水工学論文集, 第42巻, 1998年2月

Philip 式による浸透量の領域平均算定式と集約化規範の導出

DERIVATION OF EQUATIONS OF SPATIALLY-AVERAGED INFILTRATION AND THEIR AGGREGATION CRITERIA BY USING PHILIP'S EQUATIONS

仲江川 敏之[1]・沖　大幹[2]・虫明 功臣[3]
Tosiyuki NAKAEGAWA, Taikan OKI, and Katumi MUSIAKE

[1]正会員　博士(工学) 東京大学生産技術研究所 助手 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1)
[2]正会員　博士(工学) 東京大学生産技術研究所 助教授 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1)
[3]正会員　工学博士 東京大学生産技術研究所 教授 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1)

An effect of the stochastic nature of soil properties related to the water movement on the infiltration was examined and evaluated by using Philip's equations. The aggregation criteria are derived from them for four parameters, hydraulic conductivity, bubbling pressure, saturated water content, and a parameter for soil water retention curve and are expressed with the tolerance error and their moments. The criteria for the cumulative infiltration are more strict than for the infiltration rate if both tolerance errors are the same, and it is enough to check the former only. Comparing the criteria with measured variations of soil parameters, the authros have found that the parameter averaging method is good for bubbling pressure and saturated water content, the second order moment method good for the retention parameter, and the infinite order moment method good hydraulic conductivity.

Key Words : *infiltration, aggregation criteria, Philip's equations, spatially-averaged, heterogeneity, log-normal distribution*

1. はじめに

浸透量を算定する時には土壌の水移動に関するパラメータが必要である. 対象土壌の分類は分かっているが, その土壌自体のパラメータが未知で, 同じ分類の土壌パラメータを使う場合や, 同一サイトからサンプリングされた土壌についてのパラメータ推定結果が空間的にばらついている場合, これらの不確定要素が浸透量の算定に与える影響評価やばらつきの集約化手続きなどは殆んど研究されていない. そこで本研究では, 土壌水分量は一定であるという仮定の下, 土壌の水移動に関するパラメータ分布が浸透量算定に与える影響を Philip 式を基に定量化し, パラメータのばらつきに対する集約化規範を導出する.

2. 土壌パラメータの不均一性とその集約化手法

飽和透水係数, 体積含水率など様々な物理量の不均一性や, その空間分布は土壌物理において重要な研究分野である [1]. 土壌の不均一性と言っても, 様々なレベルでの不均一性が存在し, 大別すると土壌自体が持っている不均一性, 空間的な不均一性, 同一土壌種類内での不均一性などが挙げられる. 水移動に関わるパラメータのうち, 飽和体積含水率, 保水特性曲線に Brooks and Corey 式[2]を当てはめた場合のモデルパラメータλは正規分布に, 飽和透水係数, 空気侵入圧は対数正規分布に従うことが知られているので, 集約化規範の導出に当たっては, これらの分布を仮定する.

飽和透水係数のばらつきが領域平均浸透量に及ぼす影響は非常に大きいことが Monte Carlo 法によって明らかにされており[3], パラメータの不均一性を集約化することが必要とされている. 浸透量の算定には複数の物理量が必要であり, この場合の集約化手法として, 各均一土壌毎にフラックスを算定し, 領域積分する手法と, 一様な物理特性の場で成り立つ算定式に領域平均を適切に代表する物理量を適用する手法とに分けるられる. 前者としては, 土壌パラメータの面積平均を与えるもの (パラメータ平均法), 物理量分布の影響をモーメント項で表す方法 (モーメント法) が, 後者としては, 最大の面積率を持つ土壌種類の地表面パラメータを与えるもの (最大面積率代表法), 集約化された物理量から集約化されたフラックス等を算定できる実効パラメータを求め

るもの (実効パラメータ法) が挙げられる[4].

モーメント法としては領域平均 Green−Ampt モデル[5] と領域平均 Richards 式[5),6] が挙げられるが, いずれの研究も飽和透水係数あるいは土壌水分量と言ったように一つか二つの物理量分布しか扱っておらず, 水移動に関するパラメータのばらつきが各々浸透量算定にどの程度の影響を与えるか定量的には分かっていない. 実効パラメータ法は地下水流れに対して数多くの研究[7]があるが, 不飽和流れについては見当たらない.

このように複数の土壌特性パラメータのばらつきが浸透量に与える影響を検討をしたものや, 集約化した際の誤差を定量的に議論した研究は見受けられない. この研究では, 同一土壌種類内の複数の土壌で対象領域が構成されていた場合について, 解析的に導出が可能なパラメータ平均法とモーメント法による集約化手法を用いて, 上記の二点を議論する.

