

グリッドをベースとした 河道網系 dynamic wave モデルの構築

Development of Grid-based Dynamic Wave Model

市川 温¹・村上 将道²・立川 康人³・椎葉 充晴⁴

¹正会員 工修 京都大学 防災研究所 助手 (〒 611 京都府宇治市五ヶ庄)

²学生会員 京都大学大学院 工学研究科 修士課程 (〒 606 京都市左京区吉田本町)

³正会員 工博 京都大学 防災研究所 助教授 (〒 611 京都府宇治市五ヶ庄)

⁴正会員 工博 京都大学大学院 工学研究科 教授 (〒 606 京都市左京区吉田本町)

The methodology has been proposed in which (1) a river basin is divided into a number of grid boxes; (2) runoff processes in each grid box are modeled; (3) these grid box models are connected in order to build the total runoff system model of the river basin. This paper reports the grid-based dynamic wave model and its application. If the dynamic wave model is used to calculate a large scale river network flow, it costs too much calculation time and computer memory. To save them, the technique is proposed by which the simultaneous equations with unknowns of whole sections are transformed into ones with unknowns of only boundary sections. Finally the model is applied to simulations of river network flow.

Key Words : grid, dynamic wave model, Preissmann scheme, dimension of simultaneous equations

1. はじめに

筆者らは、河川流域を適当な大きさのグリッドで区切り、各グリッドボックスを単位流域としてモデル化し、これらを多数接続することによって河川流域全体系モデルを構成する手法を提案してきた^{1),2)}。本稿は、グリッドをベースとした河道網系 dynamic wave モデルについて報告する。

2. グリッドをベースとした河川流域のモデル化

河川流域を適当な大きさのグリッドで区切り、各グリッドボックスを単位流域としてモデル化し、それらを結合して河川流域全体系モデルを構成するというアイデアは、水文モデルと気象モデルとの結合をどのようにして行なうかという議論のなかで生まれた。一般に、気象モデルは大気三次元空間に格子をかけ、各格子点での状態量を物理方程式によって計算する形式になっていることが多い。そこで水文モデルの側でも、グリッドボックスを単位としてモデルを構成しておけば、両者の結合が比較的スムーズに行なえると考えたからである。

図 1 は、筆者らが提案する手法の概念図である。グリッドの大きさが平均的な斜面の長さをこえるように

なると、グリッドボックス間の水の輸送のほとんどは河道網を通して行なわれると考えられる。したがって、各グリッドボックス内部に降った水を河道網へ運ぶ機構と、グリッドボックスからグリッドボックスへ水を運ぶ河道とを分けてモデル化するのが適切であると考えられる。

グリッドボックスを単位として流域をモデル化すること自体は、気象モデルとの結合を考えるときのみ有効というわけではなく、水文モデルを単体で構成する場合にも非常に効果的な手法といえる。たとえば、国土数値情報のようなデジタルデータの利用を考えると、こうしたデータの多くはグリッドボックス単位で整備されているので、モデルのほうもグリッドをベースにしておく都合がよい。あるいは、ある流域の水収支を考える場合、グリッドで流域を分割することによって、各グリッドボックスごとの水収支を把握でき、また地形特性や土地利用状況といった因子の空間的分布が水収支に与える影響を評価できる可能性がある。他にも、降水量の空間的な分布を考慮に入れたモデル化がしやすくなる、対象河道網内の流量、水位のおおまかな分布がとらえられるので、カルマンフィルタ理論を利用した分布型モデルによる実時間洪水予測への道がひらける、といった利点も考えられる。

