

水中混入気泡の拡散解析に 関する一考察

Study of Advection and Diffusion Analysis of Buoyant
Air Bubbles in Open Channel Flow

戸田圭一¹・井上和也²・川池健司³

Kei-ichi TODA, Kazuya INOUE and Kenji KAWAIKE

¹正会員 Ph.D. 京都大学助教授 防災研究所 (〒611 宇治市五ヶ庄)

²正会員 工博 京都大学教授 防災研究所 (〒611 宇治市五ヶ庄)

³学生員 京都大学大学院 (〒606 京都市左京区吉田本町)

This paper treats the phenomena of advection and diffusion of buoyant air bubbles in open channel flow by Lagrangian approach. A vertically two-dimensional mathematical model presented before is further developed in which the vertical change of volume and buoyant velocity of air bubble is considered. The effect of probability density function is also examined. The model is extended to three dimensions, whose simulation results are compared with Eulerian ones and their differences are discussed.

Key Words : air bubbles, advection and diffusion, Lagrangian method

1. 緒 言

海水により発生する泡は真水により生じるものに比べて粒径が小さく、水中から浮上・逸脱しにくいという特徴がある。よってその拡散特性は、火力発電所放水路系で景観保全の観点から消泡対策を講じる際に、先ず理解しておかねばならない重要な項目と言えよう。永見、戸田ら¹⁾は、海水を用い、長方形水路の上流端に越流堰を設け、越流落水脈によって発生する気泡を下流の数断面で多点測定し、気泡の発生濃度と流下に伴う気泡濃度の低減特性を把握する実験を行った。その結果、図-1に示すように領域は気泡の発生・混入域、擾乱域、拡散域に分類でき、擾乱域で混入空気はほとんど逸脱し、拡散域の上流端で測定された空気濃度は最大でも $10^{-2}\%$ のオーダーであった。さらに

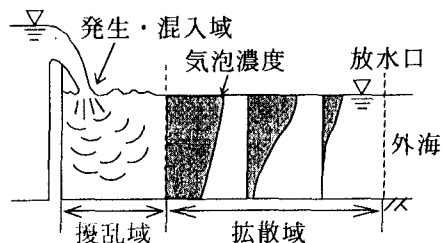


図-1 現象の模式図

彼らは、拡散域の混入気泡の移流拡散現象をオイラー的な鉛直2次元定常拡散方程式でモデル化し、水表面での逸脱の条件を表すパラメーターを適切に選定すれば、数値解析により実験結果を良好に再現できることを見出した。また著者ら²⁾は、ラグランジュ的な解析法によっても、オイラー的な解と同様の解が得られることも見出した。ラグランジュ的な解法の長所としては、空気泡の移流拡散現象を概念的に捉えやすいことが挙げられる。

本報は、既に提案しているラグランジュ的な手法によるモデルを、より詳細に検討し、発展させたものである。すなわち、鉛直2次元モデルでは、気泡の上昇に伴う体積濃度や浮上速度の変化をモデルの中に組み込み、従来の結果との比較を行っている。また、モデルの中の重要なファクターである確率密度関数の関数形の解に及ぼす影響についても考察を加えている。さらにモデルの3次元流れ場への拡張を試み、得られた解とオイラー的な解との比較を行っている。