3. 土壌パラメータの集約化規範の導出

(1) 対数正規分布の統計量とパラメータの独立性

上で述べたように, 幾つかのパラメータは対数正規分布をすることが分かっているので, ここで簡単にその性質を見ておく. 原データ (x_i) が対数正規分布している場合, 原データと対数変換後の平均, モーメントには簡単な関係がある. 原データの平均と n 次モーメントを$\overline{x}$, $\overline{x'^n}$, 変換後の平均, 標準偏差をμ, σとすると,

$$\overline{x} = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$$
$$\overline{x'^n} = e^{n(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,{}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{i}}e^{\frac{1}{2}i(i-1)\sigma^2} \tag{1}$$

と表される. なお, 変換後の分布は $N(\mu,\sigma^2)$ である. モーメント法で領域平均を表すことを考える場合, その前提として高次項は低次項より十分に小さいという条件がある. しかし対数正規分布では $|\overline{x'^n}|$ は n の増加関数であり, モーメント法で表された領域平均は良い近似を表しているとは言えない. 従って, 対数正規分布の場合は直接積分して領域平均を求める必要がある.

前節で述べたように, 水移動に関わる 4 つのパラメータのうち, 飽和透水係数と保水特性パラメータλは正規分布に従うのでモーメント法で領域平均を近似することができるが, 飽和透水係数と空気侵入圧は対数正規分布に従うので積分して領域平均を求めなければならない.

土壌の水移動に関する特性値は土壌の空隙分布から理論的に導く研究[2]が行なわれているように, 土壌特性パラメータは完全に独立なパラメータとは考えられない. パラメータ間の相関についての研究[8]も行なわれているが, ここではパラメータ間の独立性を仮定する. 飽和透水係数 K_s, 空気侵入圧$\psi_b(>0)$, 保水特性パラメータλが互いに独立であるとすると,

$$F(K_s,\psi_b,\lambda) = f_{K_s}(K_s)f_{\psi_b}(\psi_b)f_\lambda(\lambda) \tag{2}$$

と表すことができる. ここで Fは K_s,ψ_b,λの同時確率密度関数, $f_{K_s}, f_{\psi_b}, f_\lambda$はそれぞれ, 飽和透水係数, 空気侵入圧, 保水特性パラメータλの確率密度関数である. 以下ではこの独立性を仮定する.

(2) Philip 式

Richards 式は拡散型の偏微分方程式であるが, 不飽和透水係数がサクションの関数となっているため容易には解くことができない. これまでに数多くの解析解を求める研究が行なわれてきたが, その先駆的な研究は Philip[9]によって行なわれた. 鉛直一次元 Richards 式を, 鉛直一定土壌水分量の初期条件, 地表面土壌は飽和, 土壌中十分に深い所では初期土壌水分量の境界条件で, 土壌水分量空間で解くことにより, Philip 式は導かれている. 一般に Philip 式は無限級数で表されるが, 近似解として第 3 項までが良く用いられる.

$$f_i(t) = \frac{1}{2}S_it^{-1/2} + A_i \tag{3}$$
$$I(t) = S_it^{1/2} + A_it \tag{4}$$

ここで f_iは浸透速度, Iは浸透量, A_iと S_iはそれぞれ土壌パラメータと初期土壌水分量によって定まるパラメータで, 後者は特に sorptivity と呼ばれている. この 2 つのパラメータをどのように与えるかによって, Philip 式の精度が異なってくる. Eagleson[10]は簡便に

$$A_i = \frac{1}{2}K_s(1+s_i{}^c) - W \tag{5}$$

$$S_i = 2(1-s_i)\left(\frac{5\theta_sK_s\psi_b\phi_i(d,s_i)}{3m\pi}\right)^{1/2}$$
$$= \left\{2(1-s_i)\left(\frac{5\theta_sK_s\psi_b}{3\pi}\right)^{1/2}\right\}\left(\frac{\phi_i(d,s_i)}{\lambda}\right)^{1/2} \tag{6}$$

と表した. ここで Wは毛管力フラックスの補正項, c は不飽和透水係数に Brooks and Corey 式を当てはめた時のパラメータで, 空隙分布から $c = 2/\lambda + 3$ という関係が導かれ[2], $d = (c+1)/2$ である. これら土壌特性を表す関係式をまとめたものを次に示す.

