

基盤岩を侵食する河川の縦断河床形状

Longitudinal bed profiles of bedrock incised rivers

泉 典洋¹・山口里実²

By Norihiro IZUMI and Satomi YAMAGUCHI

A mathematical model to explain the longitudinal bed profiles of bedrock incised rivers is presented in this study. It is found theoretically that, in the case of mountain rivers which have comparatively large bed slope, the normal flow approximation is applicable. It is also found that the time evolution of bed rock incision is described by a linear wave equation, in which knick points generated at the downstream end migrate upstream and they slow down their speed as they migrate upstream.

Keywords: bed rock incision, longitudinal profile, wave equation, knick point

1. はじめに

河川の縦断形がどのような形状をしているのか、また、どのように変化していくのか、といった問題は地形学の分野で古くから興味の対象となってきたが、その物理モデルに関する理論的研究が行われるようになったのは比較的最近のことに過ぎない。一方、河川工学の分野では、工学であるが故の定量化の要請からか、比較的古くから数多くの物理モデルが提案されている。我が国では、1950年代にIwagaki¹⁾によって特性曲線を用いた解析法が提案されたのを皮切りに多くの研究が行われ、1970年代にはいり芦田・道上²⁾及び平野³⁾によって分級や粗粒化の効果まで取り入れた河床低下の計算法が提案されるに至っている。

上記理論は、いずれも河道への土砂供給量が十分大きい場合の土砂輸送的な河床変動を取り扱っている。ところが、土砂供給量より隆起速度が卓越するような山地領域では、土砂輸送的な河床変動に加えて基盤岩の侵食を考慮に入れなければ実際の縦断形状を説明することはできない。本研究では、実測で観察された基盤岩侵食性河道の縦断形状の特性を理論的に説明することを目的としている。空間的・時間的により大きいスケールでの縦断形状について、可能な限り簡略化した理論解析を行い、その基本特性を明らかにする。

2. 基盤岩侵食性河道

2.1 竜の口沢の概要

図-1に示したのは仙台市を流れる広瀬川の支流、竜の口沢である。竜の口沢の両岸は切り立った(場所に

¹ 正員 Ph.D. 東北大学助教授 土木工学科 (〒982 仙台市青葉区荒巻字青葉)

² 学生員 東北大学 土木工学科 (同上)

よっては100m近い崖となっており、青葉山の基盤岩を深く下刻して流れる穿入河川である。流域面積は約3km²、本川の流路延長は約6kmである。

青葉山一帯は太平洋プレートの沈み込みによって、およそ50万年の間、年間0.65mm程度の速度で隆起を続けている。従って、この一帯では活発な侵食活動が行われており、竜の口沢以外にも多くの沢が存在している。ところが、これほど深い峡谷となっているのは竜の口沢だけである。その原因は次のように推定されている。もともと竜の口沢と広瀬川の合流点は現在よりも広瀬川の遙か下流であった。その後、広瀬川の蛇行によって青葉山の一部が侵食され、竜の口沢の流域が争奪される。それによって侵食基準面の急激な低下が生じ、竜の口沢は2,30メートルの落差で広瀬川に流れ込むことになり、その際生じた遷急点 (knick point) が後退していくことによって現在のような峡谷ができあがった⁴⁾。これまでの調査によって広瀬川による竜の口沢の流域争奪が生じたのは約40000年前から5000年前の間であると推定されている⁴⁾。

2. 2 竜の口沢における縦断形状の特徴

図-2に実測によって得られた竜の口沢及びその支流である万助沢の縦断形状を示す。実測では広瀬川合流点から万助沢合流点までの間の竜の口沢と万助沢で縦断測量を行った(図-1参照)。万助沢上流域の標高110m以上の縦断形状については実測を行っておらず、1万分の1地形図から読みとった値を用いている。