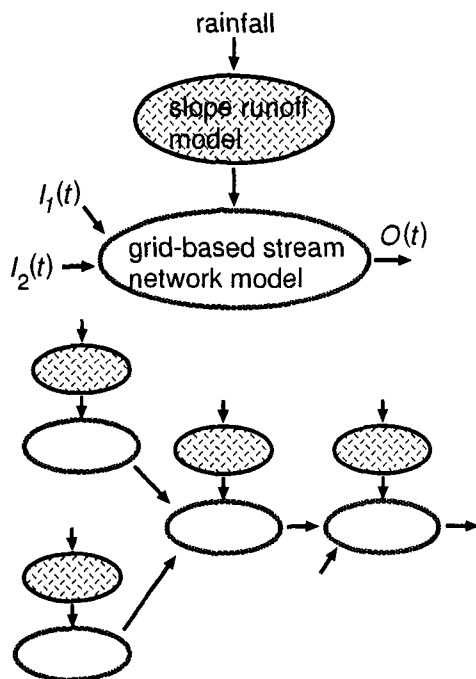
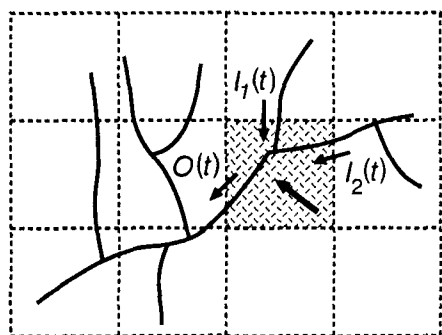


図-1 対象流域をグリッド単位でモデル化

3. グリッドをベースとした河道網系 dynamic wave モデル

(1) なぜ dynamic wave モデルなのか

河道網流れの計算を行なう場合、kinematic wave モデルを用いることが多い。kinematic wave モデルは取り扱いが簡便で、比較的大きな河道網に対して適用しても、基本的には河道網の上流側から下流側に向けて順次計算を進めるだけなので、計算にさほど時間がかからないという利点を有する。

しかし、たとえば、大気気象系と陸面水文系との相互作用を考える場合、その対象とするフィールドは、大陸河川流域のようなかなり低平で広大な領域になると思われる。そういったフィールドに広がる河道網の流れを計算することを考えると、やはり kinematic wave モデルでは不十分で、下流側の水理条件や水面勾配の影響を考慮できる dynamic wave モデルを用いて計算するのが適当であろう。

ただ、言うまでもないが、本稿は kinematic wave モデルを否定するものではない。kinematic wave モデル、dynamic wave モデルそれぞれに利点・欠点がある。両者あるいは他のモデルを個々の場に応じて適切に使い分け、それらを自由に組み合わせて流出全体系のモデルを構成することが重要であると考ええる。

(2) 計算法

a) 概説

dynamic wave モデルを数値的に解く手法としては、特性曲線法、有限差分法、有限要素法などがある。なかでも有限差分法の一つである Preissmann スキームは、定式化が容易で、かつ陰解法であるために計算を安定に行ないやすいという利点がある。本研究でも、Preissmann スキームによって dynamic wave モデルを解くことを考える。

一次元非定常流の基礎方程式を Preissmann スキームで差分化して、ある程度の大きさを持つ実際の河道網に適用すると、未知数の数が多いために連立方程式の次元が大きくなってしまい、計算を行なうのにかなりの時間を要するという問題がある。近年の計算機の著しい発達によって、一昔前では考えられないほど高速に計算ができるようになったとはいえるものの、たとえば、dynamic wave モデルをリアルタイム洪水予測に用いるといったことを考えると、まだまだ不十分と思われる。

こうした問題に対して、神田ら³⁾は、連立一次方程式の係数行列をバンドマトリックスに変形することで、記憶容量を節約し、計算時間を短縮するという手法を提案している。また、Fread⁴⁾は、分合流を本川と支川からの流出入としてモデル化し、本川の流れの計算と支川の流れの計算を互いの状態量のつじつまが合うまで交互に繰り返すという手法を提案している。

本研究ではこの問題に対して、Cunge⁵⁾が提案した手法を参考に、以下に述べる計算法を構成した。

b) Preissmann スキームによる基礎式の差分化⁶⁾

一次元非定常流の基礎方程式は次のようである。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(I_f - i) = 0 \quad (2)$$

