

拡張された周波数応答法の流出システムへの応用

Application of Extended Frequency Response Method to a Runoff System

田中 岳¹⁾・藤田睦博²⁾・Luai Hamouda³⁾・工藤睦信⁴⁾

Gaku Tanaka, Mutsuhiro Fujita, Luai Hamouda and Mutsunobu Kudo

1 学生員 工修 北海道大学大学院 工学研究科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

2 フェロー会員 工博 北海道大学大学院教授 工学研究科 (同上)

3 学生員 北海道大学大学院 工学研究科 (同上)

4 正会員 日本国土開発(株) 東京支店副支店長 (〒107 東京都港区赤坂4-9-17)

Generally, the calculated discharge is an output that passes through two low pass filters, a discrete system and a runoff system. A discrete system accumulates the real rainfall which is continuous over a period of time, Δt . The output from the discrete system is an input to runoff system described by runoff models. The optimal time interval, Δt , depends on a runoff system or mainly basin scale. In this paper, we adopt Kinematic Wave equation and two kinds of storage function runoff models derived from Kinematic Wave equation as runoff models and introduce an extended frequency response method to evaluate the optimum time interval, Δt .

Key Words: frequency response method, gain characteristics, Kinematic Wave equation, storage function runoff model, discrete system

1. はじめに

図-1は、流出システムを概念的に示したものである。即ち、流出システムの入力である降雨量は、空間的にも時間的にも連続な関数である。一方、計算流出量は、図-2のように離散化と流出モデルの二つの直列低域フィルターの出力とみなすことができる。連続的な降雨量の離散化過程における時間間隔 Δt は、解析の対象としている流出特性に依存している。流出特性は流出モデルに集約化されているので、時間間隔 Δt は流出モデルに依存することになる。一般的に言うならば、解析の対象としている流域面積が小さいほど時間間隔 Δt を小さくしなければならないことが知られているが、どの程度の Δt を採用すれば十分であるか、必ずしも定量的に評価する手法の研究がなされていない。本論文では図-1の流出システムを図-3のように置換して、図-2, 3の流出量を比較した。流出モデルとしては、Kinematic Wave式とこれを集中化することによって得られた貯留関数法を解析

の対象とした。また、図-2, 3の流出量を比較する際には拡張された周波数応答法を用いている。周波数応答法は、本来、線形システムに利用されている手法であるが、本論文では非線形システムまでも拡張して用いているので、ここでは拡張された周波数応答法と呼んでいる。

2. 離散化過程の周波数応答特性

連続的降雨量 $r(t)$ は、次式によって離散的降雨量へと変換される。

$$R_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} r(\tau) d\tau \quad i: \text{整数} \quad (1)$$