竜の口沢・万助沢の河床は、巨礫や流木によってせき止められた場所等の一部を除く流路の大部分で基盤岩が露出している。縦断形状の特徴としては、大きな遷急点 (knick point) が二つ、分水嶺より下流600m付近と2300m付近に存在している。600m地点の遷急点はいわゆる谷頭部である。ここでは流量が僅かであり、ゆっくりとした谷頭侵食が進んでいる。万助沢の、合流点からすぐ上流に位置している2300m地点の遷急点はいくつもの小さいステップから成っており、活発な侵食活動が続いている。また、測量は行っていないが、竜の口沢本川においても、合流点から100m足らず上流に同じような遷急点が存在することが確認されている。万助沢・竜の口沢両川で、下流からほぼ同じ距離の地点に同じような遷急点が見られることは、この遷急点が下流から伝搬してきて、合流点で二つに分岐したことを示唆している。従って、この遷急点が前述した流域争奪の名残であると推測される。次節以降では、このような基盤岩侵食性の河道の特徴とその形成プロセスを理論的に説明することを試みる。

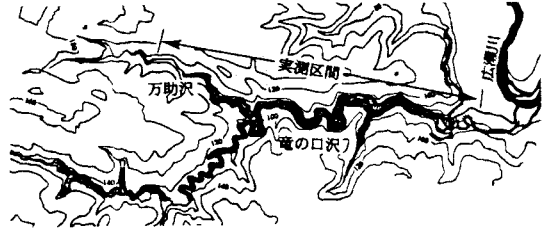


図-1 竜の口沢及び万助沢周辺の地形

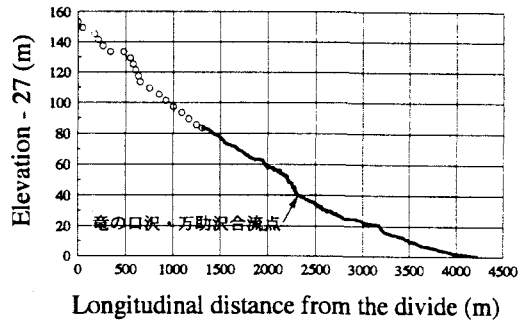


図-2 竜の口沢及び万助沢の縦断形状 (実線は実測値、○は1万分の1地形図から読みとった)

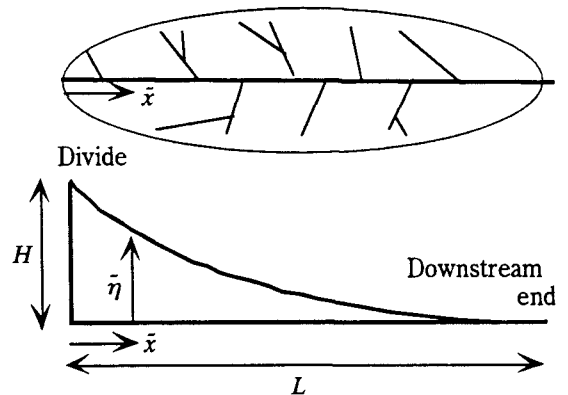


図-3 座標系及び記号の定義

3. 理論

3.1 支配方程式

図-3に示すような速度 $\bar{\varphi}$ で隆起を続けている山地領域における河川を考える。河川は山地から海に直接注いでいるか、或いは平地に流れ出しているものとする。海或いは平地は沈降傾向にあり、河口デルタや扇状地などの堆積域となっている場合が多い。今、河道下流端を隆起域と沈降域(堆積域)の境界点とし、河道上流端を分水嶺とする。河道上流端から下流端までの流れは次の一次元浅水流方程式で表される。

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = -g \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{\tau}}{\rho \bar{h}} \quad (1)$$

ここで $\bar{x}$ は河川上流端を原点とし流路に沿って水平方向にとった座標、 $\bar{u}$ は $\bar{x}$ 方向の流速、 $\bar{h}$ は水深、 $\bar{\eta}$ は基準面からの河床高である。 $\bar{\tau}$ は底面剪断力であり、マニング則を用いて $\bar{\tau} = \rho g n^2 \bar{u}^2 \bar{h}^{-1/3}$ と表す。ここで n はマニングの粗度係数である。問題を単純化するため流路全体にわたって n を一定とみなす。

流れの連続式は次式で表される。

$$\frac{\partial \bar{u} \bar{h} \bar{b}}{\partial \bar{x}} = I \quad (2)$$

ここで $\bar{b}$ は川幅である。また I は単位流路長当たりに直接或いは支流を通じて間接的に流入する流量であり、実際は場所の関数となっているはずであるが、ここでは問題を簡単にするために定数であると仮定する。すなわち、単位流路長当たり一定流量だけ流入するものとする。河川の流域が、図-3に示したような鳥の羽根状の形をしている時、この仮定は悪くない近似となる。