2. ラグランジュ的手法による拡散解析

(1) 現象のモデル化

戸田ら²⁾は鉛直2次元等流の流れ場を考え、Yalin

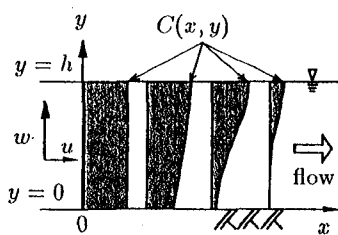


図-2 座標系

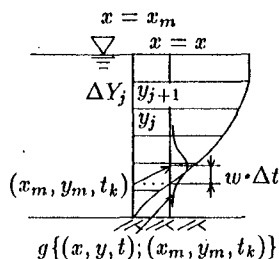


図-3 概念図

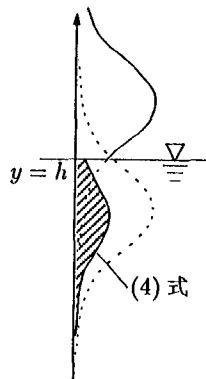


図-4 水表面の取り扱い

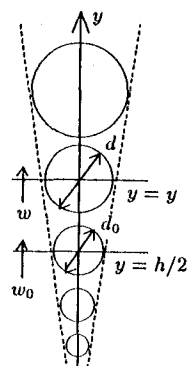


図-5 気泡径の変化

and Krishnappan³⁾による浮遊砂の鉛直方向の動きをラグランジュ的に取り扱ったモデルを参考に、それを空気泡の流下方向および鉛直方向の動きを扱うモデルに拡張し、図-1の拡散域における流下に伴う空気泡の鉛直濃度分布の変化を取り扱った。拡散域では実験結果が示すように、混入気泡の濃度が小さく、気泡の存在により生じる密度流の影響は無視できるものとし、かつ流下方向の拡散効果が鉛直方向のそれよりも十分小さいとする。x, yをそれぞれ流下方向、鉛直方向の座標軸とし、今、時刻 $t_k(t_k = t - \Delta t)$ で $x = x_m, y = y_m$ に存在する空気泡が、 Δt 秒後、 $x = x_m + u(y_m)\Delta t$ (u は流下方向の流速)の断面において取り得る変位の確率密度関数 $g\{(x, y, t); (x_m, y_m, t_k)\}$ を、ガウス分布で

$$g\{(x, y, t); (x_m, y_m, t_k)\} = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y - y_m - w\Delta t)^2}{2\sigma_y^2}\right\}, \quad (1)$$

$$\sigma_y = a_0 \sqrt{v'^2} \cdot \Delta t$$

と表現した。ここに a_0 は定数で、浮遊砂の場合と同様に空気泡の鉛直方向変動成分の標準偏差を流水の鉛直方向乱れ強さと関係づけるもの、 $\sqrt{v'^2}$ は流水の鉛直方向の乱れ強さ、 w は空気泡の浮上速度であり、一定値として取り扱われている。

任意の $x = x$ 断面での空気泡の濃度 $C(x, y, t)$ は、濃度が存在位置の確率分布に相似であると考えて、

$$C(x, y, t) = \int_0^h C(x_m, y_m, t_k) g\{(x, y, t); (x_m, y_m, t_k)\} dy_m, \quad (2)$$

$$x = x_m + u(y_m)\Delta t$$

と表現することができ、上流端における濃度の境界条件 $C(0, y, t)$ が定まれば、(1)(2)より、 $C(x, y, t)$ を決定することができる。ここに h は水深である。そして上流端の境界条件が定常であるときは、時間ステップ Δt の回数を増大していけば定常解を得ることができる。ただし、上記の議論は、空気泡が水路床ならびに水表面の境界の影響を受けない前提のものであり、水

路床および水表面において境界外に飛び出すものの跳ね返って水中に戻るものについては、確率密度関数 g について以下の取り扱いを行っている。

まず水路床では、水路床での完全跳ね返りを考えて、

$$g_1\{(x, y, t); (x_m, y_m, t_k)\} = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y + y_m + w\Delta t)^2}{2\sigma_y^2}\right\} \quad (3)$$

と表した。次に水表面では、図-4に示すように、境界外に飛び出したものの跳ね返って水中に戻るものは、水表面からの距離の2乗に関係すると考え、

$$g_2\{(x, y, t); (x_m, y_m, t_k)\} = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y + y_m + w\Delta t - 2h)^2}{2\sigma_y^2}\right\} \cdot \beta(y/h)^2 \quad (4)$$

と表した。ここに β は一定値の係数である。また計算におけるタイムスケール Δt は、吉川ら⁴⁾にならって、拡散方程式で表現したときの拡散係数と、対数則の流速分布から導かれる乱流拡散係数(渦動粘性係数と等しいと仮定)の鉛直分布値の平均値が等しいとし、

$$\Delta t = \frac{1}{3} \kappa \frac{u_* h}{a_0^2 v'^2} \quad (5)$$

を用いている。ここに κ :カルマン定数である。実際の計算においては水深を有限の層厚に分割し、各層における平均濃度をもって濃度分布を表現している。すなわち $x = x$ 断面の n 分割した j 番目の層 Y_j の平均濃度 $\bar{C}(x, Y_j, t)$ は Y_j の層厚を ΔY_j ($\Delta Y_j = y_{j+1} - y_j$)として以下のように表現している。

$$\bar{C}(x, Y_j, t) = \frac{1}{\Delta Y_j} \int_{y_j}^{y_{j+1}} C(x, y, t) dy \quad (6)$$