ただし、 A は通水断面積、 Q は流量、 q は単位長さあたりの側方流入量、 g は重力加速度、 h は水深、 I_f は摩擦勾配、 i は河床勾配である。

両式を Preissmann スキームで差分化すると、それぞれ以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \{ (A_{i+1}^{n+1} + A_i^{n+1}) - (A_{i+1}^n + A_i^n) \} \\ & + \frac{1}{\Delta x} \{ \theta(Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + (1-\theta)(Q_{i+1}^n - Q_i^n) \} \\ & - \frac{1}{\Delta x} \{ \theta q^{n+1} + (1-\theta)q^n \} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \{ (Q_{i+1}^{n+1} + Q_i^{n+1}) - (Q_{i+1}^n + Q_i^n) \} \\ & + \frac{1}{\Delta x} \left[\theta \left\{ \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i^{n+1} \right\} \right. \\ & \left. + (1-\theta) \left\{ \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1}^n - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i^n \right\} \right] \\ & + \frac{g}{2} \{ \theta(A_{i+1}^{n+1} + A_i^{n+1}) + (1-\theta)(A_{i+1}^n + A_i^n) \} \\ & \left[\frac{1}{\Delta x} \{ \theta(h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}) + (1-\theta)(h_{i+1}^n - h_i^n) \} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \{ \theta(I_{f,i+1}^{n+1} + I_{f,i}^{n+1}) + (1-\theta)(I_{f,i+1}^n + I_{f,i}^n) \} - i \right] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 Δt は計算時間間隔、 Δx は計算断面間隔、 θ は重み付けパラメタ ($0.5 \leq \theta \leq 1.0$)、 i は計算断面番号、 n は時刻を表す添字である。

c) 差分式の単一河道区分への適用

(3),(4) 式を単一河道区分に適用する。仮に、対象とする単一河道区分の計算断面数を N とする。

未知量は時刻 $t = (n+1)\Delta t$ での各計算断面の流量 Q_i^{n+1} と水深 h_i^{n+1} ($i = 0, 1, \dots, N-1$) であるから、未知量の総数は $2N$ となる。一方、(3),(4) 式は各計算断面に対して立てられるので、 $(2N-2)$ 本の連立方程式が構成される。

(3),(4) 式は非線形連立方程式なので、Newton 法を利用する。まず、(3),(4) 式の左辺をそれぞれ F_i 、 G_i と表し、未知量の近似値 $\hat{Q}_{i+1}^{n+1}$ 、 $\hat{Q}_i^{n+1}$ 、 $\hat{h}_{i+1}^{n+1}$ 、 $\hat{h}_i^{n+1}$ のまわりで Taylor 展開して一次の項までをとる。

$$\begin{aligned} & F_i(Q_i^{n+1}, h_i^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}, h_{i+1}^{n+1}) = \\ & F_i(\hat{Q}_i^{n+1}, \hat{h}_i^{n+1}, \hat{Q}_{i+1}^{n+1}, \hat{h}_{i+1}^{n+1}) \\ & + \Delta Q_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial \hat{Q}} \right)_i^{n+1} + \Delta h_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial \hat{h}} \right)_i^{n+1} \\ & + \Delta Q_{i+1} \left(\frac{\partial F_i}{\partial \hat{Q}} \right)_{i+1}^{n+1} + \Delta h_{i+1} \left(\frac{\partial F_i}{\partial \hat{h}} \right)_{i+1}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & G_i(Q_i^{n+1}, h_i^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}, h_{i+1}^{n+1}) = \\ & G_i(\hat{Q}_i^{n+1}, \hat{h}_i^{n+1}, \hat{Q}_{i+1}^{n+1}, \hat{h}_{i+1}^{n+1}) \\ & + \Delta Q_i \left(\frac{\partial G_i}{\partial \hat{Q}} \right)_i^{n+1} + \Delta h_i \left(\frac{\partial G_i}{\partial \hat{h}} \right)_i^{n+1} \end{aligned}$$

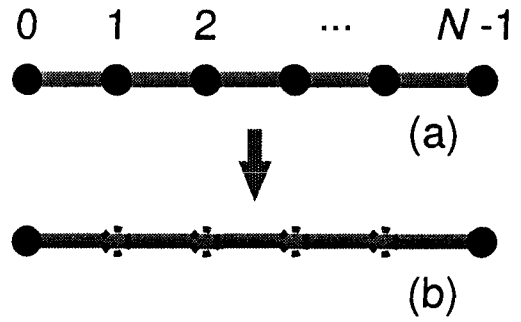


図-2 差分式の単一河道区分への適用

$$+ \Delta Q_{i+1} \left(\frac{\partial G_i}{\partial \hat{Q}} \right)_{i+1}^{n+1} + \Delta h_{i+1} \left(\frac{\partial G_i}{\partial \hat{h}} \right)_{i+1}^{n+1} = 0 \quad (6)$$