地盤の相対的な隆起速度が非常に早いとき、河床や谷壁での土砂生産量は隆起速度に追いつかず、河床からは基盤岩が露出する。このような場合、河床高の時間変化は次のように表される。

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = -\bar{E} + \bar{\varphi} \quad (3)$$

ここで $\bar{E}$ は基盤岩の侵食速度である。基盤岩の侵食速度は底面剪断力の関数となることが予想されるが、具体的には基盤岩の性質及び強度に依存する量である。ここでは河道全体が同じ種類の基盤岩で構成されると仮定し、粘性土とのアナロジーから次式のように局所的な底面剪断力のべき乗で表されるものとする。

$$\bar{E} = \beta (\bar{\tau} / \bar{\tau}_c)^\gamma \quad (4)$$

ここで $\bar{\tau}_c$ は基準となる底面剪断力であり、 γ の具体的な値とともに後述する。

澤井⁹⁾は粘性土で構成された水路を対象に研究を行い、侵食によって河床を低下させながらも時間的に変化しない平衡横断面形状の存在を実験的に明らかにするとともに、その形状を解析的に求め、川幅は中央水深のほぼ4倍となることを見いだしている。ここで取り扱っているような基盤岩侵食によって形成される河道の横断面形状も、ほぼ同様なメカニズムによって形成されると予想される。したがってここでもこの結果を準用し、川幅は水深の4倍であると仮定する。

$$\bar{b} = 4\bar{h} \quad (5)$$

堆積域である河口デルタ或いは扇状地が平衡に達しているとき、隆起域と堆積域の境界点での河床の高さはほとんど変化しない。下流端での高さを基準点とすると境界条件として次式が成立する。

$$\bar{x} = L \text{ のとき } \bar{\eta} = 0 \quad (6)$$

3.2 無次元化

次の無次元化を導入する。

$$\bar{u} = Uu, \quad \bar{h} = Dh, \quad \bar{\eta} = H\eta, \quad \bar{x} = Lx \quad (7a,b,c,d)$$

ここで H は河川上流端の高さであり、 L は流路長である(図-1参照)。また U 及び D は代表的な流速及び水深であり、次のように定義される。

$$U = 0.7 \ln^{-3/4} I^{1/4} H^{3/8} L^{-1/8}, \quad D = 0.59 n^{3/8} I^{3/8} H^{-3/16} L^{9/16}, \quad (8a,b)$$

上記の無次元化を用いて式(1)を書き直すと次のようになる。

$$\varepsilon \left(F^2 u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{u^2}{h^{4/3}} \quad (9)$$

ここで $\varepsilon = D/H = 0.59n^{3/8}I^{3/8}H^{-19/16}L^{9/16}$ 及び $F = U/(gD)^{1/2} = 0.92g^{-1/2}n^{-15/16}I^{1/16}H^{15/32}L^{-13/32}$ である。竜の口沢の場合 $H = 150 \text{ m}$, $L = 4100 \text{ m}$ である。基盤岩の粗度係数として $n = 0.035$ を用い、一般的な値と考えられる $I = 0.001 \text{ m}^2/\text{s}$ を用いると $U = 3.6 \text{ m/s}$, $D = 0.53 \text{ m}$, $\varepsilon = 0.0036$, $F = 1.6$ となる。したがって ε は十分小さいとみなしてよい。式(9)中で ε の1次以上の項を無視するとよく知られた次の等流近似の式となる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{u^2}{h^{4/3}} \quad (10)$$

上述の議論は、勾配が急な河川の大スケールの現象を考えると、等流近似が可能となることを示している。

式(2), (5)を無次元化し、河川上流端で流量が零という境界条件を用いて積分すると次式が得られる。

$$uh^2 = x \quad (11)$$

河床変動は式(3)及び(4)より次のように表される。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\left(u^2 h^{-1/3}\right)^{\gamma} + \varphi \quad (12)$$

ここで $\bar{t} = Tt$, $\bar{\varphi} = (H/T)\varphi$, $T = H/\beta$, $\bar{\tau}_r = \rho g n^2 U^2 D^{-1/3}$, T は侵食による地形変化の時間スケール, φ は T を基準とした隆起速度である。式(10), (11)及び(12)を用いて次式が得られる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -x^{3\gamma/8} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{13\gamma/16} + \varphi \quad (13)$$

