

CT 型レーザー濃度計 — 仮想荷重法の の応用による逆問題の解—

CT-TYPE LASER CONCENTRATION METER

—APPLICATION OF 'VIRTUAL-LOAD' METHOD TO THE INVERSE PROBLEM—

日野 幹雄¹・佐藤 行成²

1 正会員 工博 中央大学 総合政策学部 (〒192 東京都八王子市東中野)

2 工博 日本科学工業(株) 研究部長 (〒565 大阪府吹田市清水2-1)

In the previous paper(Hino, 1997), the well-known technique of double Fourier series expansion has been applied to solve the inverse problem. The method had some defects that the accuracy of solution to the inverse problem has been lowered by the measurement errors included inherently.

In this paper, a new method of 'virtual-load' (Hino, 1975) is applied. A field is considered to be the deflection of 'virtual elastic plate' deformed by the 'virtual loads'. The problem reduces to solve a system of simultaneous linear equations ($A \cdot w = R$) in which the matrix A is composed of the element-deflection of virtual plate and the given vector R is a vector of the decay rates of laser intensities, the integrated information of the field.

The usefulness and effectiveness of the 'virtual-load' method compared to the Fourier expansion method are confirmed by numerical simulation and laboratory experiments.

Key Words : inverse detection, CT-scan, concentration meter, Laser

1. はじめに

(1) 土砂濃度計測法の現状と問題点

医用のCTスキャナー(人体断層)をはじめ, 気象でのドップラー音響レーダー(風速), 海洋における超音波プロファイラー(流速), 地質・地震学における地層地質構造や地球内部構造の推定など様々な分野において, 逆推定法による計測法が実用化されている(これについては(日野 1997a)¹⁾を参照)のに反し, 土砂等の濃度分布については著者の知る限り「未だし」の状況にある。上記のように様々な分野で逆推定法が使われ, その原理も特に難しいものではないのにCT型の土砂濃度計が開発されていない理由を列挙してみると次のようになる。

- ・ 水中計測である。
- ・ 大型の装置は無理。
- ・ 濃度場のコントラストが低く, 分布が複雑。
- ・ 濃度場が刻々変化する。
- ・ 高価な投資に見合うだけの効用はない。

(2) 本開発研究の目標と設計の方針

本研究の2D土砂瞬間濃度分布測定機の開発で特に目指したのは次の4点である。

- ・ 小形で現場でも手軽に使用しうること
- ・ 研究者が購入しうる程度に価格が手頃
- ・ ほぼ瞬間的に計測ができること
- ・ 機器が流れを乱さないこと

病院にあるCTやMRIなどの装置は巨大であって簡単には移動できない。当然価格も高く初期には数億円, 広く普及して安くなった現在でも数千万円はするであろう。本研究では, 現場で手軽に使用でき, しかも堅牢で, 値段も100万円から高々数100万円程度のものを作ることを目的とし, すでに一部の報告¹⁾²⁾³⁾を行った。

2. 濃度場を透過した光の減衰

濃度場にレーザー光が入射するとき, その光量(I)の減衰は次式によって表される。

$$dI/ds = -\lambda C(x, y) \cdot I \quad (2, 1)$$

ここに, s : 光路に沿っての距離, λ : 光量の減衰係数。実際には λ は土砂粒子径の関数であるとか, 粒子群中での光の反射・散乱などを考えなければならないが, まずは単純にグロスで考え, 一定とすること, 間隔($x_{ij} - x_{i1}$)だけに隔たった相対する($$

