

河岸侵食過程における流砂の非平衡性を考慮した 流路変動の数値解析

Numerical Analysis of Channel Processes
Using a Non- Equilibrium Sediment Transport Model for the Bank Erosion

長田 信寿*・細田 尚**・村本 嘉雄***・Md. Munsur Rahman****

By Nobuhisa NAGATA, Takashi HOSODA,

Yoshio MURAMOTO and Md. Munsur RAHMAN

This paper deals with the numerical analysis of channel processes by a numerical model with the non-equilibrium sediment transport for bank erosion. It is important to calculate the scouring volume near the brink of channel bank in sufficient accuracy for the analysis of the channel processes with bank erosion. As the bank erosion occurs intermittently in associating with the bank failure, the non-equilibrium sediment transport is dominant near the water edge. Therefore, we developed the numerical model introducing the non-equilibrium sediment transport for the bank erosion, and applied it to the deformation processes of straight and meandering channels. The model is verified by comparing the calculated results with the observed ones.

Keywords: channel processes, bank erosion, non-equilibrium sediment transport, numerical analysis

1. はじめに

河岸侵食及び流路変動の予測モデルは、洪水安全度の向上の観点からその開発が切望されているにもかかわらず、実際現象に適用ができるほどに十分整備されているとは言いがたい。これまでの流路変動に関する解析モデルは、主に直線流路の拡幅現象を対象としており、これに関してはいくつかの計算例がある（例えば、長谷川¹⁾、福岡ら²⁾）。直線流路以外での解析例は少ないが、最近、関根³⁾が一樣湾曲流路、清水ら⁴⁾が sine-generated curve の蛇行流路を対象とした流路変動現象の数値解析を行っている。しかし、前者は基礎式において流下方向の一樣性を仮定しており、後者は河岸侵食の間欠性を考慮していないなど問題を残している。さらに、両者とも水際近傍において卓越すると考えられる流砂の非平衡性を考慮していない。

流砂の非平衡性は、河岸侵食が間欠的に生じた場合、特に顕著となると考えられる。すなわち、河岸の崩落による瞬時の土砂供給及び次の崩落が生じるまでの水際から横断方向の土砂流入がないことが、水際近傍での流砂の非平衡現象を卓越させる原因となる。一方で、河岸侵食現象を対象とする計算においては、河岸近傍の流砂量を正確に見積もる必要がある。これらを考え合わせると、流路変動現象の数値解析モデルの構築に際しては、流砂の非平衡性を取り入れるべきであると考えられる。

河岸侵食における流砂の非平衡性を考慮した研究としては、以下の例が挙げられる。長谷川¹⁾は、掃流力が、定常運動中の砂粒群の衝突による抵抗、移動開始の慣性抵抗、流体自身の抵抗の和で表されるとして、非平衡流砂量式を導いている。芦田・江頭・加本⁵⁾は、側岸部では砂粒の堆積が無視できるものとし、pick-up rate のみを考慮して側岸侵食量の定式化を行っている。また、中川・辻本・村上⁶⁾は、側岸斜面上での砂粒の力学的考察により、pick-up rate と step length で構成される stochastic モデルを構築している。これらは側岸の流砂運動について重要な知見を与えているが、平面2次元の河床変動現象に適用するには至っていない。流砂の非平衡運動を考慮した平面2次元の河床変動はモデル化が難しいために、これまでに構築され

* 正会員 工修 京都大学助手 工学研究科土木工学専攻 (〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606 京都市左京区吉田本町)

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606 京都市左京区吉田本町)

**** 学生員 工修 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒606 京都市左京区吉田本町)

たモデルには種々の仮定が導入されている。例えば、福岡ら⁷⁾は砂粒子が単位距離流下する間の流砂量の変化が平衡流砂量と非平衡流砂量の差に比例するとして非平衡流砂量式を導き、橋脚周辺の局所洗掘現象等に適用している。また、檜谷⁸⁾は水制周辺の河床変動計算を行うにあたって、水制前面でpick-upされた砂粒が、水制先端からの距離に応じて堆積するとして平面2次元の流砂の非平衡性を取り入れている。