上式を解く際に必要となる境界条件は式(6)を無次元化して次のようになる。

$$x=1 \text{ で } \eta=0 \quad (14)$$

3. 3 解

式(13)は一般的には非線形波動方程式であるが $\gamma = 16/13$ の時だけ線形となる。ここでは簡単化のために $\gamma = 16/13$ を仮定する。粘着性材料の場合の γ の値が0.5から2程度の値となることを考えれば、この値は決して無理な仮定ではない。境界条件(14)の下で式(13)の解は次のように得られる。

$$\eta = \eta_h + \eta_n; \quad \eta_h = f\left(\frac{13}{7}x^{7/13} + t\right), \quad \eta_n = \begin{cases} \varphi t, & 0 \leq x \leq \left(1 - \frac{7}{13}t\right)^{7/13} \\ \frac{13}{7}\varphi\left(1 - x^{7/13}\right), & \left(1 - \frac{7}{13}t\right)^{7/13} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (15)$$

ここで η_h 及び η_n はそれぞれ斉次解及び非斉次解である。 f は任意の関数であり、初期条件によって決定される。例えば初期条件として $\eta(x, 0) = \eta_0(x)$ が与えられた時の f は次式で表される。

$$f\left(\frac{13}{7}x^{7/13} + t\right) = \eta_0\left(\left[\frac{7}{13}\left(\frac{13}{7}x^{7/13} + t\right)\right]^{13/7}\right) \quad (16)$$

斉次解は速度 $x^{6/13}$ で上流方向に進んでいく波動を表している。すなわち河道上に与えられた擾乱は減衰することなく速度 $x^{6/13}$ で上流方向へと伝搬していくことになる。但しここでいう擾乱とは、例えば地盤の相対的隆起によって発生した遷急点などである。また非斉次解は、初期条件が $\eta_0 = 0$ の時の解であり、初期条件として平坦面が与えられた時の侵食過程を表している(図-4a参照)。図より平坦部から急勾配部へと遷移する点は地盤の隆起と共に上流へと伝搬していくものの、それより下流部の形状は全く変化せず、 $\eta = \frac{13}{7}\varphi(1 - x^{7/13})$ の曲線上に載っていることがわかる。この形状を平衡形状と呼ぶことにする。

初期条件として一様勾配の斜面を与えた時の河床縦断形状の時間変化を図-4b,cに示す。b,cは初期形状として $\eta_0 = 0.5(1-x)$ を与えた。また隆起速度はbで $\varphi = 1$, cで $\varphi = 0.1$ を与えてある。隆起速度の大きいbのケースでは縦断形状は徐々に急になりながら最終的に平衡形状になることがわかる。隆起速度の小さいcの場合、下流部では平衡形状の領域が広がり、上流部の勾配は時間と共に急になっていく。そして、理論的には $t = 13/7$ 以降、縦断形状は平衡形状になる。

ここでは隆起は連続的であると仮定しているが日本で見られる隆起運動の多くは地震時に見られる間欠的

な隆起である。その場合下流端に発生したステップは時間と共に遷急点となり $\eta = \frac{1}{7}\varphi(1-x^{7/13})$ の曲線上を速度 $x^{6/13}$ で上流に向かって進んでいくことになる。図-4d,eでは下流端に遷急点を有する $\eta_0 = 0.5(1-x) + 0.1$ の初期形状を与えた。隆起速度はdで $\varphi = 1$, eで $\varphi = 0.1$ を与えてある。(図では簡略化のため遷急点をステップで表しているが、実際は勾配があまり大きくなると本理論を適用することは出来なくなること)に注意。)やはり $t = 13/7$ 以降、縦断形状は平衡形状となる。

