

孤立波動下の底面境界層に関する研究

NUMERICAL STUDY ON BOTTOM BOUNDARY LAYER
UNDER SOLITARY WAVESMustafa Ataus SAMAD¹・田中 仁²

Department of Civil Engineering, Tohoku University

¹正会員 M.Eng. 東北大学大学院助手 工学研究科土木工学専攻 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)²正会員 工博 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

Characteristics of bottom boundary layer under solitary wave is investigated using Jones and Launder's original $k-\epsilon$ turbulence model. The effects of both molecular and turbulent viscosity are included in the present numerical analysis. Although available experimental data did not cover the full range of transitional and turbulent regimes, however, within the laminar region experimental data and exact solution shows very good agreement when compared with computed results. It is observed that flow parameters do not correspond to turbulent transition uniformly with same Reynolds number. The earliest transitional character is found in shear stress ratio of crest to trough. However, based on the friction factor diagram, Reynolds number around 2.16×10^5 could be identified as the critical to turbulent transition.

Key Words : solitary wave, bottom boundary layer, turbulent flow, friction factor, $k-\epsilon$ model numerical computation

1. はじめに

近年, 海浜地形変化予測に際し, 外力である波動場の計算にブシネスク方程式に基づく解析が多く行われている(たとえば, 佐藤・Kabiling¹⁾). この手法により浅海域での波の非線形的特性を記述することが出来る. 著者らはこの様な背景をもとに, 非線形波のひとつであるクノイド波のもとでの底面境界層について研究を重ねて来た^{2), 3), 4)}. このうち, 最新の研究⁴⁾によれば, 層流条件下ではアーセル数の増大に伴い底面せん断力の波形は表面波形と大きく異なるようになり, 境界層外縁の流速が正值であるにもかかわらず, 減速位相での負の加速度の影響により境界層内に負の流速が生じることを示した. このことは, 底面せん断力を単純に流速に比例するものと仮定することが許されないことを示しており, もしこの様な誤った仮定を用いた場合には一周平均の砂移動量, さらにこれによる地形変化量を誤って見積もることとなる. そこで, 本研究ではクノイド波の一つの極限である孤立波を対象として乱流モデルにより遷移域を含む領域での境界層内での特性を調べるとともに, 既往の実験データとの比較を試みた.

なお, 孤立波の底面摩擦による波高減衰に関連して, Keulegan⁵⁾, Ippen and Kulin⁶⁾, Özhan and Shi-igai⁷⁾, Naheer⁸⁾ などにより実験的研究がなされているが, いずれも実験上の制約から層流域での実験であり, 十分に大きなレイノルズ数での研究は見られない.

2. 理論的考察

本研究で用いる座標系の定義を図-1に示す.

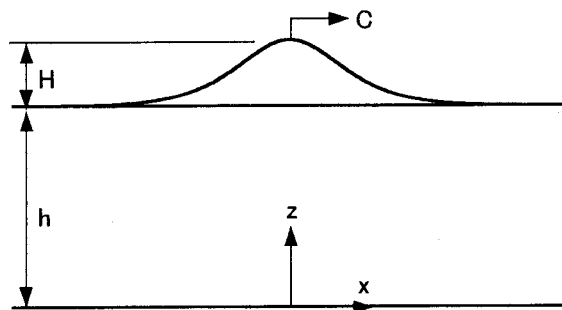


図-1 座標系の定義

孤立波波動下での水位波形 η ，流速 U に対する第一次近似解は次式で与えられる⁹⁾。

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 \{ \alpha(x - ct) \} \quad (1)$$

$$U = c \frac{\eta}{h} \quad (2)$$

ここで， t ：時間， U ：境界層外縁流速であり，また

$$c = \sqrt{g(h+H)} \quad (3)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{3H}{4h^3}} \quad (4)$$