即ち、離散的降雨量に相当する観測降雨量は、図-4に示すように、ステップ高を R_i とするステップ関数で表示できる。

$$R_d(t) = \sum_{i=1}^n R_i \{u(t-(i-1)\Delta t) - u(t-i\Delta t)\} \quad (2)$$

u : ステップ関数

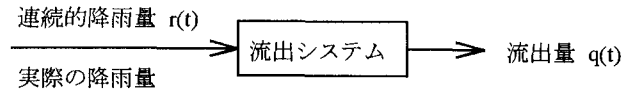


図-1 流出システム

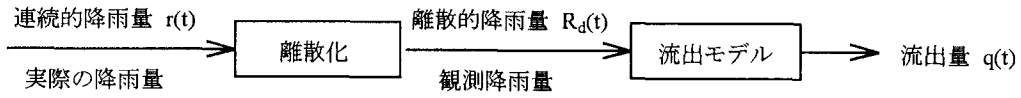


図-2 流出量の計算過程

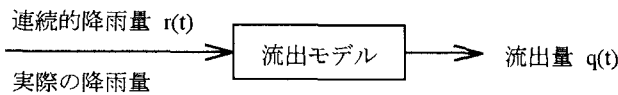


図-3 置換された流出システム

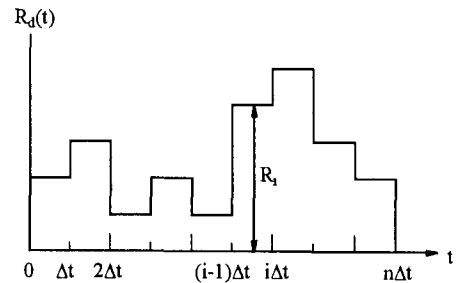


図-4 離散的降雨量の例

式(1), (2)の代わりに式(3)を考える。

$$R(t) = \int_0^t r(\tau) J(t-\tau) d\tau \quad (3)$$

$J(t)$ は、インパルス応答関数である(図-5)。このとき、 $r(t)$ と $R(t)$ 間のゲイン特性 $G_{d1}(f)$ は、理論的に次式で与えられる。

$$G_{d1}(f) = |\mathcal{F}[J(t)]| \quad j: \text{虚数単位} \quad (4)$$

ここで、 $\mathcal{F}[J(t)]$ はインパルス応答関数 $J(t)$ のフーリエ変換関数を表す。図-5 の $J(t)$ を考えれば、 $G_{d1}(f)$ は容易に次式のように表せる。

$$G_{d1}(f) = \frac{1}{2\pi f \Delta t} \sqrt{2\{1 - \cos(2\pi f \Delta t)\}} \quad f: \text{周波数} \quad (5)$$

式(1), (3)は類似しているが、その内容は大きく異なっている。

次に、式(1)の連続的降雨量として次式を仮定する。

$$r(t) = \bar{r} + A \sin(2\pi f t), \quad (\bar{r} \ll A) \quad \bar{r}, A: \text{定数} \quad (6)$$

式(1)の R_i は、次式で表される。

$$R_i = \frac{A}{2\pi f \Delta t} \sqrt{2\{1 - \cos(2\pi f \Delta t)\}} \sin\left\{2\pi f \Delta t \left(t - \frac{1}{2}\right)\right\} + \bar{r} \quad (7)$$

式(7)の t が任意の実数とすると、連続的降雨量 $r(t)$ と R_i 間のゲイン特性 $G_{d2}(f)$ は、明らかに式(5)と一致する。しかしながら、式(7)の t は、任意の整数のみしか取り得ない。ここで、式(2), (7)で定義され

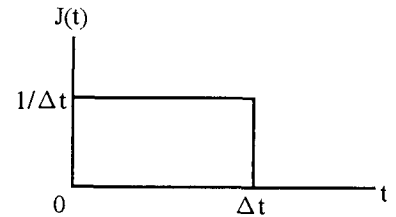


図-5 インパルス応答関数

る離散的降雨量 $R_d(t)$ の性質について検討する。

$R_d(t)$ が周期関数である条件は、

$$D \sin\left\{2\pi f \Delta t \left(t - \frac{1}{2}\right)\right\} = D \sin\left\{2\pi f \Delta t \left(t + k - \frac{1}{2}\right)\right\} \quad (8)$$

$$D = \frac{A}{2\pi f \Delta t} \sqrt{2\{1 - \cos(2\pi f \Delta t)\}}$$

を満足する整数 k が存在することである。このためには、 $f \Delta t$ が有理数であることを必要とする。 $f \Delta t$ が無理数ならば、 $R_d(t)$ は概周期関数となる。

$R_d(t)$ が周期関数のとき、 $f \Delta t$ は次式のように表される。

$$f \Delta t = \frac{m_1}{n_1} \leq 0.5 \quad m_1, n_1: \text{整数} \quad (9)$$

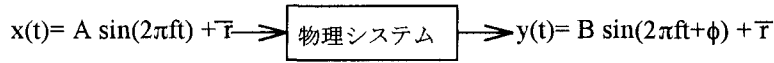


図-5 物理システムの入出力

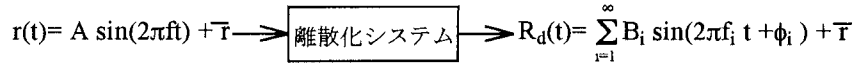


図-6 離散化システムの入出力

ここで、式(9)の右辺 m_1/n_1 を既約分数とすれば、
 $R_d(t)$ の周期 T_R は、次式で与えられる。

$$T_R = n_1 \Delta t \quad (10)$$

式(6)の単一周期関数を離散化した $R_d(t)$ は、これが、
 周期関数、非周期関数にかかわらず、複数の周波数
 成分より構成されている。物理システムの入出力間
 のゲイン特性 G は、図-5に示すように、入出力とも
 同一の周期関数となっている時、振幅比 $G=B/A$ で定
 義されている。図-5の関係が厳密に成立する条件は、
 物理システムが線形システムの場合である。式(6)の
 $r(t)$ と式(2), (7)で定義される $R_d(t)$ 間には、図-6に示
 す関係が成立しており、従来の概念のゲインを定義
 することができない。