平行とは限らない) 二直線上に、それぞれ $I_{1\max}$ 個の発光点 ($x=x_{1,i}, y=y_{1,i}, i=1,2,\dots,I_{1\max}$) と $I_{2\max}$ 個の受光点 ($x=x_{2,j}, y=y_{2,j}, j=1,2,\dots,I_{2\max}$) を配置する。いま、第 i 番目の発光点 ($x_{1,i}, y_{1,i}$) から受光点 ($x_{2,j}, y_{2,j}$) にレーザー光線が広がることなく平行光として照射される状態を考える。

$$x_2 = s \cos \theta, \quad y_2 = y_1 + x \tan \theta$$

ここに、

$$\tan \theta = (y_2 - y_1) / x_2 \quad (2 \cdot 2)$$

探査光 (路) の通し番号 Π は

$$\Pi = (I_1 - 1) \cdot I_{2\max} + I_2 \quad (2 \cdot 3)$$

今の問題で与えられる情報は、第 I_1 番目 ($I_1 = 1, 2, \dots, I_{1\max}$) の発光点 (x_1, y_1) から第 I_2 番目 ($I_2 = 1, 2, \dots, I_{2\max}$) の受光点 (x_2, y_2) に向かうある光路上の濃度の積分値に関するものである。

$$\begin{aligned} R(y_1, y_2) &= \int C(x, y) ds \\ &= \int C(x, y_1 + x \tan \theta) dx / \cos \theta \end{aligned} \quad (2 \cdot 4)$$

ここに、

$$R = (\lambda)^{-1} \ln(I/I_0) \quad (2 \cdot 5)$$

3. 二重フーリエ展開による推定法と問題点

(1) 二重フーリエ展開法による逆問題

濃度場 C は二重フーリエ級数により次のように表される。

$$C(x, y) = \iint f(k_x, k_y) \cdot \exp \{2\pi i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y \quad (3 \cdot 1a)$$

$$= \sum f(k_x, k_y) \cdot \exp \{2\pi i(k_x x/L_x + k_y y/L_y)\} dk_x dk_y \quad (3 \cdot 1b)$$

ここに、 $\angle K_x = 1/L_x$, および $\angle K_y = 1/L_y$, L_x, L_y は x, y 方向の基本波の波長, k_x, k_y はそれぞれきざみ幅 $\angle K_x, \angle K_y$ の波数 (K_x, K_y) の波数番号で $k_x = 0, \pm 1, \dots, \pm k_{x\max}$, $k_y = 0, \pm 1, \dots, \pm k_{y\max}$ の整数値とする。(大文字の K_x, K_y (波数) と小文字の k_x, k_y (波数番号) を使い分けているので注意.)

式(3.1)の関係は、

$$A_c \cdot f = C \quad (3 \cdot 2)$$

と書かれる (行列 A_c の具体表示は省略). 式 (2.4) に式 (3.1) を代入して整理すると、未知のフーリエ級数 $f(k_x, k_y)$ について次の連立一次方程式を得る¹⁾.

$$A \cdot f = R \quad (3 \cdot 3)$$

ここに、matrix A の要素は次式で表される。

$$\begin{aligned} A(k_x, k_y) &= \int_0^{x_2} \exp(2\pi i k_x x / L_x) \\ &\quad \cdot \exp(2\pi i k_y (y_{1i} + x \tan \theta) / L_y) dx / \cos \theta \\ &= \begin{cases} \exp(2\pi i k_y y_{1i}) \{ \exp(2\pi i (k_x + k_y \tan \theta) x_{2j}) - 1 \} / 2\pi i (k_x + k_y \tan \theta) & (k_x + k_y \tan \theta \neq 0) \\ x_{2j} \cdot \exp(2\pi i k_y y_{1i}) & (k_x + k_y \tan \theta = 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (3 \cdot 4)$$

一つの発光点 $y_{1,i}$ に対してそれぞれの受光点 $y_{2,j}$ の受光量 $R(y_{1,i}, y_{2,j})$ が変わり、($I_{1\max} \times I_{2\max}$) 個の集積情報が得られる。濃度場の二重フーリエ級数の項数を $k_{x\max}, k_{y\max}$ で打ち切るとき、

$$(2k_{x\max} + 1) \times (2k_{y\max} + 1) \leq I_{1\max} \times I_{2\max} \quad (3 \cdot 5)$$