戸田らは上述したモデルによる計算を行い、水表面のパラメーター β を適切に定めるとオイラー的なものと類似の結果が得られることを確認している。

(2) 空気泡の浮上による径の変化の影響

前節のモデル化においては、個々の空気泡の径が同

一の大きさを有し、同一の浮上速度を有するとの仮定を暗黙のうちに課していた。しかしながら実際には、空気泡の上昇に伴い、空気泡に及ぼす圧力が変化し、その結果、気泡径すなわち体積が増大し、その影響により気泡の有する浮上速度も変化する。ここでは空気泡が球形で、かつ径が水中の位置の関数として表現されたとの仮定のもとで、気泡の上昇による粒径の変化が空気濃度の拡散特性にどの程度影響を及ぼすかを調べてみることにする。

今、水路の半水深の $y = h/2$ における空気泡の径を基準値にとり d_0 、またその浮上速度を w_0 、空気泡 1 個あたりの体積を V_0 とする。また、その位置での圧力を P_0 とする。 $y = y$ におけるそれぞれの値を d, w, V, P で表すと、気泡の圧力と体積の関係 $PV = P_0V_0$ が成立し、 H_a を大気圧水頭 ($\equiv P_a/\rho g, P_a$: 大気圧, ρ : 海水の密度) とすると、

$$V = \frac{P_0V_0}{P} = \frac{H_a + h/2}{H_a + h - y} \left(\frac{\pi}{6} d_0^3 \right) \quad (7)$$

$$d = d(y) = \left(\frac{6V}{\pi} \right)^{1/3} \quad (8)$$

なる関係が得られる。また、 d と w の関係については、 $10^{-4}\text{m} \leq d \leq 10^{-3}\text{m}$ のときの Comollet⁵⁾ の成果を用いると、

$$w = \frac{gd^2}{18\nu} \quad (9)$$

と表現される。ここに g は重力加速度、 ν は海水の動粘性係数である。

個々の粒子の体積増加が全体としての体積濃度の増加に繋がると考えられるので、前述した (2) 式は結局、

$$C(x, y, t) = \int_0^h C(x_m, y_m, t_k) \frac{H_a + h - y_m}{H_a + h - y} \cdot g\{(x, y, t); (x_m, y_m, t_k)\} dy_m, \quad (10)$$

$$x = x_m + u(y_m)\Delta t$$

と表現され、(10) 式中の g の中に現れる w も y の関数となる。

次に、気泡の径の変化を考慮した場合としない場合との計算結果の比較を行う。計算条件は、火力発電所の放水路系での気泡の移流拡散を想定し、 $h=1\text{m}$ 、断面平均流速 $\bar{u}=1\text{m/s}$ 、摩擦速度 $u_* = 0.1\text{m/s}$ 、 $\sqrt{v'^2}=0.8u_*$ (一定値) とし、流速分布として、 $u = u(y)=1\text{m/s}$ (一様流速) と対数則の 2 種類を与える。その際の鉛直方向の層の分割数は、それぞれ 100 と 50 とする。また、 $H_a=10\text{m}$ 、 $g=9.8\text{m/s}^2$ 、 $d_0=2.35 \times 10^{-4}\text{m/s}$ 、 $w_0=0.03\text{m/s}$ 、 $\nu=10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ とし、 $C_0=C(0, y, t)=1$ 、 $a_0=1.02$ 、 $\Delta t=2\text{sec}$ 、 $\beta=0.6$ とする。

流下に伴う混入気泡の鉛直濃度分布を示したものが図-6(a)(b) である。また、ここでは示さなかったが、混入空気の断面通過量の流下方向の変化も両者でほとん

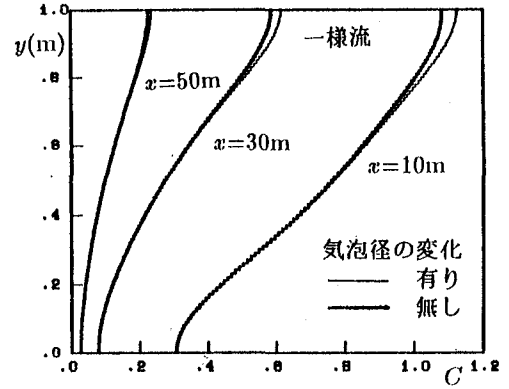


図-6(a) 混入気泡の鉛直濃度分布 (一様流)

