難であるとされている剥離、再付着をとまなう開水路落ち流れの計算に、最近開発されている低レイノルズ数乱流モデルの内、川島、河村による $k-\epsilon$ モデル¹⁾ 及び Wilcox による低レイノルズ数型 $k-\omega$ モデル²⁾ を適用した。また通常の標準型 $k-\omega$ モデル²⁾ の計算も行ない、実験結果とも比較した。流速分布、乱流エネルギーの分布ともに、通常のモデルに比べて低レイノルズ数乱流モデルでは逆流域の壁近傍で実験値に近い結果が得られた。全体的に劇的な改良は見られないものの、逆流域の壁近傍での平均流速、乱流エネルギーとも良い精度で計算されることがわかった。

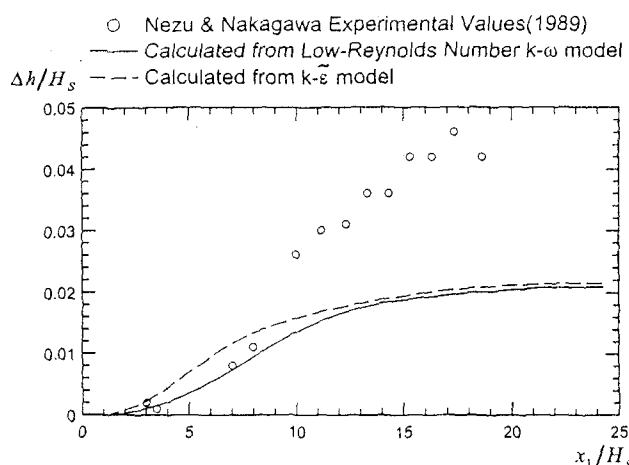


図-10 ステップ下流の水深変化

参考文献

- 1) 川島紀英, 河村 洋: $k-\epsilon$ モデルによる吹き出し・吸い込みを伴うチャンネル内流の数値計算, 第 27 回乱流シンポジウム講演論文集, pp.239-242, 1995.
- 2) Wilcox, D. C.: Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries, Inc. La Canada, California, 1993.
- 3) 瀬津家久, 中川博次: 修正 $k-\epsilon$ 乱流モデルによる開水路乱流の数値計算, 土木学会論文集, 第 3 号, II-8, pp.125-134, 1987.
- 4) 河原能久, 常山修治: 応力方程式モデルによる十分発達した開水路乱流の解析, 第 7 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.299-302, 1993.
- 5) Tominaga, A. Liu, J. and Nagao, M.: Numerical Study of Turbulent Structure over Strip Roughness in Open Channel Flow Using a Low Reynolds Number Turbulence Model, J. of Hydraul. Coast. And Environ. Eng. No.521/II-32, pp.227-237, 1995.
- 6) 三宅大助, 河原能久: 低 R_e 数 $k-\epsilon$ モデルの粗度急

- 変部への適用, 第 12 回生研 NST シンポジウム講演論文集, pp.83-88, 1997.
- 7) 富永晃宏, 瀬津家久, 劉建, 神谷昌文: 水面変化を考慮した河床状態急変を伴う開水路乱流の数値計算, 第 8 回数値流体力学シンポジウム講演集, pp.337-340, 1994.
- 8) 武本行正, 細田尚, 富永晃宏, 瀬津家久: 一般化座標 Staggered Grid 系での自由境界問題解析について, 第 7 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.645-648, 1993.
- 9) 中山昭彦, 森野貴博, 坂東満: $k-\omega$ 2 方程式乱流モデルの有用性と評価, 土木学会第 51 回年次学術講演会講演概要集, pp.416-417, 1996.
- 10) 瀬津 家久, 中川 博次: 開水路落ち流れの乱流構造に関する実験及び数値計算, 第 33 回水理講演会論文集, pp.469-474, 1989.

(1997. 9. 30 受付)