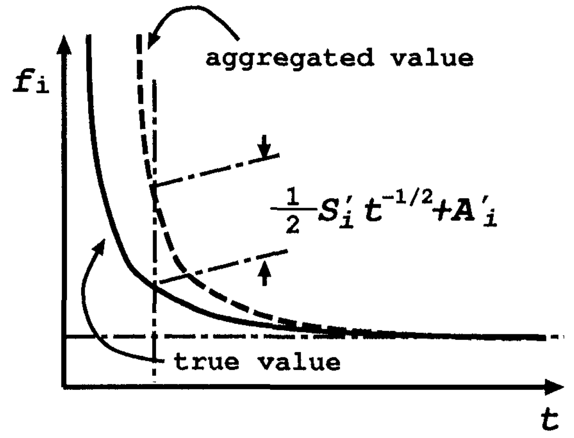
$$\psi = \psi_b\left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^{-1/\lambda} \tag{7}$$

$$K = K_s\left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^{2/\lambda+3} \tag{8}$$

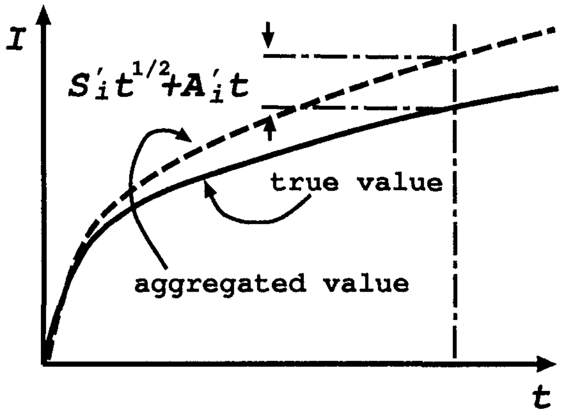
ここでθは体積含水率, ψは土壌吸引圧, Kは不飽和透水係数である. また式 (6) 中ϕ_iは無次元化された実効拡散係数で, 実効拡散係数$\overline{D}$を用いて,

$$\phi_i = \frac{3\lambda\theta_s\overline{D}}{5K_s\psi_b} \tag{9}$$

と定義される. Eagleson[10]の求めたϕ_iは精度の良い結果を得ることができるが, 級数で表されており使い易い



図–1 浸透速度に対するパラメータ分布の影響.



図–2 浸透量に対するパラメータ分布の影響.

とは言い難い. Entekhabi[11]はより簡単な表現で

$$\phi_i(d, s_i) = \frac{3\pi}{10(1-s_i)^2} \times \left\{ \frac{\lambda}{1+4\lambda} + \frac{\lambda^2 s_i^{(1/\lambda+4)}}{(1+4\lambda)(1+3\lambda)} - \frac{\lambda s_i}{1+3\lambda} \right\} \tag{10}$$

と表している. この式を式 (6) に代入すると,

$$S_i = \left\{ 2(1-s_i)\left(\frac{5\theta_s K_s \psi_b}{3\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{3\pi}{10(1-s_i)^2}\right)^{1/2} \right\} \times \left(\frac{1}{1+4\lambda} + \frac{\lambda s_i^{(1/\lambda+4)}}{(1+4\lambda)(1+3\lambda)} - \frac{s_i}{1+3\lambda} \right)^{1/2} \tag{11}$$

となる. ここで上式の中λの含まれている部分を P, 含まれていない部分を Q とすると,

$$P = \left(\frac{1}{1+4\lambda} + \frac{\lambda s_i^{(1/\lambda+4)}}{(1+4\lambda)(1+3\lambda)} - \frac{s_i}{1+3\lambda} \right)^{1/2} \tag{12}$$

$$Q = \sqrt{2\theta_s K_s \psi_b} \tag{13}$$

と表される. これらを用いて, 改めて Philip 式を書き直すと, 次のようになる.

$$f_i(t) = \frac{1}{2}K_s(1+s_i{}^c) + PQt^{-1/2} \tag{14}$$

$$I(t) = \frac{1}{2}K_s(1+s_i{}^c)t + PQt^{1/2} \tag{15}$$

ここで簡単のために $W = 0$ と置いている. 以下ではこの式を基に議論を行なう.

(3) 浸透速度と浸透量の集約化規範

ここでは Philip 式の浸透速度, 式 (14) と浸透量, 式 (15) を基にその式形から, 集約化規範について考える. 両 Philip 式で土壌パラメータの関数は A_i, S_iの部分である. 今, パラメータが分布しているために真値と集約化手法によって算定される領域平均値に違いが生じるとすると, A_i, S_iそれぞれの真値に対する差を A_i', S_i'として, 式 (14) と式 (15) の集約化手法による領域平均は,

$$\overline{f_i(t)}_A = \frac{1}{2}S_i t^{-1/2} + A_i + \left(\frac{1}{2}S_i' t^{-1/2} + A_i'\right) \tag{16}$$

$$\overline{I(t)}_A = S_i t^{1/2} + A_i t + \left(S_i' t^{1/2} + A_i' t\right) \tag{17}$$