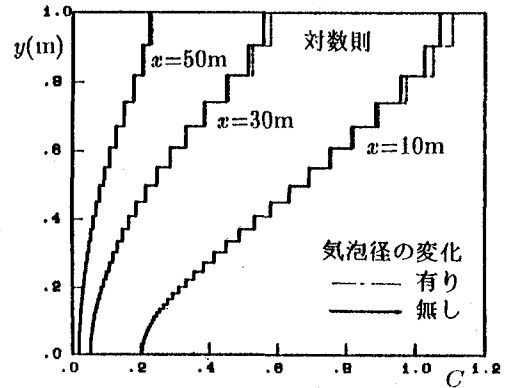


図-6(b) 混入気泡の鉛直濃度分布 (対数則)

ど差が見られなかった。これらの結果より、ここで設定した水深や空気泡の径の条件においては、浮上に伴う個々の気泡の径の変化は、全体としての水中気泡の移流拡散特性にほとんど影響を及ぼさないことが確認された。よって以降の解析においては、気泡径一定の条件 ($w=\text{const.}$) を用いることにする。

(3) 確率密度関数の関数形の変化の影響

ここでは、空気泡の存在位置を表す確率密度関数の関数形として、(1) 式に示すガウス分布の他に、ラプラス分布と一様分布を考え、 σ_y 一定の下に、関数形の変化が解に及ぼす影響を調べてみることにする。水表面および水路床の影響を受けない範囲では、ラプラス分布、一様分布による確率密度関数 g_L, g_U は、それぞれ、

$$g_L\{(x, y, t); (x_m, y_m, t_k)\} = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2}} \exp\left\{-\sqrt{2} \frac{y - y_m - w\Delta t}{\sigma_y}\right\}, \quad y \geq y_m + w\Delta t$$

$$\frac{1}{\sigma_y \sqrt{2}} \exp\left\{\sqrt{2} \frac{y - y_m - w\Delta t}{\sigma_y}\right\}, \quad y \leq y_m + w\Delta t \quad (11)$$

$$g_U\{(x, y, t); (x_m, y_m, t_k)\} = \frac{\sqrt{3}}{6\sigma_y},$$

$$y_m + w\Delta t - \sqrt{3}\sigma_y \leq y \leq y_m + w\Delta t + \sqrt{3}\sigma_y \quad (12)$$

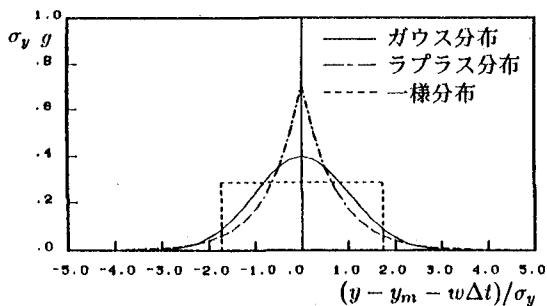


図-7 確率密度関数

で表現される（図-7 参照）。なお、上式中の σ_y は(1)式中の σ_y と同様に定義されたものである。また、 y_m の値の変化に応じて g_L, g_U は水路床、水表面の影響を受けるが、その際の取り扱いがガウス分布のときの(3)(4)式の扱いにそれぞれ準じるものとする。

3種類の関数形の変化に対する、混入気泡の鉛直濃度分布を比較したものが図-8(a)(b)、無次元化した空気通過量 q ($q = (\int Cudy)_{x=x} / (\int Cudy)_{x=0}$) を比較したものが図-9(a)(b)である。鉛直濃度分布は水表面および水路床付近において差が見られ、特に水表面付近においては、ラプラス分布の濃度が高く、一様分布のそれが低く現れる傾向が顕著である。しかしながら、その差も流下とともに小さくなり、また空気通過量でみると、3者は殆ど判別がつかない程度によく一致している。このことから、確率密度関数の関数形の変化は、関数形の標準偏差が同一であるならば、濃度分