である。以上の式中の他の記号の意味は図-1に示したとおりである。以下では x をゼロに固定し，各種特性量の時間変動について考察を行う。従って，境界層外縁での流速は次式で表される時間変化を示す。

$$U = U_c \operatorname{sech}^2(t^*) \quad (5)$$

ここで， U_c ：峰位相での U の最大値であり，また

$$t^* = \gamma t = \alpha c t \quad (6)$$

である。

式 (5) の流速変動のもとでの層流境界層の厳密解はすでに Keulegan⁵⁾ により得られている。Keulegan⁵⁾ によれば，流速 u および底面せん断力 τ_0 に対する解は次式で与えられる。

$$u = U - \frac{2U_c}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \operatorname{sech}^2 \left(t^* + \frac{\gamma}{4\nu} \frac{z^2}{\beta^2} \right) e^{-\beta^2} d\beta \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tau_0^* &= \frac{\tau_0}{\rho U_c^2} \\ &= \frac{4U_c}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\gamma}{\nu}} \int_0^\infty \operatorname{sech}^2(t^* + \beta^2) \tanh(t^* + \beta^2) d\beta \end{aligned} \quad (8)$$

ここで， ρ ：流体密度， ν ：動粘性係数である。さて，正弦振動流では境界層の乱流遷移などを論じる際，変動流速の振幅および底面での水粒子軌道振幅に基づくレイノルズ数¹⁰⁾を用いるが，孤立波の場合は平板境界層の知見を参考に次式の定義を用いることが多い^{6), 7), 8)}。

$$Re = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U^2}{c\nu} dt \quad (9)$$

上式に式 (3)，(5) を代入して積分を行えば，次の式が得られる。

$$Re = \frac{4}{3} Re' \quad (10)$$

$$Re' = \frac{U_c^2}{\nu\gamma} \quad (11)$$

式 (6) に定義した γ は規則波の角振動数に対応するものであり，このことを考慮すれば，式

(11) の Re' は正弦振動流で用いられる流速振幅，軌道振幅に基づくレイノルズ数¹⁰⁾と類似していることが理解される。また，

$$\delta_l = \sqrt{\frac{\nu}{\gamma}} \quad (12)$$

は正弦振動流下での Stokes layer 厚さに対応するものと考えられ，孤立波動下での境界層の代表長さとなる。

底面摩擦係数 C_f についても，式 (9) のレイノルズ数と同様に，一周期平均の特性量として次の様に定義される^{6), 8)}。

$$C_f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau_0 U dt}{\frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{\infty} U^3 dt} \quad (13)$$

式 (5) および式 (8) の層流解を上式に代入すれば，次の解を得ることが出来る。

$$C_f = \frac{1.56}{Re} \quad (14)$$

3. 乱流モデルによる数値計算法

著者の一人はすでに正弦振動流やクノイド波を対象として低レイノルズ数 $k-\varepsilon$ モデルによる乱流数値計算を行っている^{11), 12)}。その中で，Jones and Launder¹³⁾ やその後の改良モデルを含めた詳細な検討の結果，底面せん断力の予測精度に関しては，Jones and Launder¹³⁾ による original model がもっとも優れているとの結果を得た。そこで，本研究ではこれを用いて数値計算を行った。従って，底面は水理学的に滑面であるものとする。

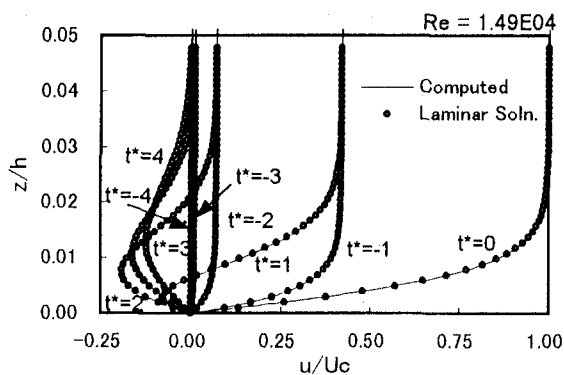
数値計算では移流項を落とした境界層方程式と，同様に線形化を行った乱れエネルギー k ，逸散量 ε に対する式を連立させ，運動式中の圧力勾配項に式 (5) を時間微分したものを代入する。計算には差分法を用い，安定性を高めるために Crank Nicolson 型の陰形式差分法を採用した。壁面近傍で精度の高い計算を行うために，壁面から離れるに従って等比級数的に増加する空間格子を用いた。なお，本計算においては，粘性底層内に少なくとも 10 の格子点が配置される様に計算条件を設定した。よって，底面での速度勾配に粘性係数を乗じて壁面せん断力を得る。