ここでは、より汎用性を持ち、水際等の境界が存在する場合にも適用が可能な、流砂の非平衡性を考慮したモデルを構築し、流路変動現象に適用する。解析の対象は、①sine-generated curveの蛇行流路を初期形状として、流量、勾配の相違により蛇行の発達あるいは直線化へ向かう流路変動、②直線流路を初期形状として、交互砂州の発生およびそれに伴う河岸の侵食により生じる流路の蛇行現象である。また、実験結果と比較することによりモデルの妥当性を検証する。

2. 計算手法

2.1 流れの基礎式

流路変動現象の数値解析を行う際にまず問題となるのは、河岸侵食により計算対象領域が時間の経過とともに拡大・変形する点である。これに対応するため、ここでは移動一般座標系を用いることとする⁹⁾。移動一般座標系は境界形状の時間変化に応じて、計算格子を再構築し計算を進めるものである。図-1に後述の蛇行発達過程を計算したRun M-1の初期計算格子と最終計算格子の格子形状を示す。

流れの基礎式は、平面2次元流れの連続式、運動方程式で構成され、移動一般座標系で表示したものを以下に示す。なお、運動方程式については、 ξ 方向のみ示す。

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\eta_t + V) \frac{h}{J} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{運動方程式} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^i}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{Q^i}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\eta_t + V) \frac{Q^i}{J} \right) \\ [\xi \text{ 方向}] \quad - \frac{M}{J} \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial t} + (\xi_t + U) \frac{\partial \xi_z}{\partial \xi} + (\eta_t + V) \frac{\partial \xi_z}{\partial \eta} \right) - \frac{N}{J} \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial t} + (\xi_t + U) \frac{\partial \xi_y}{\partial \xi} + (\eta_t + V) \frac{\partial \xi_y}{\partial \eta} \right) \\ = -gh \left(\frac{\xi_z^2 + \xi_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\xi_z \eta_z + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) - \frac{\tau_{\xi}^i}{\rho J} + \frac{\xi_z^2}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'^2} h \right) + \frac{\xi_z \eta_z}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'^2} h \right) \\ + \frac{\xi_y^2}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{v'^2} h \right) + \frac{\xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{v'^2} h \right) + \frac{\xi_z \eta_z + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'v'} h \right) + \frac{2\xi_z \xi_y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'v'} h \right) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 h :水深、 Q^i :流量フラックスの反変成分、 (M, N) : x, y 方向の流量フラックス、 z_s :基準面からの水位、 (U, V) :流速ベクトルの反変成分、 J :座標変換のヤコビアン、 (ξ_t, η_t) :座標の時間微分、 τ_{ξ}^i :底面せん断応力の反変成分、 $-\overline{u'^2}, -\overline{u'v'}, -\overline{v'^2}$: $x-y$ 座標系の水深平均レイノルズ応力の成分である。

また、底面せん断応力 τ は、澤井・芦田ら¹⁰⁾によって示された法線面積分法で求めることとし、断面内で法線群が交差しない場合について、一般座標系で表示したものを次式に示す。

$$\begin{aligned} \tau = \frac{\rho g n^2}{h^{1/3}} (u_x^2 + u_y^2) \left[1 + \left(-\sin \gamma \left(\xi_z \frac{\partial h}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \cos \gamma \left(\xi_y \frac{\partial h}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \right)^2 + \frac{1}{2} h \left(\sin^2 \gamma \left(\xi_z^2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + 2\xi_z \eta_z \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_z^2 \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \sin \gamma \cos \gamma \left(\xi_z \xi_y \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + (\xi_y \eta_z + \xi_z \eta_y) \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_z \eta_y \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) + \cos^2 \gamma \left(\xi_y^2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + 2\xi_y \eta_y \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_y^2 \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) \right) \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 θ :横断勾配角、 γ :流線と x -軸の角度、 (u_x, u_y) : x, y 方向の水深平均流速、 n :マンニングの粗度係数である。