と表すことができる. ここで$\overline{f_i(t)}_A$と$\overline{I(t)}_A$は集約化手法によって算定された浸透速度と浸透量である. 浸透速度については $S_i' t^{-1/2}/2$ が時間に対する減少項であることから, A_i'のバイアスは残るものの, 分布を考慮しなくとも, 領域平均値に漸近することが分かる. つまり, 浸透開始から十分な時間が経過すれば, 分布の影響は殆んど無くなると言って良い (図 1). これは浸透速度がやがては一定の終期浸透能に収束することによる. 一方, 浸透量については式 (17) の右辺第 3, 第 4 項が共に時間に対する増加項であることから, 分布を考慮する, しないによる差は時間とともに増大することが分かる. これは浸透量が時間経過と共に分布を考慮する場合としない場合との誤差を蓄積していってしまうためである.

以上から, 浸透速度は時間経過が大きいほど, 一方浸透量は時間経過が短いほど, 集約化がし易いと言う全く逆の集約化規範が導かれることになる. これは両方を満たすにはある有限の経過時間の間だけであるということを意味している[12].

今までの議論は絶対量での評価であったが, 飽和透水係数は土壌が異なると, オーダーも大きく変わる. 従って, あらゆる土壌に一定の集約化誤差を許容するのは不合理であり, 相対的な誤差を与える方が好ましい. また相対的な誤差を規範とすると, 浸透速度と浸透量の集約化規範が統一できることも分かっているので[12], 以下では相対誤差に対する集約化規範を導く.

(4) 飽和透水係数に対する集約化規範

2.で述べたように, 飽和透水係数のばらつきは対数正規分布をしていると考えられる. 式 (15) を対数正規分布しているという仮定の下, 飽和透水係数について積分すると,

$$\overline{I}_\infty = \int_0^\infty \left(\frac{K_s}{2}(1+s_i{}^c)t + \sqrt{2\theta_s K_s \psi_b} P\sqrt{t} \right) \times f_{K_s}(K_s) dK_s$$

$$= \frac{1}{2}(1+s_i{}^c)te^{\mu_{K_s}+\frac{1}{2}\sigma_{K_s}{}^2} + \sqrt{2\theta_s\psi_b}P\sqrt{t}e^{\frac{1}{2}\mu_{K_s}+\frac{1}{8}\sigma_{K_s}{}^2} \quad (18)$$

と表される．ここでμ_{K_s}, σ_{K_s}はそれぞれ対数変換後のK_sの平均値と標準偏差である．これは上で述べた集約化規範の中，無限級数で近似したモーメント法に相当し，これは領域平均の真値 ($\overline{I}_\infty$) である．次に式 (15) を積分せずに，K_sの領域平均値$\overline{K_s}$を用いた場合，すなわちパラメータ平均法による浸透量$\overline{I}_p$は

$$\overline{I}_p = \frac{1}{2}(1+s_i{}^c)e^{\mu_{K_s}+\frac{1}{2}\sigma_{K_s}{}^2}t + \sqrt{2\theta_s\psi_b}Pe^{\frac{1}{2}\mu_{K_s}+\frac{1}{4}\sigma_{K_s}{}^2}\sqrt{t} \quad (19)$$

となる．式 (18) は真値と考えられるので，式 (19) を用いた場合の誤差を，相対誤差で評価することを考え，許容集約化誤差をδI_rとすると，

$$\frac{\overline{I}_p - \overline{I}_\infty}{\overline{I}_\infty} = \frac{P\sqrt{2\theta_s\psi_b}\left(e^{\frac{1}{8}\sigma_{K_s}{}^2}-1\right)\sqrt{\overline{K_s}}}{\frac{1}{2}(1+s_i{}^c)e^{\frac{1}{2}\mu_{K_s}+\frac{3}{8}\sigma_{K_s}{}^2}\sqrt{t}+\sqrt{2\theta_s K_s\psi_b}P}$$
$$= \frac{2P\sqrt{2\theta_s\psi_b}\left\{(1+\mathrm{CV}_{K_s}{}^2)^{\frac{1}{8}}-1\right\}}{(1+s_i{}^c)\sqrt{\overline{K_s}}(1+\mathrm{CV}_{K_s}{}^2)^{\frac{1}{8}}\sqrt{t}+2\sqrt{2\theta_s\psi_b}P} < \delta I_r \quad (20)$$

となる．最後の変形では対数変換前後の平均と分散の関係を用いている．この式から，パラメータ平均法では常に過大評価されることがわかる．これを変形してゆくと，

$$\sqrt{\frac{\overline{K_s}}{\theta_s\psi_b}} > \frac{2\sqrt{2}P\left\{(1+\mathrm{CV}_{K_s}{}^2)^{\frac{1}{8}}-(1+\delta I_r)\right\}}{(1+s_i{}^c)(1+\mathrm{CV}_{K_s}{}^2)^{\frac{1}{8}}\delta I_r\sqrt{t}} \quad (21)$$