計算方法の詳細については文献(11)，(12)，(14)を参照されたい。

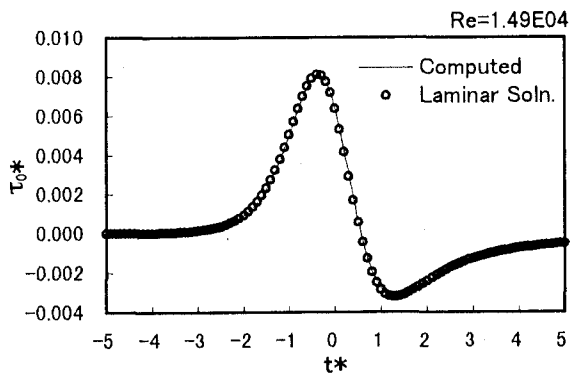
4. 結果

(1) 層流解析解との比較

本研究で用いたモデルは低レイノルズ数 $k-\varepsilon$ であるため，十分に低いレイノルズ数を与えれば層流としての解が得られる。そこで，まず計算法の精度を検討するために Keulegan⁵⁾ による層流解との比較を行った。図-2は $Re = 1.49 \times 10^4$ での流速



(a) 流速分布



(b) 底面せん断力

図-2 層流解と本計算結果との比較

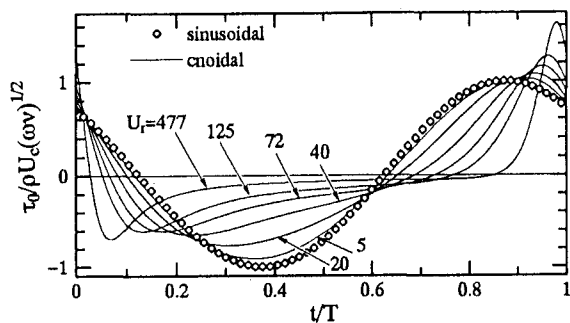
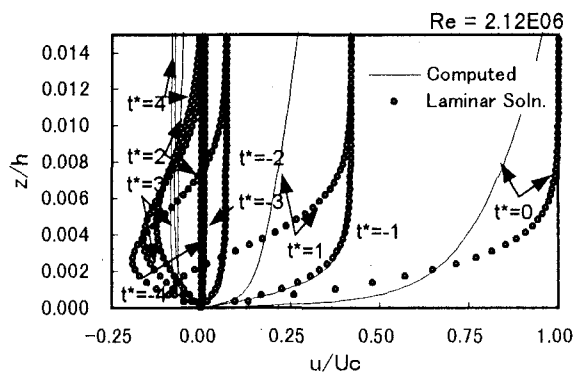


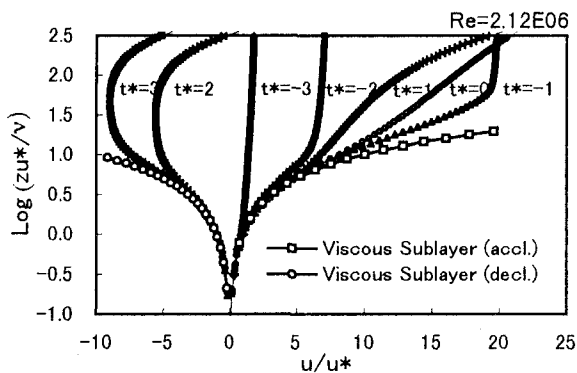
図-3 クノイド波の下での底面せん断力⁴⁾

分布とせん断力を示したものであり、計算と厳密解の間には良好な一致が見られる。特筆すべき点は、境界層外側の流速は常に正值であるにもかかわらず、減速位相で負の流速が現れることである。このため、図-2(b)で減速期に負（冲向き）のせん断力が作用することとなる。また、正弦振動流の特徴であるover-shootingも見られない。