2.2 河床変動計算法

河岸の崩落は側岸水際の洗掘に起因して発生するので、水際近傍の河床変動量の予測精度が重要となる。水際においては、前述したように、河岸崩落が生じるまでは横断方向の土砂流入がないため、この付近で流砂の非平衡性が卓越する。従って、ここでは、流砂の非平衡性を取り入れた流砂モデルを構築する。以下に計算手順を示す。

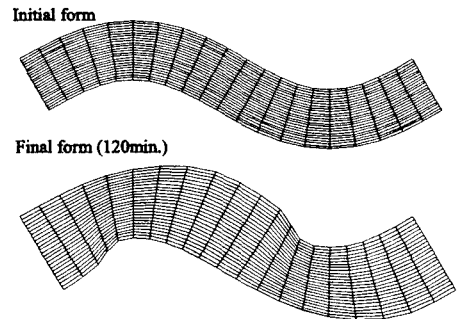


図-1 境界の時間変化に伴う計算格子の再構築

(a) pick-up rate の算出

まず, pick-up rate を算出する。ここで用いた pick-up rate 推定式は, 中川・辻本・村上⁶⁾ によって示された, 側岸など大きな横断勾配を有する場合にも適用可能な次式である。

$$p_s \sqrt{\frac{d}{(\sigma/\rho-1)g}} = F_0 G_* \tau_* \left(1 - \frac{k_2 \Omega \tau_{*c}}{\tau_*}\right)^m; \quad G_* = \frac{\cos \psi + k_L \mu_s}{1 + k_L \mu_s}, \quad \Omega = \frac{\mu_s \cos \theta - \sin \theta \sin \phi}{\cos \psi + k_L \mu_s} \frac{1 + k_L \mu_s}{\mu_s} \quad (4)$$

ここに, p_s : pick-up rate, d : 粒径, τ_* : 無次元掃流力, τ_{*c} : 無次元限界掃流力, k_L : 抗力と揚力の比($=0.85$), μ_s : 砂の静止摩擦係数($=0.7$), ψ : 河床での流速と砂粒の移動方向のなす角度, ϕ : 砂粒の移動方向と s -軸のなす角度である。なお, s -軸は, 主流方向 (水深平均流速の横断方向成分 $u_n = 0$ となる方向) とし, n -軸はそれに対して直角方向とする。また, ϕ 及び ψ ($=\phi-\delta$) は後述の手法により求めることとし, F_0, k_2, m は, 中川らと同様に, それぞれ 0.03, 0.7, 3 を与えた。

(b) 砂粒の移動軌跡の計算法

ここでは, 斜面上の砂粒運動を考えることにより, 砂粒の移動軌跡を求める手法について述べる。

まず, 砂粒の移動方向は, 長谷川¹⁾, 黒木・岸¹¹⁾ と同様に, 砂粒に作用する力のつり合いより求めた式を用いる。この時, 藤田¹²⁾ が指摘しているように, 砂粒の運動は瞬時に定常状態となるため, 砂粒運動の非定常性を無視する。また, 河床における横断方向流速として湾曲による 2 次流成分を考え, これを曲率に比例する式形を用いて求めると, 流線と砂粒の移動方向のなす角 ϕ , 河床での流速の向きと s -軸のなす角 δ は次式のようにになる。

$$\tan \phi = \frac{v_n}{v_s} = \tan \delta - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}} \frac{\partial z_b}{\partial n}; \quad \tan \delta = \frac{u_{bn}}{u_{bs}} = -N_* \frac{h}{r} \quad (5)$$

ここに, v_s, v_n : 砂粒の移動速度の s -, n - 方向成分, u_{bs}, u_{bn} : 河床での流速の s -, n - 方向成分, μ_k : 河床材料の動摩擦係数, r : 流線の曲率半径, N_* : 定数($=7.0$)である。なお, τ_{*c} は, 岩垣式より算出する。