$\partial F_i / \partial \hat{Q}$ を a 、 $\partial F_i / \partial \hat{h}$ を b 、 $\partial G_i / \partial \hat{Q}$ を c 、 $\partial G_i / \partial \hat{h}$ を d と書くことにすると、単一河道区分に対する連立方程式は次式のようなになる。ただし、河道区分両端での境界条件は与えていない。行列の要素が空白のところは零である。

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & a_1 & b_1 \\ c_0 & d_0 & c_1 & d_1 \\ & a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ & c_1 & d_1 & c_2 & d_2 \\ & & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ & & c_2 & d_2 & c_3 & d_3 \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_0 \\ \Delta h_0 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta h_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta h_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_0 \\ -G_0 \\ -F_1 \\ -G_1 \\ -F_2 \\ -G_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7)$$

この式をそのまま使うと行列のサイズが大きいため、記憶容量、計算速度の点で不利である。そこで河道区分両端の未知量以外の未知量を掃き出して、両端の未知量 (ΔQ_0 , Δh_0 , ΔQ_{N-1} , Δh_{N-1}) のみから構成される二本の方程式を導出する ((8) 式)。

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & a_{N-1} & b_{N-1} \\ c_0 & d_0 & c_{N-1} & d_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_0 \\ \Delta h_0 \\ \Delta Q_{N-1} \\ \Delta h_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ -G \end{bmatrix} \quad (8)$$

ただし、係数行列、定数ベクトルの要素の値は (7) 式のものとは違ったものになっている。

図 2 は、本節で述べた手順を模式的に示したものである。図中の ● は、連立方程式内に未知量が残っている計算断面を表している。(a) ではすべての計算断面の未知量が方程式内に残っているが、(b) では河道区分両端の未知量しか残っていないことを示している。

d) グリッドボックスに対する連立方程式の構成

次に、各河道区分で導出された方程式を利用して、グリッドボックスに対する連立方程式を構成する。グリッ

ドボックスとは、格子線で囲まれた一つの四辺形のことである。図 3 は、グリッドボックスの模式図である。

まず、グリッドボックス内のすべての河道区分に対して、c) で示した手順で方程式を作成する (図 3 (a))。各河道区分で導出された方程式は、河道区分両端の未知量 (四個) から構成される二本の方程式であるから、仮にグリッドボックス内に M 個の河道区分があるとする、 $2M$ 本の方程式ができることになる。未知量は $4M$ 個である。

この $2M$ 本の方程式に、分合流点での適合条件を加えて、グリッドボックス全体に対する連立方程式を作成する。分合流点での適合条件は、流量の連続条件 ((9) 式) と水深の連続条件 ((10) 式) である。

$$\sum_{i=1}^L Q_i = 0 \quad (9)$$

$$h_1 = h_2 = \dots = h_L \quad (10)$$

ここで、 L は対象とする分合流点に流出入する河道区分の数、 Q_i , h_i ($i = 1, 2, \dots, L$) はその河道区分の分合流点での流量と水深である。流量は分合流点に入流する方向を正としている。

こうして作成されたグリッドボックス全体に対する連立方程式から、さらに分合流点での未知量を掃き出した連立方程式を導出する。この連立方程式は、格子線と河道が交差する地点 (このような地点を境界点とよぶことにする) の未知量のみから構成されていることになる (図 3 (b))。

e) 対象水系全体に対する連立方程式の構成

最後に、対象水系を含む全グリッドボックスで構成した方程式、ならびに、境界点での適合条件 (流量・水深の連続性)、対象水系の最上下流端での境界条件から、対象水系全体に対する連立方程式を構成する (図 4)。この連立方程式を Gauss 消去法などを用いて解く。解いた解ベクトルは Newton 法の解の修正量 (ΔQ_i , Δh_i) なので、 $\hat{Q}_i = \hat{Q}_i + \Delta Q_i$, $\hat{h}_i = \hat{h}_i + \Delta h_i$ として未知量の近似値を修正する。この修正量が十分小さくなるまで c) ~ e) で述べた手順を繰り返す。