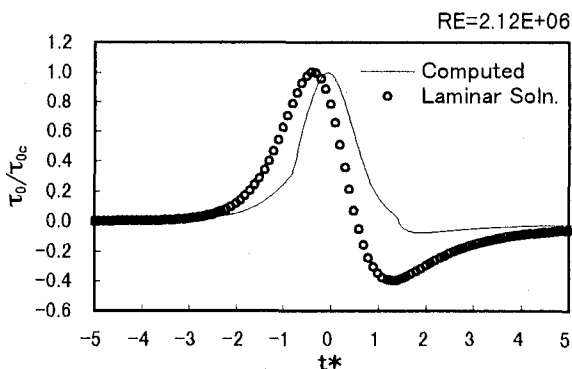
図-3には参考のために層流クノイド波境界層の下での底面せん断力の位相変化⁴⁾を示した。ただし、図中で底面せん断力は $\rho U_c \sqrt{\omega \nu}$ (ω : 角振動数) により無次元化されている。本研究で扱っている孤立波は、クノイド波においてアーセル数 U_r が無限大となった極限に対応する。図-3の曲線のうち高いアーセル数でのせん断力波形は図-2(b)に示したそれに極めて類似している。



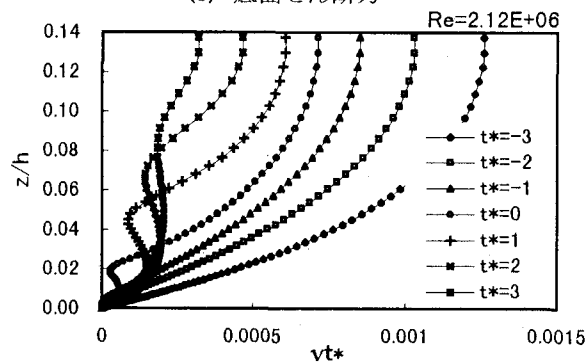
(a) 流速分布 (その1)



(b) 流速分布 (その2)



(c) 底面せん断力

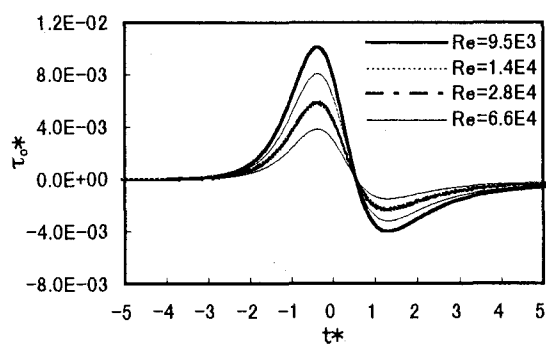


(d) 渦動粘性係数

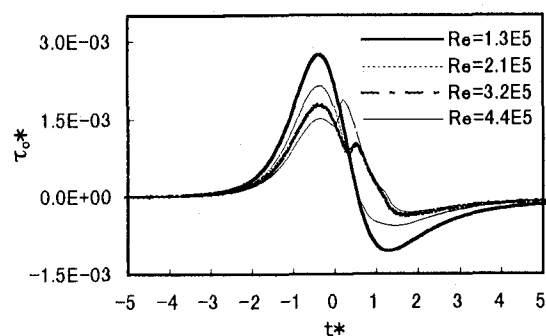
図-4 乱流域での計算結果

(2) 乱流域での計算例

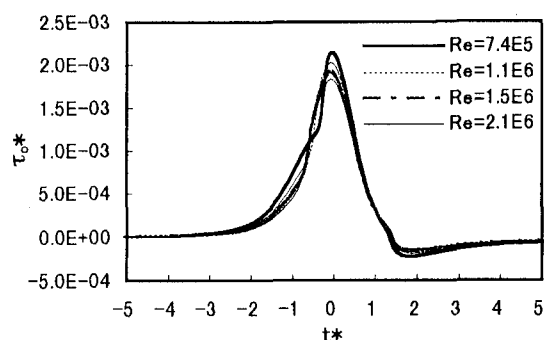
図-4に乱流域での流速分布、底面せん断力および渦動粘性係数の分布を図示した。式 (9) で定義されたレイノルズ数の値は $Re = 2.12 \times 10^6$ である。