と表される．以上がパラメータ平均法による浸透量に対する集約化規範である．ここで左辺は土壌パラメータだけによって定まる量であり，集約化の難易を表すパラメータであるので，これを浸透集約化スケールと呼ぶことにする．飽和透水係数に関しては，モーメント法による領域平均算定式 (19) が真値であることから，集約化誤差は常に 0 であり，無条件で集約化可能である．

次に浸透速度に対する集約化を考える．式 (15) は式 (14) の右辺に$\sqrt{t}$を掛けて，更に第 1 項の係数が 1/2 になっただけである．上記の導出と比較すると，浸透速度の相対誤差は分子は式 (20) と全く同じで，分母第 1 項が 1/2 になるだけである．よって，パラメータ平均法と無限次のモーメント法による領域平均浸透速度を$\overline{f}_{ip}$, $\overline{f}_{i\infty}$，浸透速度の許容算定誤差を$\delta f_{i,r}$とすると，相対誤差を許容誤差以下にするための条件は，

$$\frac{\overline{f}_{ip}-\overline{f}_{i\infty}}{\overline{f}_{i\infty}} = \frac{2P\sqrt{2\theta_s\psi_b}\left\{(1+\mathrm{CV}_{K_s}{}^2)^{\frac{1}{8}}-1\right\}}{\left(\begin{array}{l}(1+s_i{}^c)\sqrt{\overline{K_s}}(1+\mathrm{CV}_{K_s}{}^2)^{\frac{1}{8}}\sqrt{t}\\ +2\sqrt{2\theta_s\psi_b}P\end{array}\right)} < \delta f_{i,r} \quad (22)$$

と表される．これを変形すれば，式 (21) と同形の，浸透速度に対する集約化規範が導かれる．

$$\sqrt{\frac{\overline{K_s}}{\theta_s\psi_b}} > \frac{\sqrt{2}P\left\{(1+\mathrm{CV}_{K_s}{}^2)^{\frac{1}{8}}-(1+\delta f_{i,r})\right\}}{(1+s_i{}^c)(1+\mathrm{CV}_{K_s}{}^2)^{\frac{1}{8}}\delta f_{i,r}\sqrt{t}} \quad (23)$$

ここで，$\delta I_r = \delta f_{i,r}$，式 (21) の右辺は式 (23) の 2 倍であり，常に浸透速度よりも浸透量に対する集約化規範，即ち式 (21) が厳しい条件となっている．つまり，浸透量の集約化規範を満たせば浸透速度の集約化規範は同時に満たす．このことはこれから述べる他のパラメータについても同様である．また水収支を考える場合，浸透量の方が重要なので，以下では浸透量の集約化規範のみについて検討を加えてゆく．

(5) 空気侵入圧に対する集約化規範

空気侵入圧についても飽和透水係数と同様に対数正規分布に従うことは既に述べた通りである．式 (15) を見ると，K_sは右辺の両項に現れているが，第 1 項はK_sについて線形なので分布の影響は無い．つまり影響が現れるのは第 2 項のみである．すると，K_sの規範について行なったことは，そのままψ_bにもあてはまる．従って，式 (21) の変動係数をψ_bのものに変更するだけで良く，パラメータ平均法による浸透量の集約化規範は，

$$\sqrt{\frac{K_s}{\theta_s\overline{\psi_b}}} > \frac{2\sqrt{2}P\left\{(1+\mathrm{CV}_{\psi_b}{}^2)^{\frac{1}{8}}-1-\delta I_r\right\}}{(1+s_i{}^c)(1+\mathrm{CV}_{\psi_b}{}^2)^{\frac{1}{8}}\delta I_r\sqrt{t}} \quad (24)$$

となる．モーメント法についても，領域平均算定式は式 (18) で変動係数をψ_bのものに変えるだけで良く，集約化規範は無条件である．

(6) 飽和体積含水率に対する集約化規範

2.で述べたように，飽和体積含水率は正規分布に近い分布をすることが知られている．このような場合は摂動法を用いることができるので，飽和体積含水率が分布している影響をモーメントを用いて表すことを考える．式 (15) を領域積分して，モーメント法による領域平均値$\overline{I}_m$を求めると，

$$\overline{I}_m = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}K_s(1+s_i{}^c)t+\sqrt{2\theta_s K_s\psi_b}P\sqrt{t}\right)f_{\theta_s}(\theta_s)d\theta_s$$
$$= \frac{1}{2}K_s(1+s_i{}^c)t+\sqrt{2K_s\psi_b}P\sqrt{t}\overline{\sqrt{\theta_s}} \quad (25)$$