の関係があれば、式 (3.2) を解き、逆問題の解としてフーリエ級数の係数 $f(k_x, k_y)$ が求まる。

(2) 二重フーリエ級数法の問題点

二重フーリエ級数法は理論的には明快であり、プログラム化も (数式通りならば) システムチックに行いうる。しかし、実際にプログラムを動かしてみると、思わぬ障害が次々に現れた。次に、主な問題点と対策について記する。

a) 光強度情報の独立性の喪失と対策

発光源・受光点を共に x 軸に垂直に y 軸に平行、つまり、 $x_1 = 0$; $x_2 = x_2 = \text{一定}$ とすると、成分波が y 軸方向 $f(0, k_y)$ の場合は逆推定がうまくできるが、成分波が x 軸方向 $f(k_x, 0)$ の場合には、行列 A が singular となり、うまく逆推定ができない。この理由は、 $k_y = 0$ の場合には式 (3.3) の左辺の $f(k_x, k_y)$ の係数項は j の値の如何にかかわらずすべて等しくなっており、たとえ光路を斜めにし互いに別方向を採っても、情報の独立性が無くなるためである。このような情報の独立性の喪失を避けるために、発光源列と受光点列とは平行でなくなるようにした¹²⁾。

b) 受光量ベクトルの虚数部の取り扱い

二重フーリエ級数式 (3.3) の R に実測値やシミュレーション・データを用いてこの式を解くと、真値と著しく異なる解 $f(k_x, k_y)$ が得られることがしばしば起こる。 f に予めある値を与えて式 (3.2) により受光量ベクトル R のシミュレーション・データ (複素数) とする場合は、式 (3.3) の解 f は真値となり、プログラム上のミスがないことは確かめられる。こうして作るシミュレーション・データ R の虚数部は、オーダー的には 10^{-15} 位の小さな値であるが、これを零として式 (3.3) を解くと真値とは全く異なる f となり、したがってこの f を使って、式 (3.2) により、濃度場を求めても真の C とは全く異なったものとなる。

原因と対策 : この原因は受光量が誤差 ϵ を含むこと、 R の虚数部を実測し得ないことによると考えられる。 f と R に誤差を含んだ形で式 (3.3) を書き、かつ実部と虚部に分けて表すと次のようになる。

$$A = A_r + iA_i \quad (3 \cdot 6a)$$

$$f = f_r + \epsilon_{fr} + i(f_i + \epsilon_{fi}) \quad (3 \cdot 6b)$$

$$R = R_r + \epsilon_{Rr} + i(R_i + \epsilon_{Ri}) \quad (3 \cdot 6c)$$

$$[A_r, -A_i] \begin{bmatrix} f_r + \epsilon_{fr} \\ f_i + \epsilon_{fi} \end{bmatrix} = [R_r + \epsilon_{Rr}] \quad (3 \cdot 7a)$$

$$[A_i, A_r] \begin{pmatrix} f_r + \varepsilon_{fr} \\ f_i + \varepsilon_{fi} \end{pmatrix} = [\varepsilon_{ri}] \quad (3 \cdot 7b)$$

式 (3・7b) の右辺は実測し得ないのであるから、これを零として式 (3・7a,b) を解くと、解 f が全くデタラメになることは理解できる。これに反し、式 (3・7a) の右辺は R_r は実測しうるし、真の R に対し誤差は小さいことからこれを無視することは許される。また、観測光線数を多くして処理すると、行列 A^T と誤差 ε は無相関ゆえ、

$$[A_r, -A_i]^T \cdot [\varepsilon_{RT}] \sim 0$$

となって、行列処理の際に式 (3・7a) の誤差項は消えると考えて良い。

ところで、式 (3・3) の実部のみ、すなわち式 (3・7a) から f を求めようとする、未知数は f_r と f_i と2つに分かれるのでその数は倍となる。従って、観測 (検査) 光線数を倍にしなくてはならない。正確に言うと次に述べる理由により、未知数は2倍-1となる。

c) 行列 A の共役性と行列 A の singularity
式 (3・3) の行列 A および式 (3・2) の行列 A_c には、原点を中心にした点対称項は互いに共役という性質がある。

$$A(k_x, k_y) = A^*(-k_x, -k_y) \quad (3 \cdot 8)$$

従って、両式の右辺 R および C の虚数部が零であるためには、 f もまた原点に関して対象な点の f と共役である。

$$f(k_x, k_y) = f^*(-k_x, -k_y)$$

この性質ゆえに、連立一次方程式の行列 A , A_c は singular となる。従って、 (k_x, k_y) 平面の右半分もしくは上半分のみを考えれば良い。

d) k_x, k_y 平面の特異性

(k_x, k_y) 平面での変数は f も A も一般の点では複素数である。しかし、原点では行列 A は実数である。右辺の R や C は実数であるから、 $f(0, 0)$ も実数で虚数部をもたない。