布特性にさほど大きな影響を及ぼさないと言えよう。

3. 3次元解析への拡張

(1) 現象のモデル化

2次元鉛直流れ場で展開してきたラグランジュ的な解析法は、3次元流れの場合に拡張することが可能である。2次元鉛直流れ場の場合と同様に、今、時刻 t_k ($t_k = t - \Delta t$) で、 $x = x_m, y = y_m, z = z_m$ (z は水路幅方向の座標軸) に存在する空気泡が、 Δt 後、 $x = x_m + u(y_m, z_m)\Delta t$ の断面において取り得る変位の確率密度関数 $f\{(x, y, z, t); (x_m, y_m, z_m, t_k)\}$ を、

$$f\{(x, y, t); (x_m, y_m, z_m, t_k)\} = \frac{1}{\sigma_y \sigma_z (2\pi)} \cdot \exp\left\{-\frac{(y - y_m - w\Delta t)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z - z_m)^2}{2\sigma_z^2}\right\}, \quad (13)$$

$$\sigma_y = a_0 \sqrt{v'^2} \cdot \Delta t, \quad \sigma_z = b_0 \sqrt{w'^2} \cdot \Delta t,$$

と表現することとする。ここに b_0 は a_0 と同義の定数、 $\sqrt{w'^2}$ は流水の横方向の乱れ強さである。

Δt は、 y, z それぞれの方向において、拡散方程式で表現したときの拡散係数と、乱流拡散係数の平均値($\overline{\epsilon_y}, \overline{\epsilon_z}$) が等しいとし、

$$\Delta t = \frac{2\overline{\epsilon_y}}{a_0^2 v'^2} = \frac{2\overline{\epsilon_z}}{b_0^2 w'^2} \quad (14)$$

なる関係より定める。

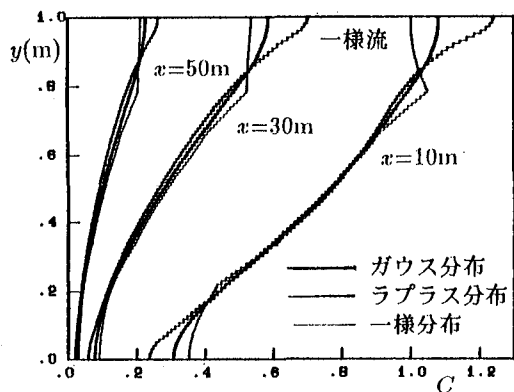


図-8(a) 混入気泡の鉛直濃度分布（一様流）

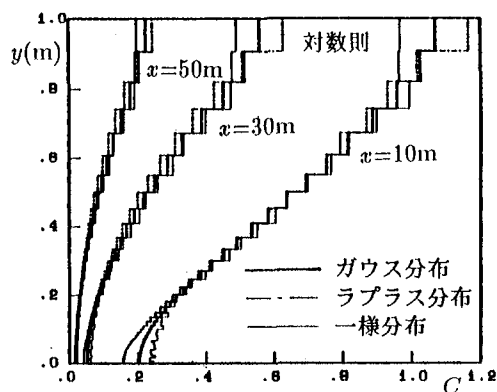


図-8(b) 混入気泡の鉛直濃度分布（対数則）

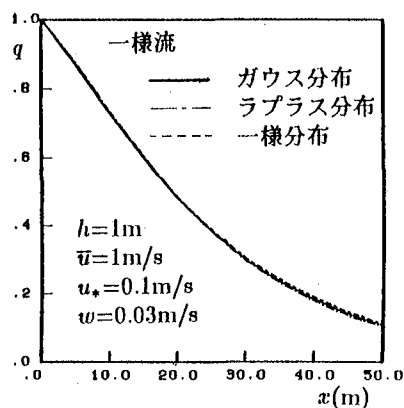


図-9(a) 無次元空気通過量（一様流）

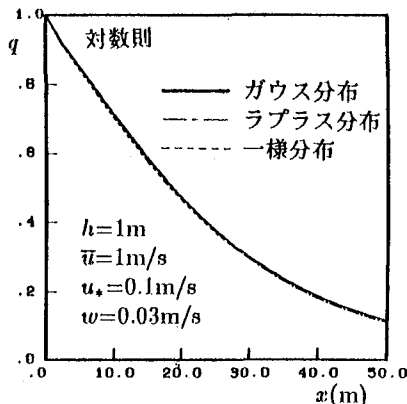


図-9(b) 無次元空気通過量（対数則）

今、長方形断面の水路を考え、その水深を h 、水路幅を B とすると、任意の $x = x$ 断面での空気泡の濃度 $C(x, y, z, t)$ は、濃度が存在位置の確率分布に相似であると考えて、