と表される．次に式 (15) を積分せずに，θ_sの領域平均値$\overline{\theta_s}$を用いた場合，すなわちパラメータ平均法による浸透量$\overline{I}_p$は

$$\overline{I}_p = \frac{1}{2}K_s(1+s_i{}^c)t+\sqrt{2\psi_b}P\sqrt{t}\sqrt{\overline{\theta_s}} \quad (26)$$

となる．式(25)は真値と考えられるので，式(26)を用いた場合の相対誤差は

$$\frac{\overline{I}_p-\overline{I}_m}{\overline{I}_m}=\frac{P\sqrt{2K_s\psi_b}\left(\sqrt{\overline{\theta_s}}-\overline{\sqrt{\theta_s}}\sqrt{t}\right)}{\frac{1}{2}K_s(1+s_i{}^c)t+\sqrt{2K_s\psi_b}P\overline{\sqrt{\theta_s}}\sqrt{t}}$$
$$=\frac{2P\left(\frac{\sqrt{\overline{\theta_s}}}{\overline{\sqrt{\theta_s}}}-1\right)}{\frac{K_s}{\psi_b}\frac{1}{\overline{\sqrt{\theta_s}}}(1+s_i{}^c)\sqrt{t}+2P} \tag{27}$$

と表される．ここで$\sqrt{\theta_s}$をθ_sの平均値周りに Taylor 展開し，領域平均を取ると，

$$\overline{\sqrt{\theta_s}}\approx\sqrt{\overline{\theta_s}}\left\{1-\frac{1}{8}\left(\frac{\theta_s{}'}{\overline{\theta_s}}\right)^2\right\}\approx\sqrt{\overline{\theta_s}}\left(1-\frac{1}{8}\mathrm{CV}_{\theta_s}{}^2\right) \tag{28}$$

となる．ここで$\overline{\theta_s}$は飽和体積含水率の平均値，$\theta_s{}'$は偏差で，$\theta_s=\overline{\theta_s}+\theta_s{}'$，$\mathrm{CV}_{\theta_s}$は飽和体積含水率の変動係数である．これを式(27)に代入すると，

$$\frac{2P\left(\frac{8}{8-\mathrm{CV}_{\theta_s}{}^2}-1\right)}{\frac{K_s}{\psi_b}\frac{1}{\overline{\sqrt{\theta_s}}}(1+s_i{}^c)\sqrt{t}+2P}$$
$$=\frac{2P\mathrm{CV}_{\theta_s}{}^2}{\left(\frac{K_s}{\psi_b}\frac{1}{\overline{\sqrt{\theta_s}}}(1+s_i{}^c)\sqrt{t}+2P\right)\left(8-\mathrm{CV}_{\theta_s}{}^2\right)}$$
$$<\delta I_r \tag{29}$$

と表される．これを整理すると，集約化規範の式が次のように導かれる．

$$\sqrt{\frac{K_s}{\psi_b\theta_s}}>\frac{2P\left\{\mathrm{CV}_{\theta_s}{}^2-\left(8-\mathrm{CV}_{\theta_s}{}^2\right)\delta I\right\}}{(1+s_i{}^c)\left(8-\mathrm{CV}_{\theta_s}{}^2\right)\sqrt{t}\delta I} \tag{30}$$

(7)　λに対する集約化規範

飽和体積含水率の時と同じようにλも正規分布すると仮定する．Philip 式のS_i，A_iはともにλを変数として含んでいるので，この2つを平均値周りに Taylor 展開することにより平均値$\overline{\lambda}$と偏差λ'で，Philip 式は次のように表すことができる．

$$A_i\approx\frac{1}{2}K_s\left\{1+\left(c_0+c_1\lambda'+c_2\lambda'^2+c_3\lambda'^3\right)\right\} \tag{31}$$
$$S_i\approx Q\left(p_0+p_1\lambda'+p_2\lambda'^2+p_3\lambda'^3\right) \tag{32}$$

ここで，p_mとc_mはそれぞれS_i，A_iを Taylor 展開した際の m 次の係数であり，具体的な式は別掲する[13]．以上から3次のモーメント項までで近似された Philip 式は

$$\begin{aligned}I(t)=&\frac{1}{2}K_s\left\{1+\left(c_0+c_1\lambda'+c_2\lambda'^2+c_3\lambda'^3\right)\right\}t\\&+\left(p_0+p_1\lambda'+p_2\lambda'^2+p_3\lambda'^3\right)Q\sqrt{t}\\=&\frac{1}{2}K_s(1+c_0)t+Qp_0\sqrt{t}+\left(\frac{1}{2}K_sc_1t+Qp_1\sqrt{t}\right)\lambda'\\&+\left(\frac{1}{2}K_sc_2t+Qp_2\sqrt{t}\right)\lambda'^2\\&+\left(\frac{1}{2}K_sc_3t+Qp_3\sqrt{t}\right)\lambda'^3\end{aligned} \tag{33}$$