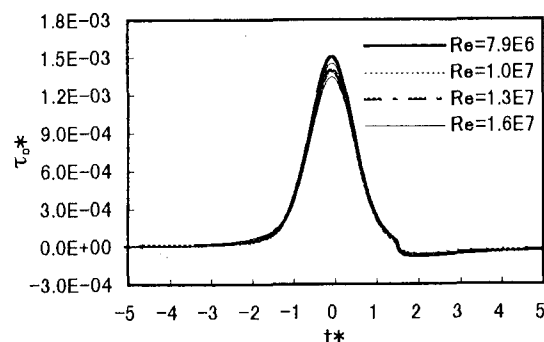
(a)



(b)



(c)



(d)

図-5 レイノルズ数の増加に伴う底面摩擦の変化

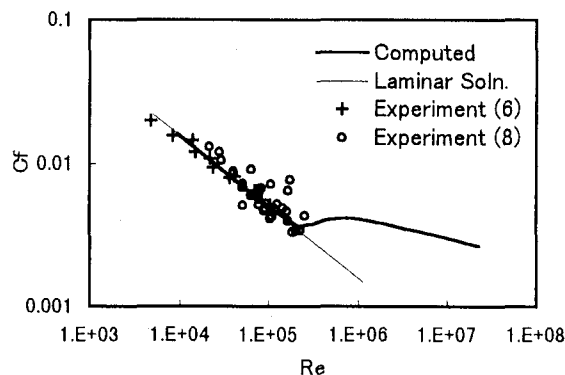


図-6 摩擦係数

図-4(a), (b), (c)にはKeulegan⁵⁾による層流解(式(7), (8))も示した。図-4(a)に見られる流速分布は減速位相で特に層流解と大きく異なり、乱流運動量輸送により底面近傍での加速が顕著である。正弦振動流に関する研究によれば、減速期に爆発的な乱れの発生が見られる(例えば、サナ・田中¹¹⁾)。図-4(a)で減速期に層流解からの差異が増大するのはこの理由による。図-4(b)によれば、粘性底層内での直線分布域、その外側での対数域、さらに境界層より上方の非粘性域が認められる。図-4(c)には層流解も示したが、ピークの現れる位相、減速期での負のせん断力の大きさに差異が認められる。波動運動に伴い、無次元化された渦動粘性係数 ν_t^* も図-4(d)に見られる位相変化を示す。なお、同図で渦動粘性係数 ν_t は $U_\delta h$ により無次元化されている。

(3) 乱流遷移特性

レイノルズ数を変化させることにより、層流域から乱流域に到る範囲で計算を行った。

レイノルズ数の増加に伴う無次元化された底面せん断力の変化を図-5に示す。まず、図-5(a)ではレイノルズ数が増加するに従い縦軸の無次元せん断力は徐々に減少する。ただし、波形自体は相似形を保っており、式(8)の解析解と一致することが確認されている。 $Re = 3.20 \times 10^5$ において減速期に二つ目のピークが見られる(図-5(b))。同様な双峰形のせん断力変化は、正弦振動流を対象にしたサナ¹¹⁾の数値計算やJensen¹⁵⁾の水理実験においても観察されている。さらにレイノルズ数が増加するにつれて、第二のピークの立ち上がり早い位相で現れるようになる(図-5(c))。十分にレイノルズ数が高くなると、レイノルズ数の変化に伴う波形の相違は小さい(図-5(d))。また、乱流域においては、加速域での最大せん断力に対する減速域の負のせん断力の大きさが層流時よりも減少する。波動下においては時々刻々の底面せん断力をもとに漂砂量を算出することが多い(たとえば、佐藤・Kabiling¹¹⁾)。波による砂移動量の正確な見積もりのためには、図-5に見られる様な複雑な底面せん断力の変化特性を十

分に理解しなければならない。

計算により得られた摩擦係数（式（13））とレイノルズ数 Re （式（9））との関係を図-6に示した。レイノルズ数が低い範囲で、計算結果は式（14）の層流解と良い一致を示している。 $Re = 2.16 \times 10^5$ において層流解からずれ、乱流域への遷移が認められる。このような遷移特性は平板境界層、管内定常流や波動境界層において見られるものと酷似している。