$$C(x, y, z, t) = \int_0^h \int_{-B/2}^{B/2} C(x_m, y_m, z_m, t_k) \cdot f\{(x, y, z, t); (x_m, y_m, z_m, t_k)\} dy_m dz_m \quad (15)$$

と表現できる。水路床および水表面において境界外に飛び出すものの跳ね返って水中に戻るものについては、2次元鉛直流れの場合と同様に、それぞれ f の代わりに、

$$f_1\{(x, y, z, t); (x_m, y_m, z_m, t_k)\} = \frac{1}{\sigma_y \sigma_z (2\pi)} \cdot \exp\left\{-\frac{(y + y_m + w\Delta t)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z - z_m)^2}{2\sigma_z^2}\right\} \quad (16)$$

$$f_2\{(x, y, z, t); (x_m, y_m, z_m, t_k)\} = \frac{1}{\sigma_y \sigma_z (2\pi)} \cdot \exp\left\{-\frac{(y + y_m + w\Delta t - 2h)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z - z_m)^2}{2\sigma_z^2}\right\} \cdot \beta(y/h)^2 \quad (17)$$

を用いることとする。また、側壁から境界外に飛び出すものの、跳ね返って水中に戻るものについては、 f の代わりに、

$$f_3\{(x, y, z, t); (x_m, y_m, z_m, t_k)\} = \frac{1}{\sigma_y \sigma_z (2\pi)} \cdot \exp\left\{-\frac{(y - y_m - w\Delta t)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z + z_m + B)^2}{2\sigma_z^2}\right\} \quad (18)$$

$$f_4\{(x, y, z, t); (x_m, y_m, z_m, t_k)\} = \frac{1}{\sigma_y \sigma_z (2\pi)} \cdot \exp\left\{-\frac{(y - y_m - w\Delta t)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z + z_m - B)^2}{2\sigma_z^2}\right\} \quad (19)$$

により表現することとする。また、図-10中の四隅の(5)～(8)の箇所については、水表面あるいは水路床と、側壁の境界の影響をともに考慮して、例えば f_5 に関しては、

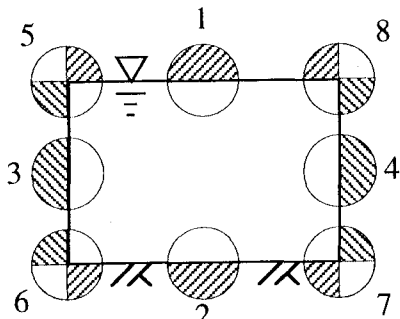


図-10 水表面・水路床・側壁の境界の取り扱い

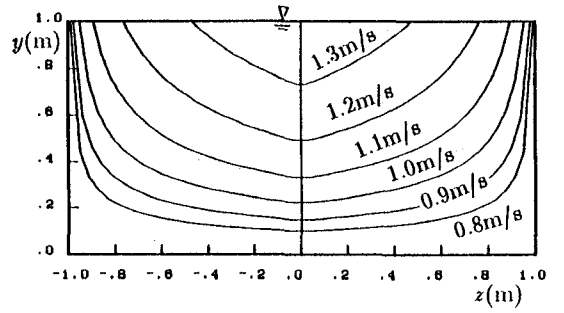


図-11 断面内流速分布

$$f_5\{(x, y, z, t); (x_m, y_m, z_m, t_k)\} = \frac{1}{\sigma_y \sigma_z (2\pi)} \cdot \exp\left\{-\frac{(y + y_m + w\Delta t - 2h)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z + z_m + B)^2}{2\sigma_z^2}\right\} \cdot \beta(y/h)^2 \quad (20)$$