図-7は、式(6)の $r(t)$ を離散化した $R_d(t)$ の例を示して
 いる。図-7(a)は、平均値 $\bar{r}$ から測定した最大値
 $(B_{R1}, B_{R3}, \dots)$ と最小値 $(B_{R2}, B_{R4}, \dots)$ が一致している場
 合を示している。図-7(b)は、いくつもの
 $B_{R1}, B_{R2}, \dots$ が存在する場合である。また $R_d(t)$ が周期関
 数としても、その周期は、必ずしも厳密に $r(t)$ の周
 期と一致していない。図-7に示すように、 $R_d(t)$ の周
 期はおおむね $r(t)$ の周期と一致していると考え、
 $r(t)$ と $R_d(t)$ 間のゲインとして、次の複数のゲイン
 を定義できる。

$$G_{d2}(f) = \frac{B_{R1}}{A}, \frac{B_{R2}}{A}, \dots, \frac{B_{Rn}}{A}, \dots \quad (11)$$

ここで実用上、重要なのは、 $G_{d2}(f)$ の最大値と最小
 値である。

$$G_{d1}(f) = \frac{\sqrt{2(1-\cos(4\pi f \Delta t))}}{4\pi f \Delta t} \leq G_{d2}(f) \leq \frac{\sqrt{2(1-\cos(2\pi f \Delta t))}}{2\pi f \Delta t} = G_{d4}(f) \quad (12)$$

図-8は、式(12)を図示したものである。

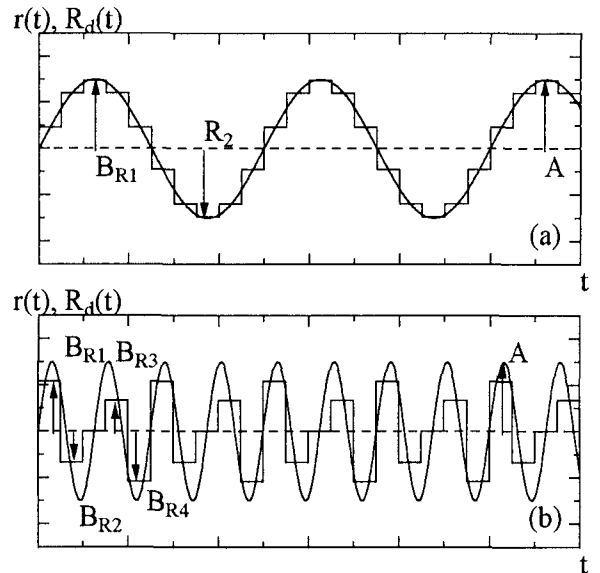


図-7 連続的降雨量と離散的降雨量の関係

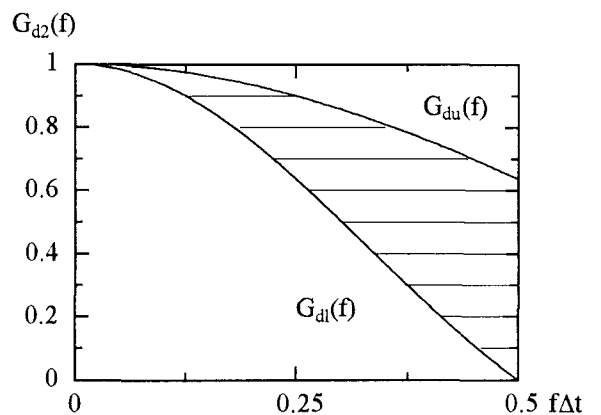


図-8 $G_d(f)$ の範囲

3. 流出システムの周波数応答特性

本論文では、流出モデルとしてKinematic Waveモデルとそれから得られる貯留型流出モデルを採用し、それらの周波数応答特性を検討する。

3.1 Kinematic Waveモデル

一様矩形斜面に対するKinematic Wave式は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \quad 0 \leq x \leq l \quad (13)$$