図中にはIppen and Kulin⁶⁾、およびNaheer⁸⁾による実験結果も併せて示した。これらの実験的研究では、二次元水路における波高減衰率から間接的に底面せん断力を見積もっている（文献6）式（21）参照）。図より、従来行われた実験はいずれも層流域にあり、乱流域には到っていないことが見て取れる。実験結果と式（14）の解とは良く一致している。

図-7には正と負のせん断力の最大値の比 τ_{0c}/τ_{0t} を示した。また、図-8はこれら二つのピークが現れる位相角 θ_c, θ_t をプロットしたものである。式（8）の厳密解によれば、層流域での τ_{0c}/τ_{0t} の値は2.51であり、 θ_c, θ_t の値はそれぞれ0.37および1.30である。図-7で、 $Re < 1.31 \times 10^5$ での計算結果はこれらの層流の厳密解と一致している。この値は図-6に見られた限界値より幾分低い。図-6の摩擦係数は一周期の平均特性として定義されているために、このような相違があるものと考えられる。図-8の θ_c, θ_t も摩擦係数から得られた限界値と幾分異なる点で遷移を示す。特に、 θ_c の遷移は他に比べて特異である。これは、図-5(d)に見られるようにレイノルズ数の増加に伴い第二のピークが支配的となり、最大値の現れる位相が不連続的に変化するためである。これに対して、 θ_t の変化が連続的に生じることは図-5からも理解される。 θ_t が示す限界レイノルズ数は図-7で見られるものに一致している。

図-9は境界層厚さの変化を示したものである。ただし、ここでは $t^* = 0$ の位相で $u/U_c = 0.99$ となる高さをもって境界層厚さとした。同図によれば、 $Re = 7.47 \times 10^5$ をはさんで異なる特性を示しており、この限界値は先に述べた底面せん断力から判断した値に比べ高いものになっている。境界層厚定義点は壁面から離れているため、せん断力など壁面上での特性量を用いた限界値よりも大きいレイノルズ数で遷移が見られる。

5. おわりに

本研究では、孤立波を対象として低レイノルズ数 $k-\varepsilon$ モデルにより底面境界層の乱流特性に関する検討を行った。本研究で得られた主要な結論は以下のとおりである。