と表すことができる．3次のモーメント法による領域平均値$\overline{I(t)}_3$は上式を領域積分することによって得ることができて，次のように表される．

$$\begin{aligned}\overline{I(t)}_3=&\frac{1}{2}K_s(1+c_0)t+Qp_0\sqrt{t}\\&+\left(\frac{1}{2}K_sc_2t+Qp_2\sqrt{t}\right)\overline{\lambda'^2}\\&+\left(\frac{1}{2}K_sc_3t+Qp_3\sqrt{t}\right)\overline{\lambda'^3}\end{aligned} \tag{34}$$

この式でパラメータ平均法($\overline{I}_p$)は右辺第2項までを，2次のモーメント法($\overline{I}_2$)は右辺第4項までを指す．

パラメータ平均法で十分に良い精度の近似ができる条件は，2次のモーメント法による近似を真値と考えて，それに対する相対誤差が許容算定誤差δI_rよりも小さければ良く，式で表せば，

$$\frac{\overline{I}_p-\overline{I}_2}{\overline{I}_2}=\frac{\left(\frac{1}{2}K_sc_2t+Qp_2\sqrt{t}\right)\overline{\lambda'^2}}{\left(\begin{array}{l}\frac{1}{2}K_s(1+c_0)t+Qp_0\sqrt{t}\\+\left(\frac{1}{2}K_sc_2t+Qp_2\sqrt{t}\right)\overline{\lambda'^2}\end{array}\right)}<\delta I_r \tag{35}$$

となる．この式を変形すると，集約化規範は浸透集約化スケールに対する不等式として，

$$\sqrt{\frac{K_s}{\theta_s\psi_b}}>\frac{2\sqrt{2}\left\{p_2(1-\delta I_r)\overline{\lambda'^2}-p_0\delta I_r\right\}}{\{(1+c_0)\delta I_r-c_2(1-\delta I_r)\}\overline{\lambda'^2}\sqrt{t}} \tag{36}$$

と表される．

次に2次のモーメント法に対する規範を導出する．この方法で良い精度の近似ができる条件は，3次のモーメント法による近似を真値と考えて，それに対する相対誤差がある許容算定誤差δI_rよりも小さければ良い．

$$\frac{\overline{I}_2-\overline{I}_3}{\overline{I}_3}=\frac{\left(\frac{1}{2}K_sc_3t+Qp_3\sqrt{t}\right)\overline{\lambda'^3}}{\left(\begin{array}{l}\frac{1}{2}K_s(1+c_0)t+Qp_0\sqrt{t}\\+\left(\frac{1}{2}K_sc_2t+Qp_2\sqrt{t}\right)\overline{\lambda'^2}\\+\left(\frac{1}{2}K_sc_3t+Qp_3\sqrt{t}\right)\overline{\lambda'^3}\end{array}\right)}<\delta I_r \tag{37}$$

この式を変形すると，2次のモーメント法による集約化規範が浸透集約化スケールに対する不等式として，次のように得られる．

$$\sqrt{\frac{K_s}{\theta_s\psi_b}}>\frac{2\sqrt{2}\left\{p_3(1-\delta I_r)\overline{\lambda'^3}-\left(p_0+p_2\overline{\lambda'^2}\right)\delta I_r\right\}}{\left[\{(1+c_0)+c_2\}\delta I_r-c_3(1-\delta I_r)\overline{\lambda'^3}\right]\sqrt{t}} \tag{38}$$

但し、上記の式(36)と式(38)はある条件の時の規範であることを指摘しておく。

表-1 パラメータ平均法で土壌パラメータに依らず集約化可能な変動係数の最大値. Max. CV は Carsel and Parrish[8] から引用したもので, 同一土壌分類内での最大の変動係数.

δI_r	K_s	ψ_b	θ_s
0.05	0.69		0.62
0.10	1.07		0.85
0.20	1.82		1.15
Max. CV	4.53	1.63	0.24

(8) 観測・実験データの適用

λを除いて, 以上導出した集約化規範の式の右辺はt, δI_r, λの関数である. 左辺は常に正であるから, 右辺が負であれば土壌種類によらず, 集約化ができることになり, 変動係数の最大値はδI_rだけによって定まる (表 1). 同一土壌分類内の各パラメータのばらつきの最大値は表1に掲げた通りであり[8], パラメータ平均法により, 飽和透水係数は集約化できないが, 空気侵入圧は 0.20 の誤差を許容すれば, また飽和体積含水率は常に誤差 0.05 以下で, 集約化できることが分かる. また無限次のモーメント法では集約化規範は無条件であることから, モーメント法を用いると飽和透水係数と空気侵入圧については, 分散さえ分かっていれば真値を算定することができると言える.