$$h = \varepsilon q^p \quad (14)$$

h : 水深 q : 単位幅流量 x : 斜面に沿った距離

l : 斜面長 ε, p : 定数 t : 時間

$p=1$ の時、式(13), (14)から単位幅流量 $q(x, t)$ は容易に計算される。

$$q(x, t) = \int_0^t r(\tau) V(t-\tau) d\tau \quad (15)$$

$V(t)$ は、図-9で表されるインパルス応答関数であるから、Kinematic Waveモデルのゲイン特性 $G_k(f)$ は式(5)と同様な形で表される。

$$G_k(f) = \frac{1}{2\pi \varepsilon x f} \sqrt{2(1 - \cos(2\pi \varepsilon x f))} \quad (16)$$

ここで、式(16)に含まれる x は、入力となる降雨量と、出力となる単位幅流量との次元をそろえるために導入されている。

一方、 $p \neq 1$ の場合 $G_k(f)$ を理論的に求めることは困難であるが、以下のように近似的にゲイン特性を求める。今、式(13)の降雨量 $r(t)$ として式(6)を用いると、単位幅流量 $q(x, t)$ は、次式のように仮定できる。

$$q(x, t) = \bar{r}x + f_s(x, t) \quad \bar{r}x \gg f_s(x, t) \quad (17)$$

$f_s(x, t)$ は、これから求める流出量の振動成分をなす未知関数である。式(17)を式(14)に代入して高次の微小項を無視すると、式(18)が得られる。

$$h = \varepsilon (\bar{r}x)^p \left\{ 1 + \frac{p f_s(x, t)}{\bar{r}x} \right\} \quad (18)$$

式(6), (18)を式(13)に代入すると、

$$\varepsilon p (\bar{r}x)^{p-1} \frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{\partial f_s}{\partial x} = A \sin(2\pi f t) \quad (19)$$

従って、以下の2つの式が得られる。

$$t = \varepsilon \bar{r}^{p-1} (x^p - x_0^p) + t_0 \quad (20)$$

$$f_s(x, t) = \int_{x_0}^x A \sin(2\pi f (\varepsilon \bar{r}^{p-1} (y^p - x_0^p) + t_0)) dy + f_s(x_0, t_0) \quad (21)$$

(x_0, t_0) は、特性曲線の起点を示す。式(20), (21)を理論的に解くことができないので、 y^p に以下の近似を施す。

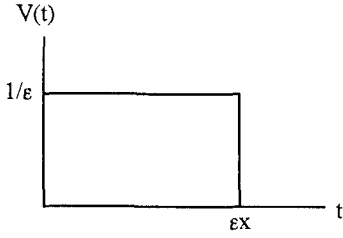


図-9 インパルス応答関数, $V(t)$

$$y^p = \sum_{i=1}^n (A_i y + B_i) \left\{ u \left(y - \frac{(i-1)x}{n} \right) - u \left(y - \frac{ix}{n} \right) \right\} \quad (22)$$

$n (\geq 2)$: 分割数

$$A_i = (i^p - (i-1)^p) \left(\frac{x}{n} \right)^{p-1} \quad (23)$$

$$B_i = (A_{i-1} - A_i) \frac{(i-1)x}{n} + B_{i-1}, \quad B_1 = 0 \quad (24)$$

式(22)を用いて式(21)を解き、 $f_s = B \sin(\omega t + \theta)$ の形に整理し、ゲイン特性を計算すると、次式のようになる。

$$G_k(f) = \frac{1}{\pi \varepsilon x \bar{r}^{p-1} f} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\sin^2(2\pi e_i f)}{A_i^2} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\sin(2\pi e_i f) \sin(2\pi e_j f) \cos(2\pi(f_i - f_j)f)}{A_i A_j} \right\}^{0.5} \quad (25)$$

$$e_i = \frac{A_i x}{2n} \varepsilon \bar{r}^{p-1}, \quad f_i = \left(\frac{A_i i x}{n} + B_i - x^p \right) \varepsilon \bar{r}^{p-1} - e_i \quad (26)$$