以上述べた計算法は、対象水系全体の未知量からなる大きな次元の連立方程式を直接解くのではなく、各河道区分や各グリッドボックスで方程式の次元を小さくしてから全体に対する方程式を解くので、記憶容量、計算速度の両面で有効であると思われる。

4. 適用例

河道網系 dynamic wave モデルの動作を確認するため、仮想的な河道網に適用して計算した例を示す。

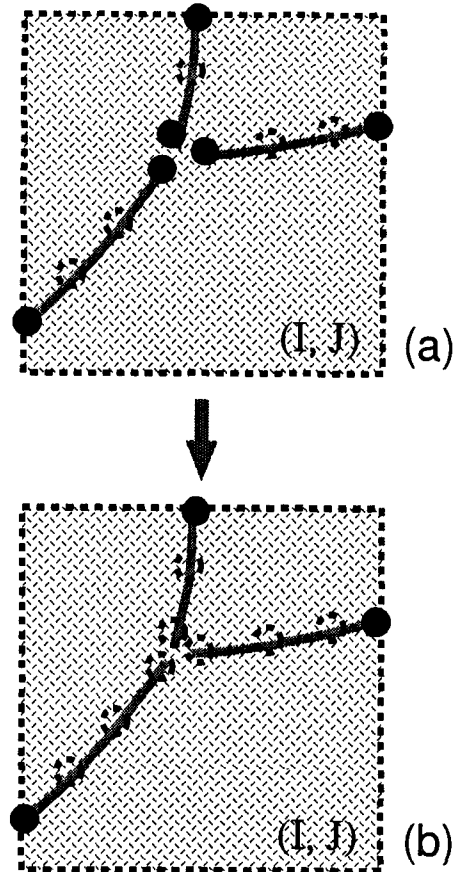


図-3 グリッドボックスに対する連立方程式の構成

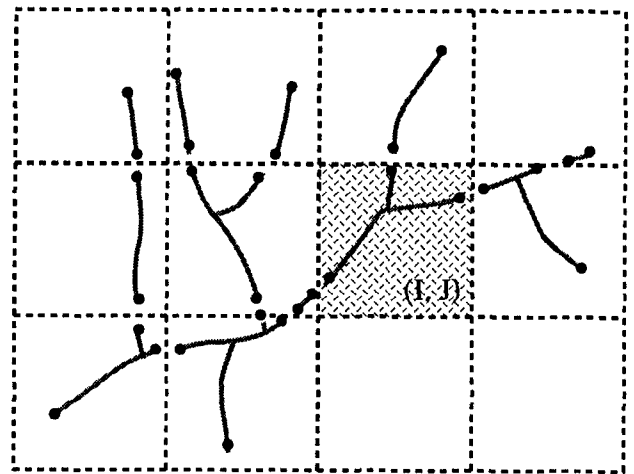


図-4 対象水系全体に対する連立方程式の構成

(1) 合流のみを含む河道網

図 5 のような合流を繰り返して流下・流集する河道網に河道網系 dynamic wave モデルを適用した。グリッドボックスは 4 個、河道区分は 9 本、端点は 14 個、境界点は 8 個、最上流端は 3 個、最下流端は 1 個である。表-1 に各河道区分のパラメタ値を示す。ただ

表-1 各河道区分のパラメタ値

グリッドボックス番号: (0, 0)				
番号	区分長	勾配	粗度係数	断面数
1	5000.0	0.001	0.03	11
2	3000.0	0.001	0.03	11
3	4000.0	0.001	0.03	11
(0, 1)				
1	6000.0	0.001	0.03	11
(1, 0)				
1	5000.0	0.001	0.03	11
2	3000.0	0.001	0.03	11
(1, 1)				
1	3000.0	0.001	0.03	11
2	3000.0	0.001	0.03	11
3	5000.0	0.001	0.03	11