対策：これら2つの性質を考えると、式 (3・2) および (3・3) 式の行列は (k_x, k_y) 平面の右半分あるいは上半分のみを考え、かつ実数表現とするために、 A と f に関して次の処理が必要となる。

4. 仮想荷重法による推定法⁽¹⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾

仮想荷重法とは、一般の人々にとっては耳慣れない言葉であろう。この考え方は、対象場を仮想的な一枚の弾性板で覆い、その仮想弾性版の任意の数点に仮想的に荷重 (未定) を荷したときに、この弾性板の撓みが濃度などの '場の値' に等しくなるように荷重の大きさを決定し、場の任意の点の値を表そうとする (内挿) 方法である。

定式化：個々の荷重 (点 (ξ, η) に働く) の単位荷重による任意の (x, y) 点での弾性板 (四辺単純支持弾性板) の撓みは、いわゆる影響関数、

Green 関数により

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cdot \left(\sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \sin \frac{m\pi}{a} \xi \cdot \sin \frac{n\pi}{b} \eta \right) / \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (4 \cdot 1)$$

と表すことができる。これらの撓みは加算的である。したがって、各荷重点 (ξ_p, η_p) ($p=1, \dots, p_{max}$) に働く仮想荷重の大きさを w_p (ξ_p, η_p) とすると、仮想弾性板の撓み (今の問題では、場の各点での濃度) $C(x, y)$ は、次式で表される。

$$C(x, y) = \sum_{p=1}^{p_{max}} G(x, y; \xi_p, \eta_p) w_p \quad (4 \cdot 2)$$

式 (4・1) を式 (2・4) に代入すると、次の関係式を得る。

$$R_{11} = \sum G G (I I, p) w_p \quad (4 \cdot 3)$$

あるいは、

$$[G G] [W] = [R] \quad (4 \cdot 4)$$

ここに、

$$G G (I I, p) = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y_1 + x \tan \theta; \xi_p, \eta_p) dx / \cos \theta \quad (4 \cdot 5)$$

$$I I = (I_1 - 1) \cdot I_{2max} + I_2$$

$$I_{max} = I_{1max} * I_{2max}$$

もし、 $I I_{max} > p_{max}$ ならば、上式の両辺に左から $G G$ の転置行列 $[G G]^T$ を掛けると

$$[G G]^T [G G] \cdot [w] = [G G]^T [R] \quad (4 \cdot 6)$$

となる。上式の左辺の行列 $[G G]^T [G G]$ は正方行列であるので、連立一次方程式 (4・6) の解として、荷重行列 $[w]$ を求めることができる。

このように仮想荷重法では、二重フーリエ級数法のフーリエ級数 $f(K_x, K_y)$ のかわりに仮想荷重 w_p ($p=1, \dots, p_{max}$) を求めることになる。次にこの推定 w から濃度場を式 (4・2) より求め、推定値 $C(x, y)$ を真値 $C(x, y)$ と比較する。

5. その他の改良点

(1) 情報量の増強

仮想荷重法における仮想平板は四辺固定 (自由支持) である。したがって、一つの荷重点の影響は荷重点の近傍で大きく、荷重点から離れるにつれて急激に小さくなる。この事は一本の探査レーザーの減光に寄与するのは、レーザー光路近傍の荷重の影響だけであって、一本の探査光の探り出す (荷重) 情報は非常に少ないということである。

そこで、一つの受光点は数点からのレーザーの射光を同時に受けるようにする。かつ、一つの受光点は次々に切り替わる数本一組の射光を順次受けるようにする。機構的にはかなり複雑化するが、レーザー光のもってくる濃度積分情報の密度は濃くなる。