式(25)で $p=1$ とし、分割数 n を無限大にすると、式(16)に一致する。ここで、式(25)の妥当性をシミュレーション法により検証する。計算を簡略化するため、用いられている変数を以下の無次元化基準量(添え字が*である。)を用いて、無次元化する。大文字の変数(H, Q, R, F, X, T)が小文字の次元のある変数に対応した無次元変量である。

$$h_* = \varepsilon (\bar{r} l)^p, \quad q_* = \bar{r} l, \quad r_* = \bar{r}, \quad t_* = \varepsilon \bar{r}^{p-1} l^p, \quad x_* = l, \quad f_* = 1/t_* \quad (27)$$

$$h = h_* H, \quad q = q_* Q, \quad r = r_* R, \quad t = t_* T, \quad x = x_* X, \quad f = f_* F \quad (28)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial X} = R & 0 \leq X \leq 1 \\ H = Q^p \end{cases} \quad (29)$$

無次元変量を用いることで、式(25)は次式のように書き改められる。

$$G_k^{no}(F) = \frac{1}{\pi X R^{p-1} F} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\sin^2(2\pi e_i^{no} F)}{A_i^{no2}} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\sin(2\pi e_i^{no} F) \sin(2\pi e_j^{no} F) \cos(2\pi(f_i^{no} - f_j^{no})F)}{A_i^{no} A_j^{no}} \right\}^{0.5} \quad (30)$$

$$A_i^{no} = (i^p - (i-1)^p) \left(\frac{X}{n} \right)^{p-1}$$

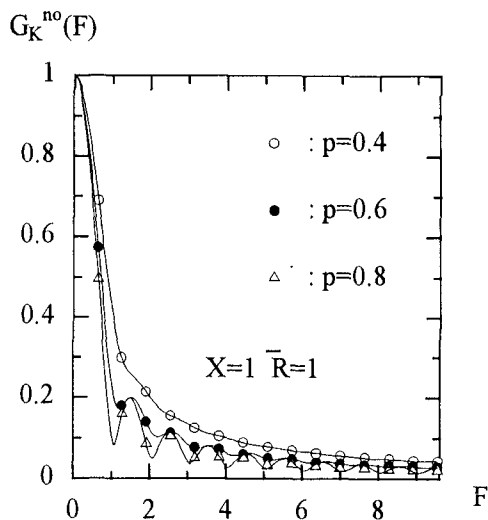


図-10 シミュレーション結果 ($n=500$)
(Kinematic Waveモデル)

$$B_i^{no} = (A_{i-1}^{no} - A_i^{no}) \frac{(i-1)X}{n} + B_{i-1}^{no}, \quad B_1^{no} = 0$$

$$e_i^{no} = \frac{A_i^{no} X}{2n} R^{p-1}, \quad f_i^{no} = \left(\frac{A_i^{no} i X}{n} + B_i^{no} - X^p \right) \bar{R}^{p-1} - e_i^{no}$$

図-10は、シミュレーションの結果を示している。実線は式(30)を示している。記号(○, ●, △)は、直接、式(29)を解き、降雨量と流出量の振幅比から得られたゲインである。両者の値は、非常によく一致している。

3.2 貯留型流出モデルの周波数応答特性^{1, 2, 3)}

一様矩形斜面上のKinematic Waveモデルから得られる貯留型流出モデルの基礎式は、次式で与えられる。

$$\frac{ds_h}{dt} + q_h = r \quad (31)$$

$$s_h = k_1 q_h^{p_1} \quad (32)$$

$$s_h = k_1 q_h^{p_1} + k_2 \frac{dq_h^{p_2}}{dt} \quad (33)$$

式(33)において、 $k_2=0$ とすれば式(32)が得られる。

即ち、式(32)は式(33)の特別な形と言える。ここでは、式(33)にのみ着目する。式(31), (33)で表される貯留型流出モデルのゲイン特性は、結果のみを示すのにとどめる。詳細は参考文献を参照されたい。

$$G_i(f) = \left\{ (1 - 4\pi^2 k_2 p_2 \bar{R}^{p_2-1} f^2)^2 + (2\pi k_1 p_1 \bar{R}^{p_1-1} f)^2 \right\}^{-0.5} \quad (34)$$