一方, x -軸と s -軸のなす角 γ は, その定義より次式となる。

$$\tan \gamma = \frac{u_y}{u_x} \quad (6)$$

砂粒の移動軌跡は, 以上の手法により計算された砂粒の移動方向角 β ($=\phi+\gamma$) を用いて, 図-3 に示すように, 次式より, $i=1$ から逐次計算で求めることとする。

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} + \Delta s \cdot \mathbf{d}_{i-1} \quad (7)$$

ここに, $\mathbf{p}_i$: 砂粒移動の出発地点から i 番目の砂粒の位置ベクトル(x_i, y_i), $\mathbf{d}_{i-1}$: $i-1$ 地点における砂粒の移動方向を表す単位ベクトル($\cos \beta_{i-1}, \sin \beta_{i-1}$), Δs : 砂粒の移動軌跡の計算ステップ幅であり, メッシュ幅を考慮して $\Delta s = 5\text{mm}$ とした。なお, 初期値 $\mathbf{p}_0$ は pick-up rate の定義点(計算格子点)である。

(c) deposit rate の算出

ここでは, (b) で求めた軌跡上の各点において, deposit rate を求める。ある点 j (この点での pick-up rate を $p_{s(j)}$ とする) から出発した軌跡において, 出発地点から i 番目の点の deposit rate $p_{d(j,i)}$ は, step length の確率密度関数を $f_s(s_i)$ とすると, 次式で示される。

$$p_{d(j,i)} = p_{s(j)} f_s(s_{(i)}) \frac{A_{(j)}}{A_{(i)}}; \quad s_{(i)} = i \cdot \Delta s, \quad f_s(s) = \frac{1}{\Lambda} \exp\left(-\frac{s}{\Lambda}\right) \quad (8)$$

ここに, $s_{(i)}$: 砂粒の移動距離, Λ : 平均 step length ($\approx 100d$) である。また, $A_{(j)}, A_{(i)}$ はそれぞれ, pick up, 及び deposit 地点の計算メッシュの面積であり, 各軌跡における土砂の収支を合致させるために導入したものである。なお, step length の確率密度関数 $f_s(s)$ は, 指数関数で表せるものとした。ただし, ここで求めた deposit rate $p_{d(j,i)}$ は各軌跡上で計算されているため, その位置は後述の河床高の計算で必要となる計算格

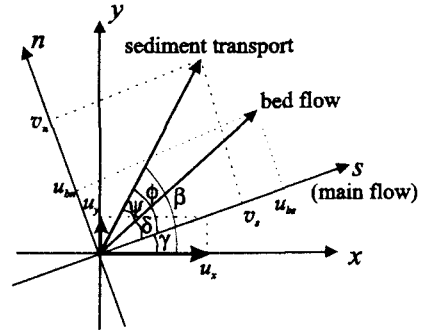


図-2 流線及び砂粒の移動方向の定義

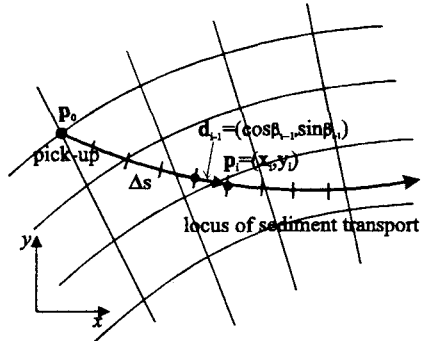


図-3 移動軌跡の模式図

子点の位置と必ずしも一致しない。そこで、まず、 $p_{d(j,i)}$ の算出点が含まれる計算メッシュを抽出し、 $p_{d(j,i)}$ の算出点とその計算メッシュの各格子点の距離に応じて、 $p_{d(j,i)}$ を格子点に分配することとした。

(d) 河床高の計算

以上の手法によって算出した pick-up rate, deposit rate を用いて、次式により、河床変動計算を行う。

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = A_1 d(p_d - p_s); \quad A_1: 1 \text{ 次元の砂粒の形状係数}(=1.0) \quad (9)$$