し、区分長・粗度係数の単位系はそれぞれ [m], [m-sec] である。計算断面数はすべての河道区分をあわせて 99 である。したがって、何の工夫もなしに全体の連立方程式を作成すると、 $99 \times 2 = 198$ 元の連立方程式となるが、本稿で提案した手法で作成すると、境界点および最上下流端の状態量のみの連立方程式になるので、その次元は $14 \times 2 = 28$ となる。

河道区分 $((0, 1), 2)^1$, 河道区分 $((1, 0), 2)$, 河道区分 $((1, 1), 3)$ の上流端で $100 \text{ m}^3/\text{sec}$ の定常流量を与え、さらに、各グリッドボックスごとに、図 6 に示す二等辺三角形形状の側方流入量を与えた。河道区分 $((0, 0), 1)$ の下流端では水位流量曲線を与えた。

図 6 は、グリッドボックスごとに与えた側方流入量と、河道区分 $((0, 0), 1)$ の下流端での計算流量ハイドログラフである。比較の対象とするものがないので定量的なことは言えないが、おおむね妥当と思われる結果を得た。

(2) ループを含む河道網

図 7 のようなループ構造を持つ河道網に河道網系 dynamic wave モデルを適用した。グリッドボックスは 4 個、河道区分は 8 本、端点は 12 個、境界点は 8 個、最上流端・最下流端はそれぞれ 1 個である。表-2 は各河道区分のパラメタ値である。計算断面数はすべての河道区分をあわせて 208 ある。一方、境界点および最上下流端はあわせて 10 なので、本モデルで作成される連立方程式の次元は 20 となる。

¹ 「河道区分 $((i, j), k)$ 」は、「グリッドボックス (i, j) の河道区分 k 」を意味する。

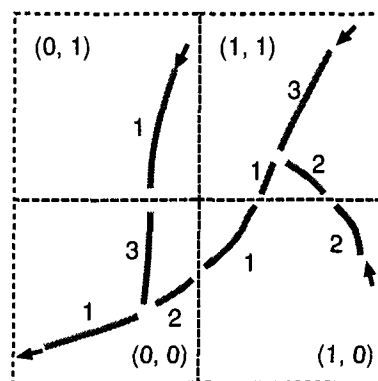


図-5 合流のみを含む河道網

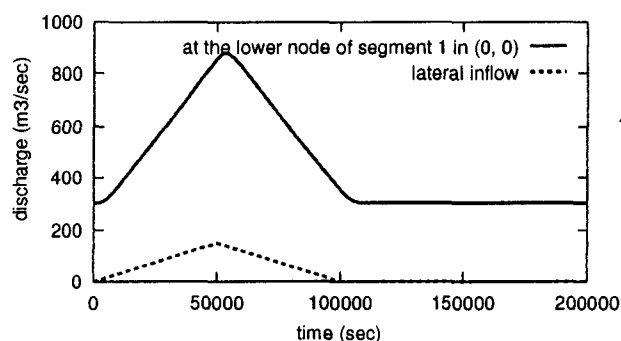
図-6 側方流入量および河道区分 $((0, 0), 1)$ 下流端での計算流量ハイドログラフ

表-2 各河道区分のパラメタ値

グリッドボックス番号: (0, 0)				
番号	区分長	勾配	粗度係数	断面数
1	15000.0	0.0005	0.03	31
2	15000.0	0.0005	0.03	31
3	10000.0	0.0005	0.03	21
(0, 1)				
1	10000.0	0.0005	0.03	21
(1, 0)				
1	15000.0	0.0005	0.03	31
(1, 1)				
1	10000.0	0.00075	0.03	21
2	15000.0	0.0005	0.03	31
3	10000.0	0.0005	0.03	21

計算の境界条件として、河道区分 $((1, 1), 3)$ の上流端で流量ハイドログラフを与え、河道区分 $((0, 0), 1)$ の下流端で水位流量曲線を与えた。この計算では側方流入量はないものとしている。