式(34)を無次元変数で表せば、次式が得られる。そこで、式(35)中のパラメータは表-1⁴⁾に示している。

$$G_s^{no}(F) = \left\{ (1 - 4\pi^2 K_2 p_2 \bar{R}^{p_2-1} F^2)^2 + (2\pi K_1 p_1 \bar{R}^{p_1-1} F)^2 \right\}^{-0.5} \quad (35)$$

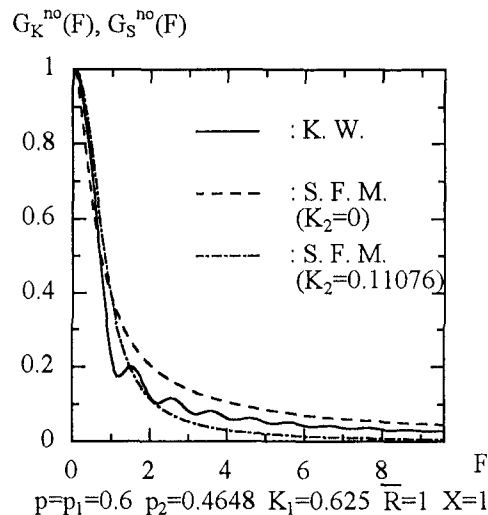


図-11 ゲイン特性の比較

表-1 式(35)中のパラメータの値

p_1	p_2	K_1	K_2
0.6	0.4648	0.625	0.11076

図-11は、3種類の流出モデルのゲイン特性を比較したものである。

4. 全システムの周波数応答特性

計算流出量は、連続的降雨量が2つの低域フィルター（離散化過程・流出モデル）を介して得られる。この全システムのゲイン特性 $G_t(f)$ は、次式で与えられる。

$$G_t(f) = G_d(f) \times G_{iy}(f) \quad (36)$$

ここで、 $G_d(f)$, $G_{iy}(f)$ は、それぞれ離散化過程と流出モデルのゲイン特性である。離散化過程のゲイン特性に対して式(12)を用いると、

$$G_{di}(f) \cdot G_{iy}(f) \leq G_t(f) \leq G_{du}(f) \cdot G_{iy}(f) \quad (37)$$

ここで、流出モデルとして、Kinematic Waveモデル及び、2つの貯留型流出モデルを採用して、式(37)の妥当性について、シミュレーション法を用いて検討する。図-12は、無次元変数を用いて表された全システムのゲイン特性と、各々の無次元化された流出モデルに、離散化された降雨量を入力し、直接、数値計算することで得られたゲインとの比較を示している。実線I及び実線IIが前者の全システムのゲイン特性を表す領域の下限と上限を表し、記号×が後者を示す。直接、数値計算で得られる計算出流量の振幅