2.3 河岸崩落・堆積のモデル化

河岸崩落のモデル化は、その現象の間欠性に着目し、長谷川¹⁾と同様に図-4のようにモデル化した。すなわち、図-4において、(1)は前ステップの河岸崩落直後の横断形状である。これが河岸近傍の河床洗掘により(2)のように変化し、図中の A と B の面積が等しくなったとき、河岸崩落が発生するとする。崩落土砂は(3)のように河岸材料の水中安息角 β_k ($\approx 30^\circ$)で堆積するとした⁹⁾。

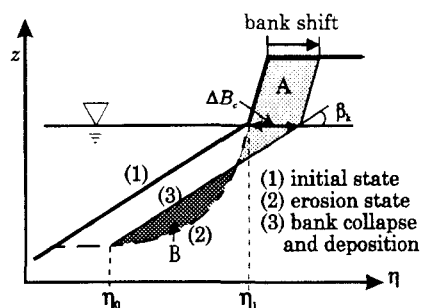


図-4 河岸の崩落・堆積過程の概念図

3. 蛇行流路の流路変動計算

3.1 計算ケース及び計算条件

ここでは、本モデルを、初期の平面形状が sine-generated curve, 横断形状が台形断面である蛇行流路の流路変動現象に適用する。計算は表-1 に示す 2 ケースであり、計算条件は Rahman ら¹³⁾の実験 No.3, No.1 に対応している。

表-1 計算ケース

Run No.	流量 cm ² /s	勾配
M-1	630	1/100
M-2	1980	1/300

3.2 計算結果及び考察

図-5は、それぞれのケースの河岸の平面形状の時間変化の実験結果と計算結果である。Run M-1 では、蛇行頂部よりやや下流の外岸を中心に河岸侵食が生じており、時間の経過とともに蛇行が発達している。これに対して、Run M-2 では、蛇行頂部の外岸から次の蛇行の内岸を含む広範囲の区間で侵食が生じており、特に内岸付近で侵食量が多い。従って、このケースでは蛇行は発達せず、流路は直線化へ向かう変化を示している。両ケースの計算結果とも、これらの特徴及びその侵食量を精度良く再現しており、流砂の非平衡性を考慮していない計算結果⁹⁾と比較して、著しい改善がみられる。

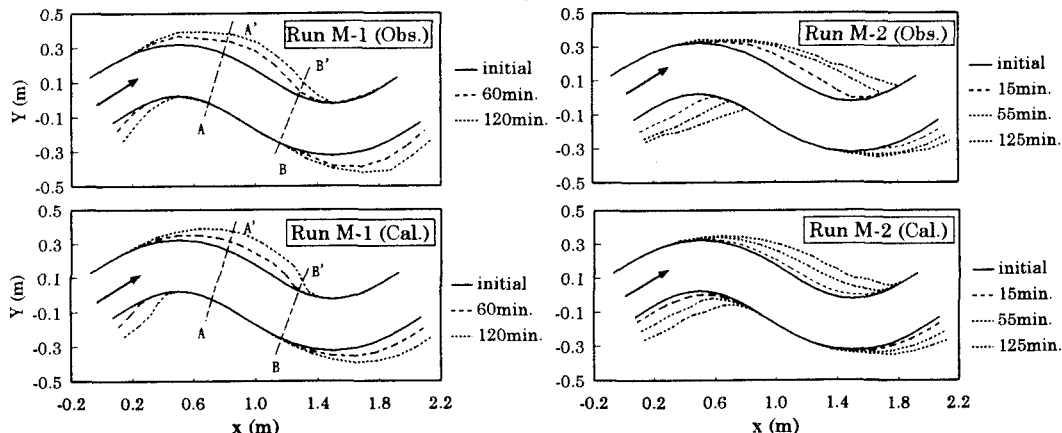


図-5 平面形状の時間変化

次にこれら両ケースの流路変動過程に相違が生じた理由について考える。図-6は左岸近傍での無次元掃流力の縦断分布である。河岸侵食位置を考える上では、河床の変動量が洗掘量と堆積量のバランスで決定されているため、掃流力の大きさそのものよりは、その変化率が重要となる。図-5、図-6より、河岸侵食は、ある程度以上の掃流力(側岸斜面上での限界掃流力程度)で、かつ掃流力が縦断方向に増加する区間で生じ