4. 竜の口沢への適用と考察

前述したように青葉山一帯はほぼ一様に0.65mm/yrの速度で隆起を続けたが、広瀬川の侵食能力は十分大きいため、竜の口沢の侵食基準面である広瀬川水面の絶対的な標高はほとんど変化していない。そのとき本理論の適用が可能となる。但し、実測された竜の口沢及び万助沢の場合、その合流点において大きな流量の変化が存在する。今、流域内の降水量と流出率をほぼ一定と仮定し、流量が集水面積に比例するとする。集水面積より推定される流量の変化を図-5に示す。流量は合流点($x=0.56$)より上流域で $uh^2 = 0.6x$ 、下流域で $uh^2 = 0.6x + 0.4$ と表される。流域争奪の時期を20000年前とする。20000年前に $\bar{x} = 4100$ m地点にあった遷急点は現在 $\bar{x} = 2300$ m($x=0.56$) 地点にある。それより下流における遷急点の位置と時間の関係は $t = 3.1[1 - (0.6x + 0.4)^{7/13}]$ で表されるから、流域争奪が起こってから現在までの時間は $t = 0.47$ となる。 $H = 150$ m, $\bar{\varphi} = 0.65$ mm/yrであるから $T = 43000$ yrs, $\beta = 3.5 \times 10^{-3}$ m/yr, $\varphi = 0.18$ となる。ところが $\varphi = 0.18$ を用いると、計算値は実測値と比べてあまりに小さすぎてしまう。この原因は限界剪断力の効果を無視した点にある。限界剪断力の効果を最も簡単な形で取り入れるために侵食速度を次のように表す。

$$E = \beta \left[\left(\bar{\tau}^{16/13} - \bar{\tau}_h^{16/13} \right) / \bar{\tau}_r^{16/13} \right] \quad (17)$$

ここで $\bar{\tau}_h$ は限界剪断力であり底面剪断力がこの値より小さいと侵食は起こらない。このとき式(13)は次のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \begin{cases} q^{6/13} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma + \varphi, & -x^{6/13} \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \geq \sigma \\ \varphi, & -x^{6/13} \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \leq \sigma \end{cases}, \quad q = \begin{cases} 0.6x, & 0 \leq x \leq 0.56 \\ 0.6x + 0.4, & 0.56 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (18a, b)$$

ここで $\sigma = \beta (\bar{\tau}_h / \bar{\tau}_r)^{16/13} T / H$ である。式(18a)よりわかるように底面剪断力が限界剪断力を上回っているとき限界剪断力の効果は隆起速度を増加させるのと同じ効果を持つ。ここでは実測値と合うように $\sigma = 0.32$ とした。この $\sigma = 0.32$ の値が妥当であるかどうかについては現在のところ不明である。実験等で同定するのは不可能であり、他のよく似た岩質の河道を調査するしか方法はない。今後の課題である。