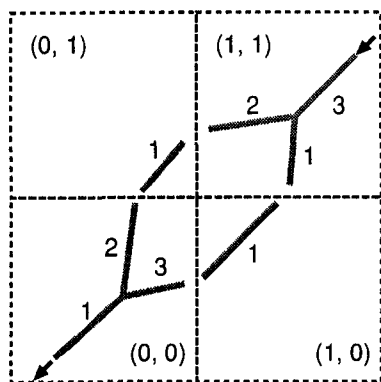


図-7 ループを含む河道網

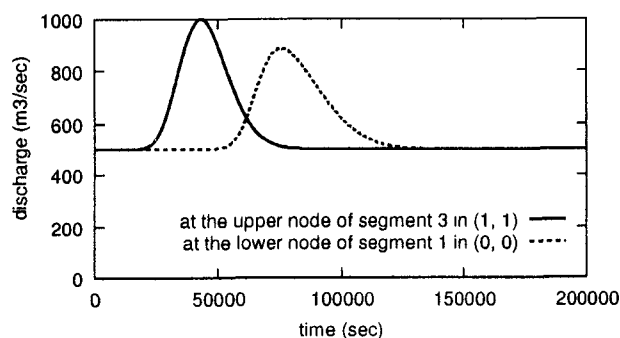


図-8 最上下流端での流量ハイドログラフ

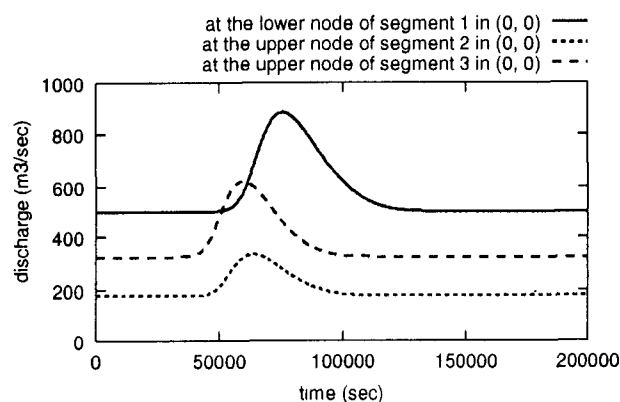


図-9 グリッドボックス (0, 0) での流量ハイドログラフ

図 8 は、河道区分 $((1, 1), 3)$ の上流端点での流量ハイドログラフと、河道区分 $((0, 0), 1)$ の下流端点での計算流量ハイドログラフである。図 9 は、グリッドボックス $(0, 0)$ の河道区分 1 の下流端点および河道区分 2, 3 の上流端点での流量ハイドログラフである。境界条件として与えた流量ハイドログラフが分流部で分離され、それがまた合流部でかさなり、最下流端に流下する様子がうかがえる。

5. おわりに

本研究では、筆者らがこれまでに提案してきた河川流域モデル化手法をふまえて、グリッドをベースとした河道網系 dynamic wave モデルを構築し、これを仮想的な河道網に適用して動作の妥当性を検証した。今後は、実際の流域に適用することで本モデルの適用性を検討するとともに、最終的な目標である大陸河川流域への適用を目指す。

参考文献

- 1) 高埴琢馬・椎葉充晴・市川 温 (1994) : 分布型モデルのスケールアップ, 水工学論文集, 第 38 巻, pp. 809-812.
- 2) 椎葉充晴・立川康人・市川 温 (1997) : 気象モデルと結合するためのマクロ水文モデルの構成法について, 水工学論文集, 第 41 巻, pp. 1109-1112.
- 3) 神田 徹・辻 貴之 (1979) : 低平地河川網における洪水流の特性とその制御, 建設工学研究所報告, 第 21 号, pp. 105-132.
- 4) D. L. Fread (1973) : Technique for Implicit Dynamic Routing in Rivers with Tributaries, Water Resources Res., Vol. 9, No. 4, pp. 918-926.
- 5) Cunge, J. A., F. M. Holly, Jr and A. Verwey (1980) : Practical Aspects of Computational River Hydraulics, Pitman Advanced Publishing Program.
- 6) 土木学会編 (1985) : 水理公式集, pp. 211-214.

(1997. 9. 30 受付)