(2) 発光・受光点辺の増加

前報では、発光点列と受光点列とは四辺形枠の流れに沿う対辺上に配置し、他の二辺には流れを乱さないように何も配置しなかった。しかし、CT型の濃度計は濃度場の積分情報という質の低い量であり、情報の量を増すことが望ましい。医用のCT機器で

は、発光・受光系を対象物の周りに一回転して、情報量を増やしている。しかし、本測定機では序論に述べた目的および理由から、このような方式は採れない。そこで、流れ場に与える影響を低く押さえるために、四角枠を保持する平面の流れに対して任意に傾けることとした。場合によっては、流れの軸に垂直に四角枠の面を配置すれば良い。

(3) プログラムの改良

上の2つの操作と射受光源の配列により、計測機の制御機構が複雑化するのみならず、解析プログラムも相当に難しくなるが、詳細については省略する。

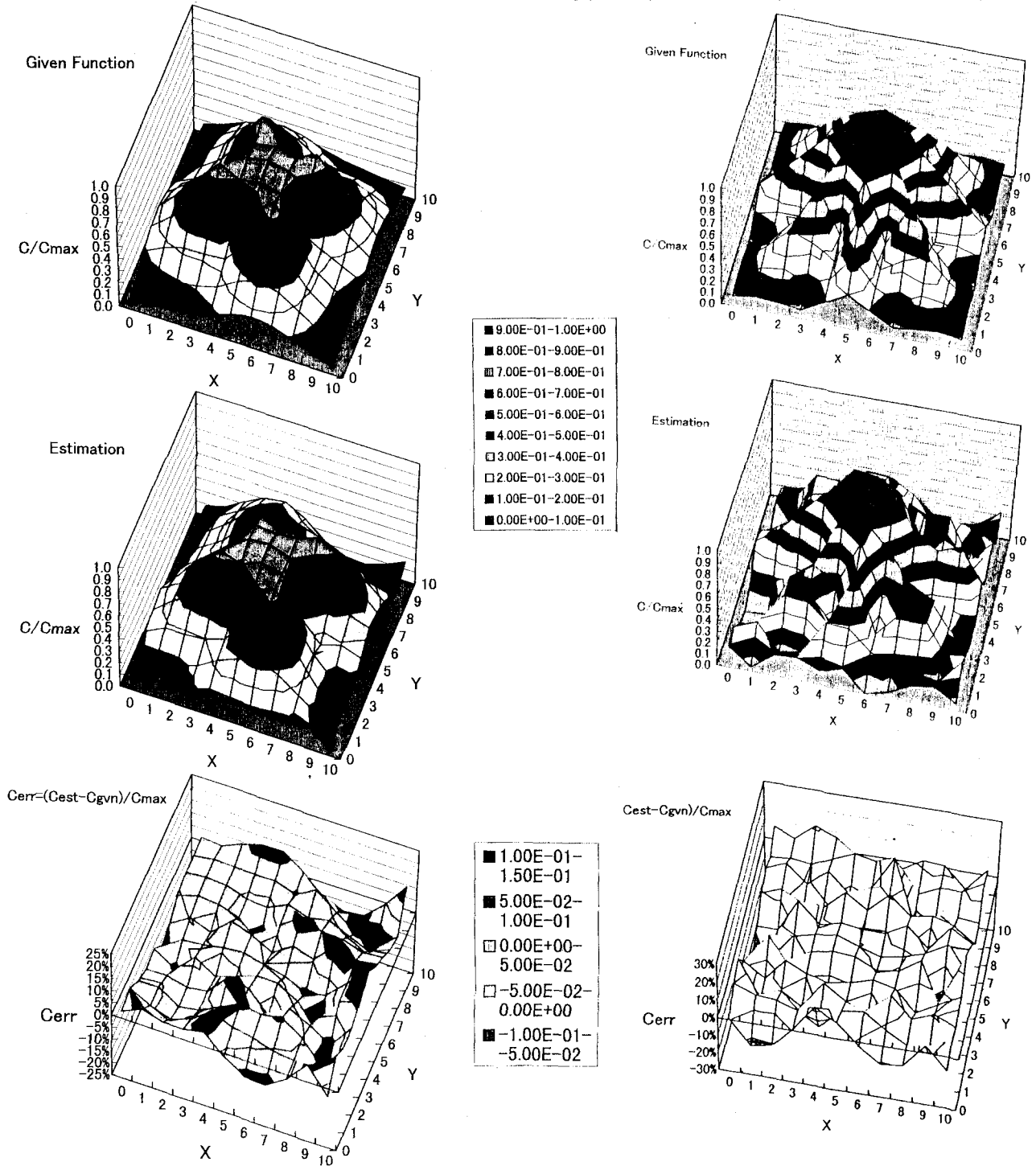


図-1 シミュレーションによるヒトデ型分布の真値(上)と推定値(中)および誤差(下)

6. 実験と結果

(1) 軸対象噴流のシミュレーション・データによる検討

シミュレーション・データ：軸対象噴流による濃度場を想定し、濃度場を次式で表現する。

$$C(x,y,z) = C_{\max}(z)(1 + \alpha \sin(2\pi m\theta)) \exp(-(x^2+y^2)/r_0(\theta, z)) + \varepsilon_r \quad (5 \cdot 1)$$

ここに、 z ：噴流軸に沿う距離、 x, y ：噴流軸に

垂直な平面内の座標、 θ ：(x, y)面内の x 軸からの偏角、 r_0 ：(x, y)面内の噴流の拡がりの代表幅、 ε_r ：測定誤差。既知の濃度分布値を上式により与え、光路中の濃度による透過減衰した受光量データ（測定誤差を含む）を求め、これらの受光量データを用い、濃度分布を逆推定により算出した。