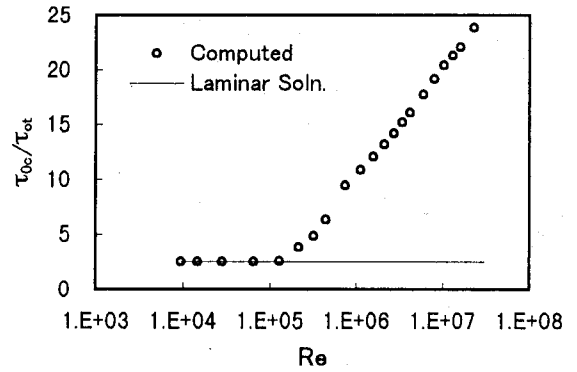


図-7 τ_{0c}/τ_{0t} とレイノルズ数との関係

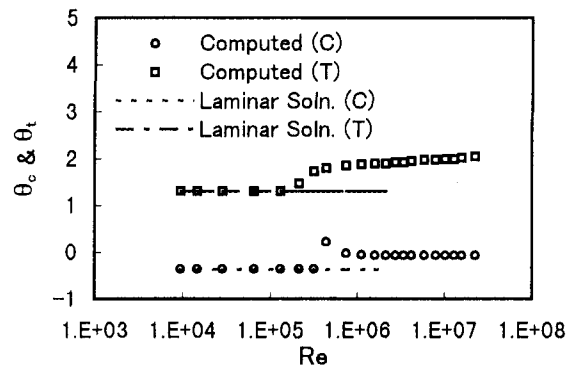


図-8 θ_c, θ_t とレイノルズ数との関係

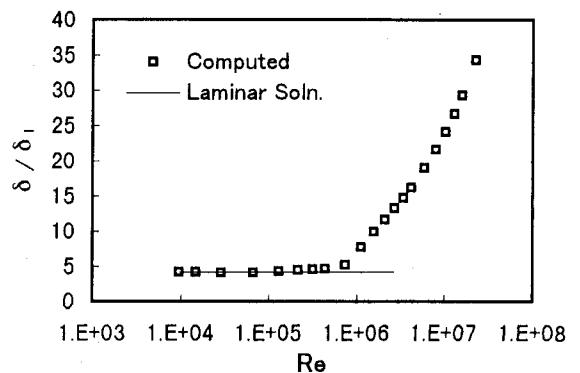


図-9 境界層厚さとレイノルズ数との関係

(1) 十分に低いレイノルズ数を与えた計算では、流速分布やせん断力の波形が層流厳密解と一致することが判った。これより、本計算の精度は十分であることが示された。

(2) 高レイノルズ数では、底面近傍において乱流特有の流速分布が得られた。底面せん断力についても層流解とは大きく異なる特性を示すことが明らかになった。

(3) 各種乱流特性量の検討の結果、孤立波動下での乱流遷移レイノルズ数が得られた。このうち、摩擦係数図からは $Re = 2.16 \times 10^5$ 程度であることが判った。ただし、既往の実験結果はすべて層流域で行われたものであり、現在のところ本研究のこの数字を支持するデータは得られていない。

謝辞: 本研究の数値計算を行うにあたり、前東北大学大学院工学研究科助手 アーマド・サナ博士より様々な助言を受けた。また、本研究に対して文部省科学研究費の補助を受けた。ここに記して、謝意を表する。

参考文献

- 1) 佐藤慎司, Michael B. Kabiling : 波打ち帯を含む三次元海浜変形の数値モデル, 海岸工学論文集, 第41巻, pp.401-405, 1994.
- 2) 田中 仁, 山路弘人, アーマド サナ, 首藤伸夫: クノイド波を模擬する非対称振動流発生装置の提案とその基本特性の検討, 土木学会論文集, No.565/II-39, pp.111-118, 1997.
- 3) Sana, A., Tanaka, H. and Yamaji, H.: Transitional behavior of asymmetric oscillatory boundary layers, 水工学論文集, 第41巻, pp.651-656, 1997.
- 4) 田中 仁, ムトゥル スーマー, ヨルゲン フレッソー: クノイド波動下における層流底面境界層の解析解とその実験的検証, 土木学会論文集, No.572号/II-40, pp.85-90, 1997.
- 5) Keulegan, G.H.: Gradual damping of solitary waves, *U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Res. Paper* No.RP1895, Vol.40, pp.487-498, 1948.
- 6) Ippen, A.T. and Kulin, G.: The effects of boundary resistance on the solitary wave, *La Houille Blanche*, No.3, pp.390-407, 1957.
- 7) Özhan, E. and Shi-igai, H.: On the development of solitary waves on a horizontal bed with friction, *Coastal Engineering*, Vol.1, pp.167-184, 1977.
- 8) Naheer, E.: The damping of solitary waves, *J. Hydraulic Res.*, Vol.16, No.3, pp.235-249, 1978.
- 9) Boussinesq, J.: Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement parallèles de la surface au fond, *J. Math. Pure Appliquées*, Ser.2, Vol.17, pp.55-108, 1872.
- 10) Jonsson, I.G.: Wave boundary layers and wave friction factors, *Proc. 10 th Int. Conf. Coastal Eng.*, pp.127-148, 1966.
- 11) アーマド サナ, 田中 仁: 低レイノルズ数 $k-\epsilon$ モデルの管内振動流への適用性に関する研究, 水工学論文集, 第40巻, pp.779-785, 1996.
- 12) Sana, A. and Tanaka, H.: The testing of low Reynolds number $k-\epsilon$ models by DNS data for an oscillatory boundary layer, *Flow Modeling and Turbulence Measurements VI*, pp.363-370, 1996.
- 13) Jones, W.P. and Launder, B.E.: The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.15, pp.301-314, 1972.
- 14) Sana, A.: Experimental and numerical study on turbulent oscillatory boundary layers, Dr. Eng. Dissertation, Tohoku University, 176pp, 1997.
- 15) Jensen, B.L., Sumer, B.M. and Fredsoe, J.: Turbulent oscillatory boundary layer at high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, Vol.206, pp.265-297, 1989.

(1997. 9. 30受付)