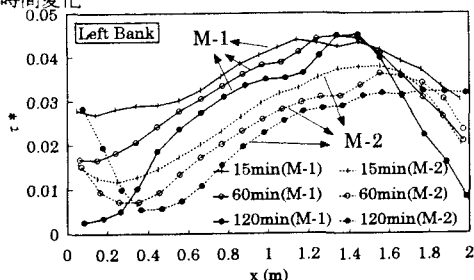


図-6 河岸近傍における掃流力の縦断分布

ていることがわかる。この掃流力の増加区間は、両ケースとも時間の経過とともに下流へシフトしているが、Run M-1と比較してRun M-2の方が、その移動速度が大きく、両ケースの掃流力の位相差がますます顕著となり、このことが流路変動特性に違いを生じさせた原因と考えられる。なお、2次流の影響については、両ケースで侵食量が大きく異なった区間は流線の曲率の小さい区間であり、従って2次流も小さいことから、両ケースの相違が生じた原因とは考えにくい。

次に、蛇行流路変動の特徴を把握するために、Run M-1について、横断形状の時間変化及び流速ベクトルと砂粒の移動軌跡の関係について示す。図-7は図-5におけるA-A'断面とB-B'断面の横断形状の時間変化を示したものである。実験結果、計算結果ともに、A-A'断面では、早い段階から侵食速度が大きいのにに対し、B-B'断面では、やや遅れて河岸侵食が増大している。この理由は、図-6に示したような掃流力分布の下流へのシフトに対応しているものと考えられる。

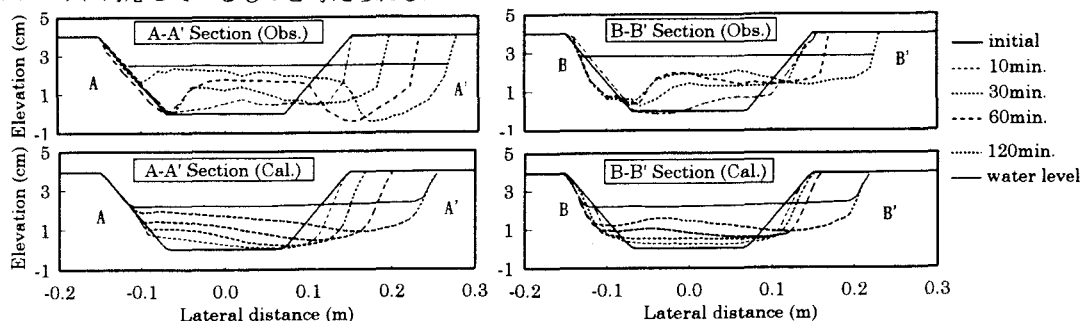


図-7 横断形状の時間変化 (Run M-1)

図-8は60分後の流速ベクトルと砂粒の移動軌跡である。湾曲部では2次流の影響により、水深平均の流速ベクトルと砂粒の移動方向に差が生じており、また、河岸付近では河床の横断勾配が大きくなることから、これが砂粒の移動方向に与える影響が顕著となっている。特に湾曲部外岸付近では、これら両者の影響により流速ベクトルと砂粒の移動方向の差が大きくなっている。これは実験のビデオ撮影により計測した結果と比較しても妥当な結果である。