測定誤差の導入：光の測定に伴う誤差は真値を有効数字2桁に四捨五入した。つまり、最大で5%の測定誤差が加えられる。

図-1に式(5・1)によるヒトデ型分布の場合、図-2に多峰型（上式にさらに $\cos(x-x_0), \cos(y-y_0)$ を

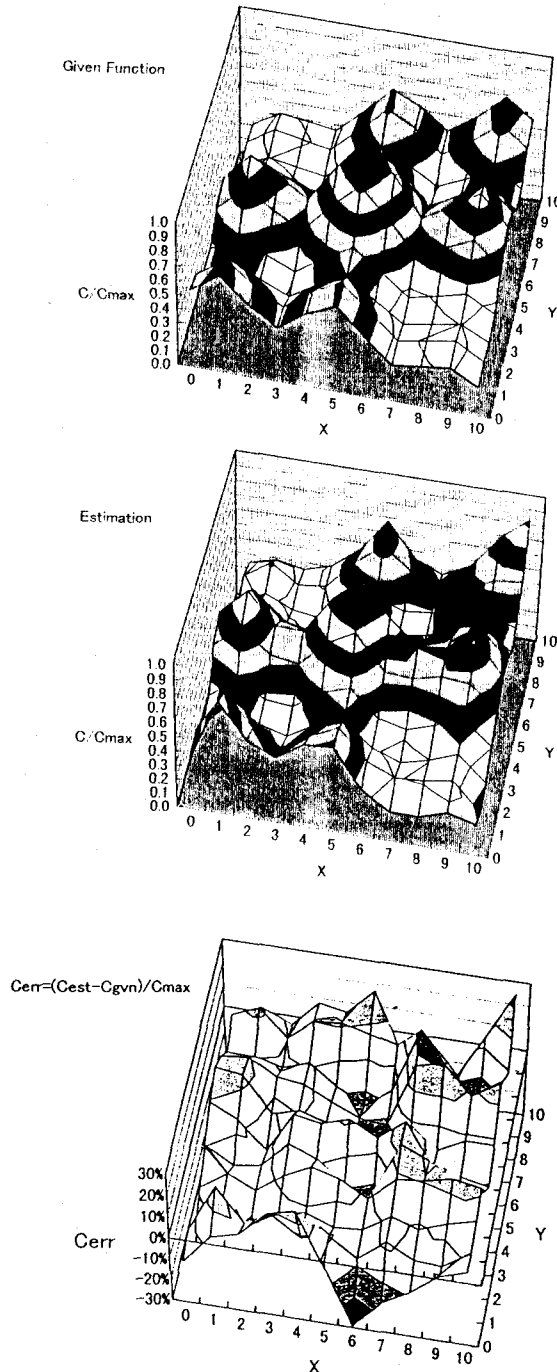


図-2 シミュレーションによる真の分布（上）
推定値（中）と誤差（下）

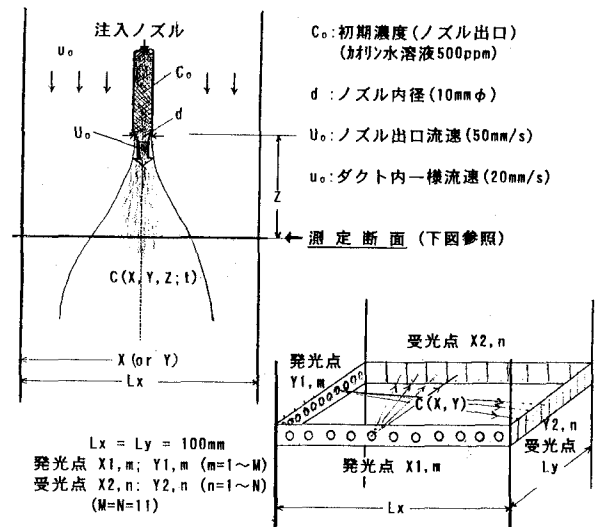


図-3 実験系および測定断面

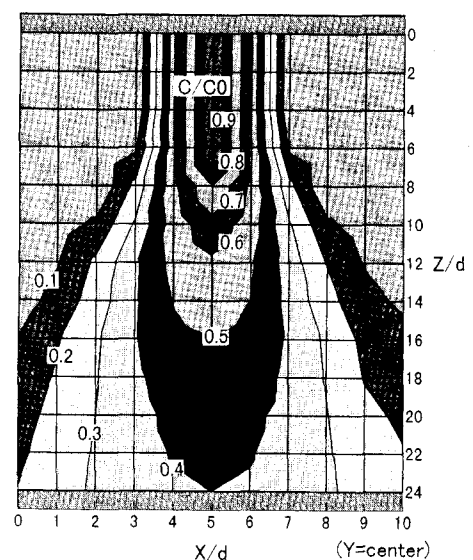


図-4 噴流軸断面内の
等濃度線

掛ける) の場合の、(a) 眞値と(b) 仮想荷重法による逆推定値および(c) 誤差を示す。

この図から、推定誤差は最大でも15%位で、眞値と推定値の一致は良好であり、仮想荷重法による推定の信頼性を認めることができる。

(2) 噴流による室内実験

a) 実験方法：図-3に実験装置および測定光学系の概略を示す。円形ノズル(内径 d)から初期濃度 C_0 (カリオン水溶液約500ppm)の水溶液が一定流速 U_0 ($u_0=20\text{mm/s}$)でダクト内に噴出している場合の下流方向(z)における主流と垂直方向断面 x,y の2次元濃度分布を測定した。本CTスキャン式2次元濃度分布計の試作装置については前報^{1),2)}で報告したが、今回の光学系(ビームスキャン方式)では、測定場の空間分解能を上げ、仮想荷重法による濃度場の適切な逆推定ができるように、 x 方向および y 方向にもビームをスキャンすることにした。 x 方向および y 方向とも、発光点($M=11$; 半導体レーザ)を回転スキャン、受光点($N=11$; フォトダイオードアレイ)を図-5(右下)のように配置した。

b) 結果：図-4,5,6に、ノズル下流における濃度分布の拡がる様子(下流距離 $z/d=6,8,12,16,20,24$ での $x-y$ 断面)を例示する。

7. 検討と結論

二重フーリエ級数法では、受光量ベクトル R が誤差を含まない場合は、フーリエ成分 f およびそれを用いて推定される濃度 C は高い精度で得られたが、受光量に誤差が含まれるときは、精度は急に悪化した。これは、誤差のためにある成分の推定値の強さが大きくなったり、逆に欠落した場合にはそれらの成分波が強くなり過ぎたり、全く無くなってしまったため、成分波の独立性がもたらす負の効果と言えよう。