と表し、 $f_6 \sim f_8$ も同様の表現をとることとする。なお以降の計算の進め方については2次元鉛直流れ場の場合に準じることとする。

(2) オイラー的な解との比較

長方形断面水路内の流れ場 ($h=1\text{m}$, $B=2.0\text{m}$, $\bar{u}=1\text{m/s}$, $u_* = 0.1\text{m/s}$, $\sqrt{v'^2} = 0.8u_*$, $\sqrt{w'^2} = u_*$) を考え、Chiu⁶⁾の方法により得られた流速分布(図-11)を対象とし、断面を鉛直方向に10分割、横方向に15分割して、 $w=0.03\text{m/s}$, $C_0 = C(0, y, z, t) = 1$ の条件の下でラグランジュ的な拡散解析を実施し、オイラー的な解との比較を行った。

3次元流れ場のオイラー的な解は、基礎式

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\epsilon_y \frac{\partial C}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\epsilon_z \frac{\partial C}{\partial z}) \quad (21)$$

を境界条件、

$$C = C_0 \quad (x = 0: \text{上流端境界条件}) \quad (22)$$

$$\epsilon_y \frac{\partial C}{\partial y} - wC = 0 \quad (y = 0: \text{水路床境界条件}) \quad (23)$$

$$\epsilon_y \frac{\partial C}{\partial y} - (1 - A)wC = 0 \quad (y = h: \text{水表面境界条件}) \quad (24)$$

$$\epsilon_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad (z = -B/2, B/2: \text{水路側壁境界条件}) \quad (25)$$

のもとで解くことにより求められる。ここに ϵ_y, ϵ_z はそれぞれ鉛直方向、横方向の乱流拡散係数であり、今回は $\epsilon_y = \epsilon_z/2 = \kappa h u_*/6$ としている。また A は水表面に達した気泡が水中から逸脱する確率を表すパラメーターであり、2次元解析で実験結果の再現性が良好であった $A=0.85$ を用いている¹⁾。解法としては、(21)式を移流方程式、 y 方向の拡散方程式、 z 方向の拡散方程式に分離して解く Split-Operator-Method を用い、差分法としては、移流方程式に風上差分法、拡散方程式に Crank-Nicholson 法を適用した。