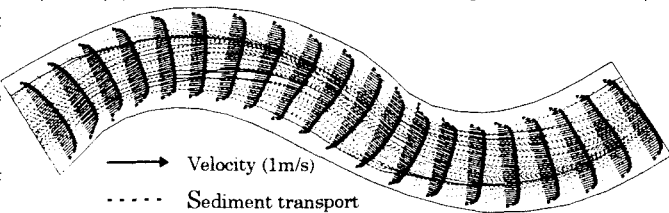


図-8 水深平均流速ベクトルと砂粒の移動方向

4. 直線流路から蛇行の発達過程の計算

河岸侵食は、流路の蛇行とともに砂州の発達に伴う偏流により助長されるため、砂州の特性と密接な関係がある。ここでは、直線流路での交互砂州の発生に伴う河岸侵食に関する計算及び実験結果を示す。

4.1 計算条件

対象流路は、藤田・村本¹⁴⁾による側岸固定での交互砂州の実験に対応したRun S-1と、侵食性河岸を有する直線流路の流路変動であるRun S-2の2ケースである。Run S-2では、3.で対象とした流路と同様な河床材料、横断形状を有し、流量は730cm³/s、河床勾配は1/100である。なお、ここで対象とする交互砂州の計算においては、3.で行ったような一波長分だけの計算は、計算開始時点でその波長を決定できないために不可能であり、ここでは、複数の交互砂州が含まれるように流路長を長く設定している。そのため、計算格子点が増加することにより、砂粒の移動軌跡を求める際の計算時間が大幅に増加することから、河岸近傍以外では、平衡流砂量式(M-P-M式と長谷川式)を用い、非平衡流砂が卓越する河岸近傍でのみ2.で示した手法を用いる。なお、ここでいう河岸近傍とは図-4で示した河岸崩落の埋め戻し領域のスケールである。また、計算においては交互砂州の発生のために微小擾乱を与えており、Run S-2については、河岸侵食計算を始める前に交互砂州が流路全体に発生するまで(120分間)、助走計算を行っている。

4.2 計算結果及び考察

図-9にRun S-1の実験及び計算結果を河床コンター図として示す。このケースは、本手法で、砂州の波長、波高等の特性がどの程度再現できるかの検証を目的としたものである。図-9において、実験結果は通水

開始後 97 分, 計算結果は 180 分後のものであり, どちらも, この時点では平衡状態に達している。波長については, 計算結果は実験結果をよく再現しているが, 波高については計算結果のほうが若干小さいようである。また, 平衡状態に達するまでの時間については, 両者に大きな差があり今後の検討を要するが, 平衡状態での砂州の基本的性状については再現が可能であると言える。

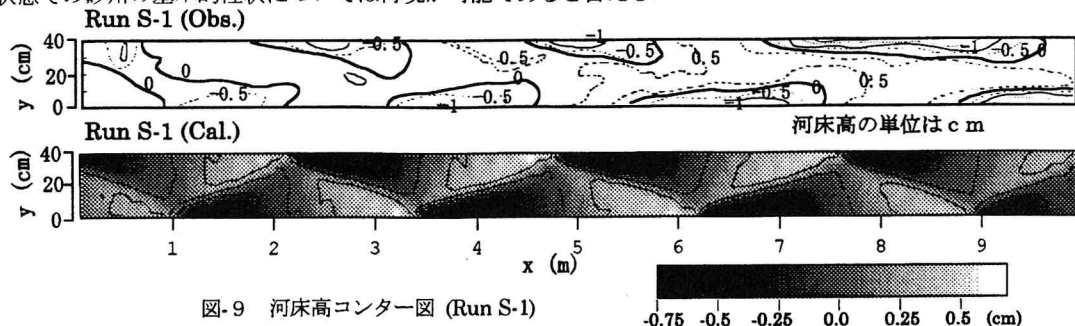


図-9 河床高コンター図 (Run S-1)

次に, 図-10 に Run S-2 の実験及び計算結果を示す。これは上下流端の影響が小さい流路中央の 1.5 波長の平面形状である。交互砂州の発生で流れが偏ることと流路の蛇行が生じるため, 蛇行波長は交互砂州長に対応したものとなっている。蛇行の波長及びその発達形状についてのモデルの再現性は良好であるが, 蛇行の発達速度については計算結果の方が遅い。これは前述したように砂州の発達速度の再現精度の問題と関連すると考えられ, 今後の課題である。