これに反し、仮想荷重法ではグリーン関数はあらゆる成分波を含み、したがって、互いに凭れ合った状態であって、これが良い効果をもたらしている。

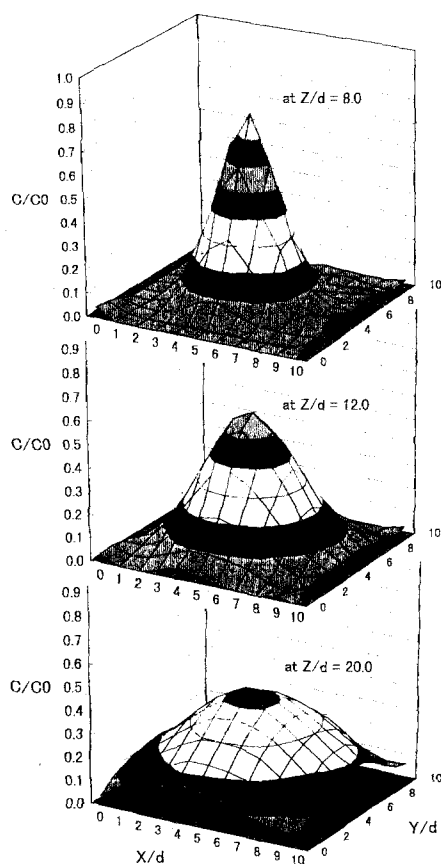


図-5 受光量データから得られたノズル下流における濃度分布の変化

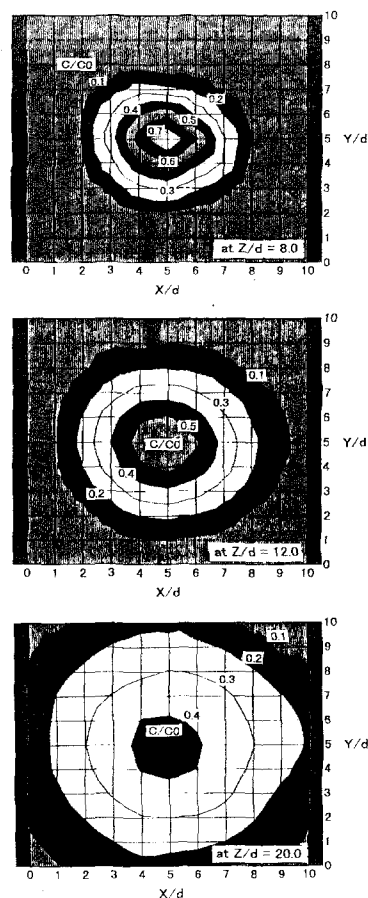


図-6 受光量データから得られたノズル下流における等濃度曲線の変化

参考文献

- 1) 日野幹雄 (1997a) : CT型レーザー土砂濃度分布計(土砂濃度2, 3次元瞬間分布像の計測システム)の開発, 科学研究費, 基盤研究(A)(試験)報告書.
- 2) 日野幹雄 (1997b) : CT型レーザー土砂濃度計の開発, 水工学論文集, 第41巻, 1085-1090.
- 3) 佐藤行成, 常見亮, 日野幹雄 (1997) : CT型レーザー土砂濃度二次元分布計の試作, 水工学論文集, 第41巻, 1091-1096.
- 4) 日野幹雄 (1975) : 仮想法の提案と解説, 東工大 土木工学科研究報告 no.18.
- 5) 日野幹雄, 宮永洋一 (1975) : グリーン関数および仮想法による波力と波の回折計算, 土木学会論文報告集, No.237, 51-82.
- 6) 日野幹雄, 吉川信二郎, 栗原達雄 (1977) : 確率統計的手法による大気汚染予測, 補遺 土木学会論文報告集, No.268, 47-62.

(1997.9.30 受付)