4. まとめ

この研究では不飽和浸透に与える土壌特性パラメータのばらつきについて, パラメータの集約化によって許容されるばらつきの大きさを与える規範を四つのパラメータについて検討した. そして新たに提示した浸透集約化スケールを用いて集約化規範を導出した.

実際に測定された同一土壌における土壌パラメータのばらつきと集約化規範を比較したところ, 集約化誤差の大小はあるものの, パラメータ平均法, 無限次のモーメント法を用いれば集約化できることが分かった.

導出した規範はいずれも浸透集約化スケールに関する不等式として表されているが, 変動係数に対する不等式としても表すことができる. ここでは扱わなかった複数の土壌から構成される領域での集約化ではクラスター分析を利用でき, 変動係数に対する不等式は非類似度として用いることができる[4].

今後はλのばらつきに関する集約化や土壌毎の集約化の難易と, この方法の空間的に適用可能な範囲を明らかにすることが検討課題である.

謝辞: この研究は文部省科学研究費奨励研究 (A)「複数の土地被覆からなる領域の地表面熱収支の集約化に関する研究」(東京大学生産技術研究所, 仲江川敏之) ならびに日本学術振興会 未来開拓研究推進事業「環境負荷の影響評価と軽減」(代表:東京大学生産技術研究所, 虫明功臣) の成果の一部である. ここに記して謝意を表します.

参考文献

1) Warrick, A. W. and Nielsen, D. R.: Spatial variability of soil physical properties. In D. Hillel, editor, *Aplications of Soil Physics*, pp. 319–324. Academic Press, New York, 1980.
2) Brooks, R. H. and Corey, A. T.: Properties of porous media affecting fluid flow. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, Vol. 92(IR2), pp. 61–88, 1966.
3) Hopmans, J. W., Schukking, H., and Torfs, P. J. J. F.: Two-dimensional steady sate unsaturated water flow in heterogenous soils with autocorrelated soil hydraulic properties. *Wat. Resour. Resear.* , Vol. 24, No. 12, pp. 2005–2017, 1988.
4) 仲江川敏之, 沖大幹, 虫明功臣. 線形化モデルによる地表面熱フラックスの集約化 I:領域平均地表面フラックス算定式と集約化規範の導出. 水文・水資源学会誌, 投稿中, 1998.
5) Chen, Z., Govndaraju, R. S., and Kavvas, M. L.: Spatial averaging of unsaturated flow equations under infiltration conditions over areally heterogeneous fields 1. development of models. *Wat. Resour. Resear.* , Vol. 30, No. 2, pp. 523–534, 1994.
6) Nakaegawa, T., Oki, T., and Musiake, K.: Development of regionally averaged richard's equation and its application to the infiltration. In *Proc. of the Int. Conf. on Water Resour. & Environ. Res.*, Vol. I, pp. 285–292. Water Resource Research Center, Kyoto University, Oct. 29–31 1996.
7) Dykaar, B. B. and Kitanids, P. K.: Transmissivity of a heterogeneous formation. *Wat. Resour. Resear.* , Vol. 29, No. 4, pp. 985–1001, 1993.
8) Carsel, R. F. and Parrish, R. S.: Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics. *Wat. Resour. Resear.* , Vol. 24, No. 5, pp. 755–769, 1988.
9) Philip, J. R.: The theorey of infiltration. *Soil Science*, Vol. 83, pp. 345–357:435–448, 1957.
10) Eagleson, P. S.: Climate, soil and vegetation 3: Simplified model of soil moisture movement in the liquid phase. *Wat. Resour. Resear.* , Vol. 14, No. 5, pp. 722–729, 1978.
11) Bras, Rafael L.: *Hydrology : An introduction to hydrologic science*, chapter Flow in Unsaturated Porus Media and Infiltration, p. 360. Addison-Wesley Publishing, 1990.
12) 仲江川敏之, 沖大幹, 虫明功臣: Philip 式に基づく浸透フラックスの集約化に関する基礎的 検討. 土木学会第 52 回年次学術講演会講演概要集, 第 52 II(A) 巻, pp. 362–363, 中央大学 八王子キャンパス, 1997. 土木学会.
13) 仲江川敏之: Philip 式による浸透量の領域平均算定式と集約化規範の導出 –Philip 式の Taylor 展開–, http://hydro.iis.u-tokyo.ac.jp/ tosi/Index.html ,1998.

(1997. 9. 30 受付)