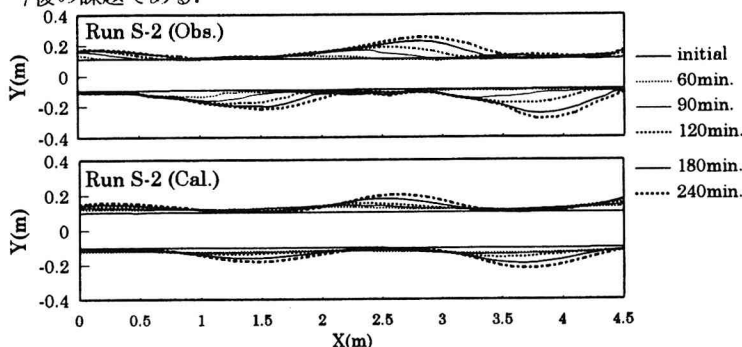


図-10 平面形状の時間変化 (Run S-2)

5. おわりに

本研究では, 河岸侵食過程における水際近傍で卓越すると考えられる流砂の非平衡性を考慮したモデルを構築し, 流路変動現象に対して適用を行った。実験結果と比較することにより, モデルの妥当性が示されたが, 今後さらに, 砂州と蛇行の発達速度の関連性についても詳細に検討を行い, 予測精度の向上を図りたい。

参考文献

- 1) 長谷川和義: 沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究, 北海道大学学位論文, 1983.
- 2) 福岡捷二・山坂昌成: なめらかな横断面形状をもつ直線流路のせん断力分布と拡幅過程の解析, 土木学会論文集, No.351/II-2, pp.87-96, 1984.
- 3) 関根正人: 側岸侵食を考慮した河川の流路変動に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No.553/II-34, pp.51-59, 1996.
- 4) 清水康行・平野道夫・渡辺康玄: 河岸侵食と自由蛇行の数値計算, 水工学論文集, 第40巻, pp.921-926, 1996.
- 5) 芦田和男・江頭進治・加本 実: 山地流域における侵食と流路変動に関する研究(2), 京都大学防災研究所年報, 第26号, B-2, pp.353-361, 1983.
- 6) 中川博次・辻本哲郎・村上正吾: 側岸における非平衡流砂過程, 第29回水理講演会論文集, pp.561-566, 1985.
- 7) 福岡捷二・富田邦裕・堀田哲夫・宮川朝浩: 橋脚まわりの局所洗掘推定のための実用的数値シミュレーションの開発, 土木学会論文集, No.497/II-28, pp.71-79, 1994.
- 8) 檜谷 治: 河川および浅水湖の3次元流れと平面2次元河床変動に関する研究, 京都大学学位論文, 1992.
- 9) 長田信寿, 細田 尚, 村本嘉雄, Md.M.Rahman: 移動一般座標系による側岸侵食を伴う河道変動の数値解析, 水工学論文集, 第40巻, pp.927-932, 1996.
- 10) 澤井健二・芦田和男: 粘性流路の侵食と横断形状に関する研究, 土木学会論文集, 第266号, pp.73-86, 1977.
- 11) 黒木幹男・岸 力: 中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究, 土木学会論文集, 第342号, pp.87-96, 1984.
- 12) 藤田裕一郎: 直線流路の側岸侵食機構, 京都大学防災研究所年報, 第22号, B-2, pp.537-552, 1979.
- 13) Md.M.Rahman, N.Nagata, T.Hosoda, Y.Muramoto: Experimental study on morphological process of meandering channels with bank erosion, 水工学論文集, 第40巻, pp.947-952, 1996.
- 14) 藤田裕一郎・村本嘉雄・堀池周二: 交互砂州の発達過程に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第24号, B-2, pp.411-431, 1981.