ラグランジュ的な解を求める際には、与えられた

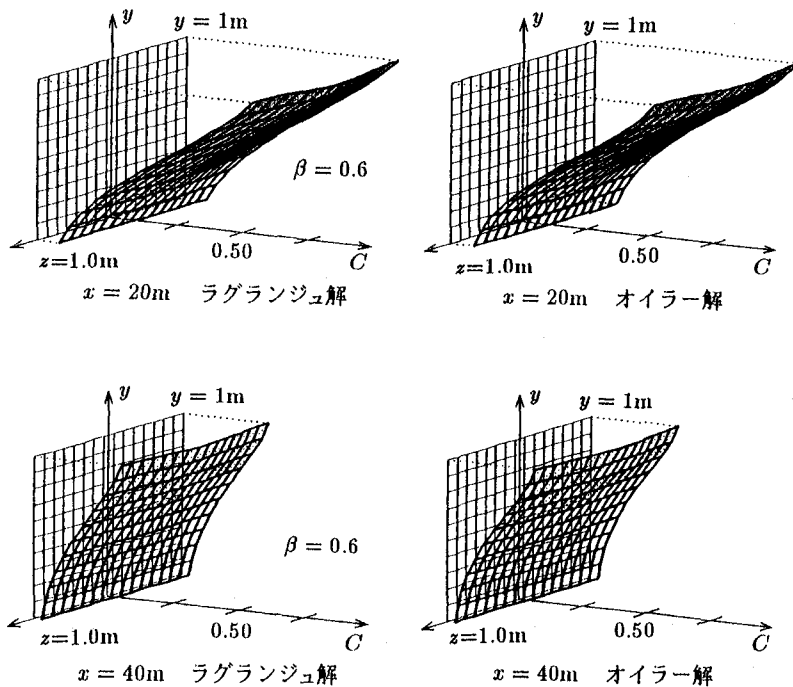


図-12 断面内濃度分布

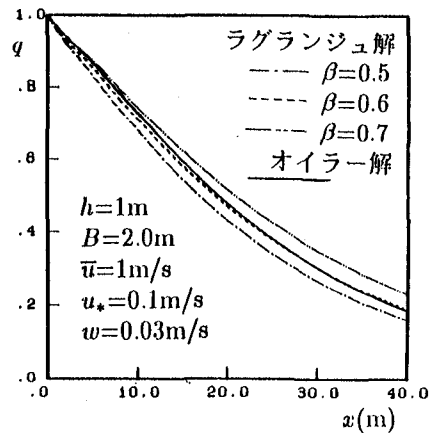


図-13 無次元空気通過量

$\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$, $\overline{\epsilon_y}$, $\overline{\epsilon_z}$ に対して (14) 式を満足するように a_0 , b_0 , Δt の値を定める必要がある。2次元計算の予備検討において、(5) 式中の a_0 以外の水理量を一定として a_0 のみを変化させ、 Δt を変化させた際の感度分析を行ったところ、 a_0 が 0.85 ~ 1.15 の範囲においては、 a_0 すなわち Δt の変化に対して各々の解の差は小さなものであることが確認された。よって (14) 式を用いる際に、 a_0 , b_0 とも 0.85 ~ 1.15 の範囲に収まる条件の下で Δt を設定した。

$\Delta t=2\text{sec}$, $a_0=1.02$, $b_0=1.15$ なる条件の下で得られたラグランジュ的解とオイラー的解を比較して示したものが図-12,13 であるが、 $\beta=0.6$ のとき両者は概ね一致していることが認められた。また、その他の水理条件を同一にし、 u_* を、 $u_*=0.067\text{m/s}$, 0.05m/s と変化させたところ、それぞれ $\beta=0.5, 0.4$ のとき、両手法による計算結果の良好な一致が見られた（紙面の都合上結果の紹介は省略する）。

このように、3次元のラグランジュ解析においても、水表面の境界条件を適切に選定すれば、オイラー的なものと概ね対応する解が得られることが確認された。なお、オイラー解と合致する β の値は u_* の変化に呼応して若干変化した。その関係の詳細な把握は今後の課題である。

ここで提示した計算法においては、 Δt に関して (14) 式の制約があり、2方向の乱れ強さ、乱流拡散係数の取り得る範囲には限界がある。また、 $\sqrt{v'^2}$, $\sqrt{w'^2}$ がともに一定値である条件を用いているが、 $\sqrt{v'^2}$, $\sqrt{w'^2}$ の断面内の分布を考慮しようとする、鉛直2次元流れの場合と同等あるいはそれ以上に Δt の取り扱いが課題となる。

4. 結 言

本研究を通して得られた主要な結論は以下の通りで

ある。

- (1) 火力発電所の放水路系での空気泡の拡散においては、空気泡の浮上による径の変化、浮上速度の変化は、解析結果にほとんど影響を及ぼさない。
- (2) ラグランジュ解析における確率密度関数の関数形が異なっても、その標準偏差が同一であるならば、解析結果にさほど大きな差は見られない。
- (3) 鉛直2次元流れ場におけるラグランジュ的解析法は、3次元流れ場にも拡張することが可能であるが、乱れ強さの断面内の分布の取り扱いが課題として残る。

参考文献

- 1) 永見光央, 戸田圭一, 大本雄二, 渡邊博: 水中混入気泡の流下に伴う挙動に関する数値シミュレーション, 土木学会第49回年次学術講演会講演概要集, pp.434-435, II(A), 1994.
- 2) 戸田圭一, 吉川太, 井上和也: 水中混入気泡の移流拡散特性, 水工学論文集第41巻, pp.311-316, 1997.
- 3) Yalin, M.S. and Krishnappan, B.M.: A probabilistic method for determining the distribution of suspended solids in open channels, *Proc. 1st Symp. on River Mechanics*, Bangkok, pp.603-614, 1973.
- 4) 吉川秀夫, 石川忠晴: 流砂運動のモデル化とそれに基づく流砂量の算定について, 土木学会論文報告集, 第269号, pp.53-64, 1978.
- 5) Chanson H.: *Air bubble entrainment in free-surface turbulent shear flows*, Academic press, pp.274-277, 1996.
- 6) Chiu, C.L., Lin, H.C. and Mizumura K.: Simulation of hydraulic processes in open channels, *J. of Hydraulic Div.*, ASCE102, HY2, pp.185-206, 1975.

(1997.9.30 受付)