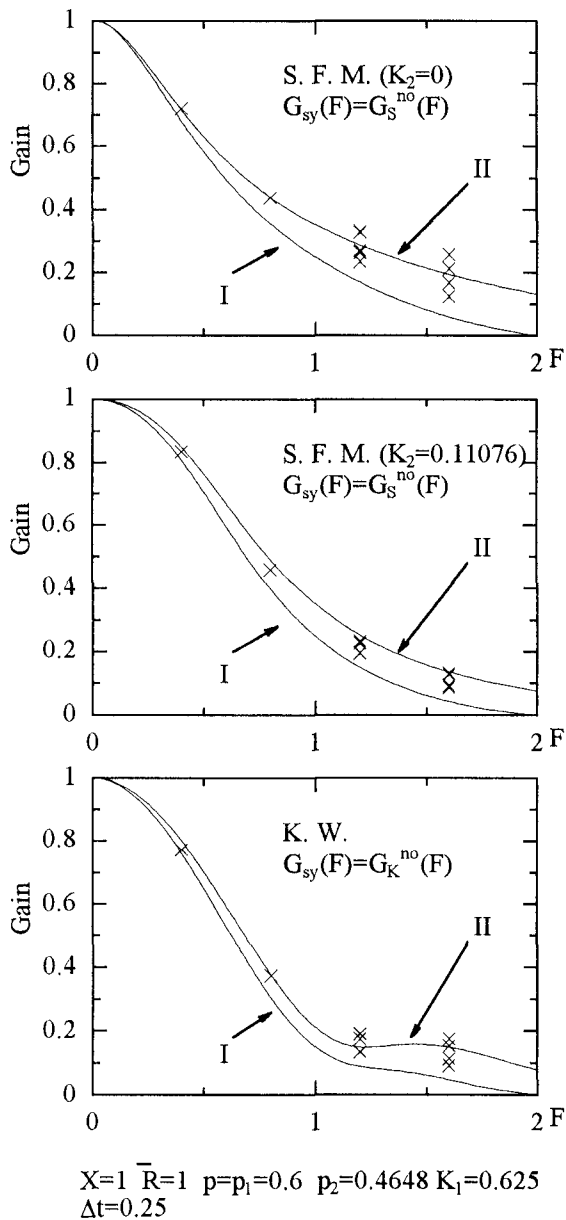


図-12 全システムのゲイン特性 $G_t(F)$

C_n (流量の平均値からのずれで表される。) と、連続的降雨量の振幅 A との比較から得られる、全システムのゲイン特性は、式(11)と同様に複数の値を持つ。

$$G_t(f) = \dots, \frac{C_{n-1}}{A}, \frac{C_n}{A}, \dots \quad (38)$$

図-12から、ほとんどの計算結果は今回提案した全システムのゲイン特性を表す領域内に存在することがわかる。しかし、幾つかの計算結果は領域の外にある。これは、連続的降雨量が、単一周波数しか含まれていないのに対して、離散化によって得られた離散的降雨量が複数の周波数を含むためである

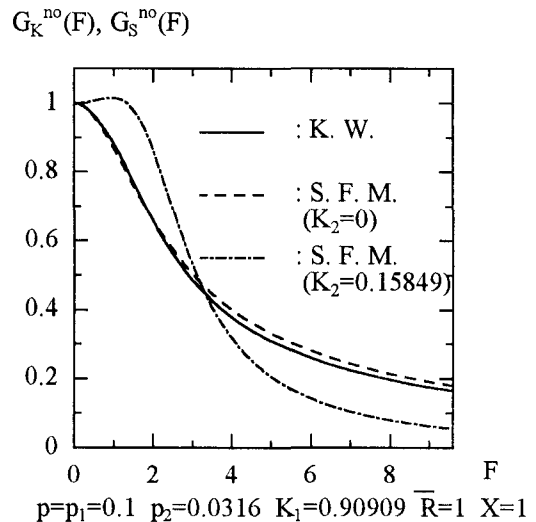


図-13 ゲイン特性の比較 ($p=p_1=0.1$ の場合)

5. まとめ

本論文では、周波数応答法を拡張し、Kinematic Waveモデルのゲイン特性を与える式(25)を提案し、その妥当性をシミュレーション法を用いて検討した。図-13は、 $p=0.1$ の場合について3種類の流出モデルのゲイン特性を比較したものである。図-11と比較すると、パラメータ p の値によってゲイン特性が大きく異なることがわかる。従って、式(32), (33)のどちらの貯留方程式で表わされる流出モデルがKinematic Waveモデルのゲイン特性に近いかは、 p の値によって異なる。更に、離散化過程のゲイン特性の取りうる範囲を提案し、流出量の計算過程における全システムのゲイン特性が、式(37)によって記述できることを示した。

参考文献

- 1) 藤田睦博, 工藤睦信, 中尾隆志, 橋本識秀 (1995); 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究, -降雨量が時間的に独立な場合-, 土木学会論文集, No. 515/II-31, 1-11
- 2) 早川博 (1997); 流域の地形構造を考慮した降雨流出系と流域スケールに関する研究, 学位論文, 198-245
- 3) G. Tanaka (1996); Stochastic Response to Storage Function Runoff Model, A thesis for Master's Degree, 50-55
- 4) 星清, 山岡勲 (1982); 雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第26回水理講演会論文集, 273-278

(1997. 9. 30受付)