図-6に $\sigma = 0.32$ の値を用いて本理論から得られた縦断形状を示す。 $t = 0$ (years, (2万年))での縦断形状

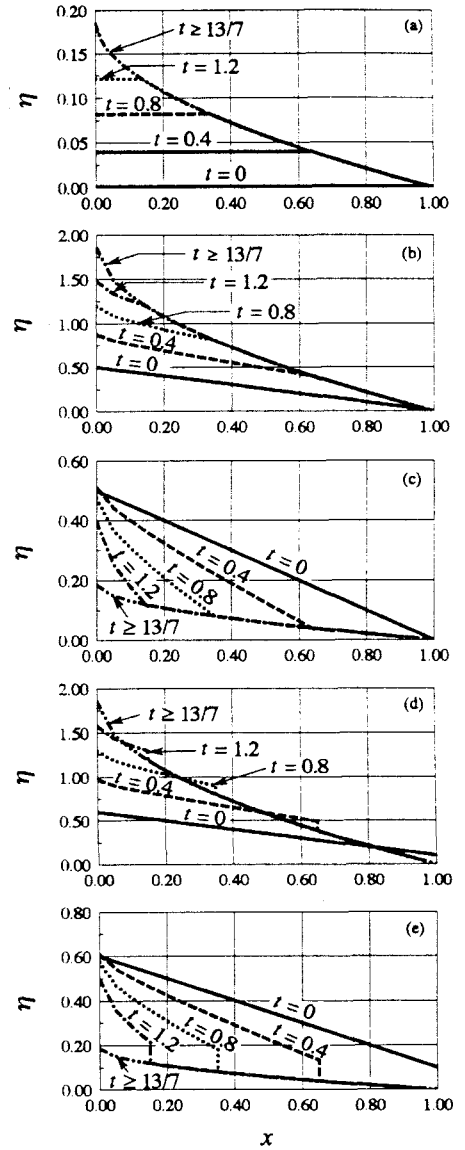


図-4 河道縦断形状の時間変化

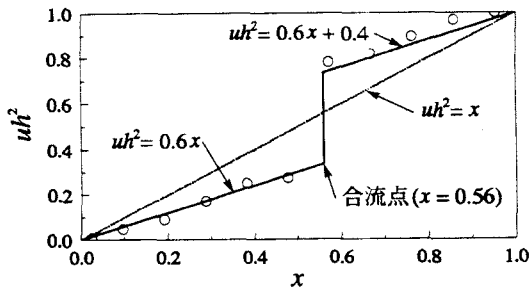


図-5 流下方向への流量の変化（図中○は集水面積から推定される流量を示す）

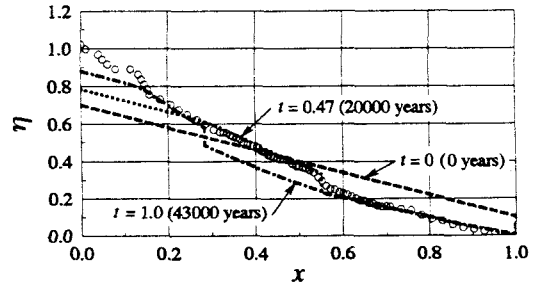


図-6 竜の口沢及び万助沢への本理論の適用結果

を $\eta = 0.6(1-x) + 0.1$ と仮定し、破線で示してある（ここでも遷急点をステップで表してあることに注意）。この初期形状の勾配は竜の口沢周辺の段丘の状況から考えるとほぼ妥当な値である。現在(20000years)の縦断形状を点線で示す。さらに43000years(2万3千年後)の縦断形状を一点鎖線で示した。

$t = 0.47$ 及び 1.0 において、それぞれ $x = 0.25$ 及び 0.15 付近で僅かながら遷急点が認められる。これは底面剪断力が限界剪断力となる地点であり、いわゆる谷頭部に相当する。このように理論は谷頭部に相当する遷急点の存在を表現し得るものの、底面剪断力が限界剪断力以下の領域において、理論値は実測値と大きくずれてしまう。これは仮定した初期形状が不適当であったためと考えられる(限界剪断力以下の領域の形状は侵食が生じないため初期形状で決まってしまう)。ここでは初期形状として単純な直線を与えたが、竜の口沢及び万助沢が流域争奪が起こる前から存在していたことを考えれば、初期形状はより複雑なものであった(既に侵食が進んでおり、上流部でより急勾配となる下に凸の形状をしていた)と考えるべきであろう。

ここで示した理論と実測値の比較には多くの仮定や不確定要素が含まれており、理論の検証という意味は持ち得ない。むしろ理論と実測値の示す定性的な形状の類似性に注目すべきであろう。

5. おわりに

本研究では、山地河川の縦断形状に関する基本的性質の理解のために、非常に簡略化した方程式群を用いて理論解析を行った。その結果、侵食が卓越する河道においては、地盤の隆起や侵食基準面の変化によって生じた遷急点(knick point)は、進むにつれて速度を落としながら上流方向に伝搬していくことが理論的に示された。また、時間の経過と共に最終的には $\eta = \frac{1}{2}\varphi(1-x^{7/13})$ で表されるような平衡形状へと近づいていくことがわかった。また、限界剪断力を考慮すると谷頭部の遷急点を表現出来ることがわかった。ここでは支配方程式が線形方程式となるように侵食速度を仮定したため、厳密解が求められ、解の挙動は非常に単純な線形波動となった。しかし、基盤岩の侵食速度を厳密に見積もれば、支配方程式には非線形性が現れることが予測される。その場合、波動には非線形性が現れ、より複雑な挙動を示すことになる。これについては今後の課題である。

参考文献

- 1) Iwagaki, Y.: On the analysis of mechanism of river bed variation by characteristics, Memoirs, Fac. of Eng., Kyoto Univ., 1956.
- 2) 芦田和男・道上正規：混合砂礫の流砂量と河床変動に関する研究，京都大学防災研究所年報，第14号B，1971.
- 3) 平野宗夫：Armoring を伴う河床低下について，土木学会論文集，第195号，1971.
- 4) 地学団体研究会仙台支部編：新編仙台の地学，きた出版，1980.
- 5) 澤井健二・芦田和男：粘着性流路の侵食と横断形状に関する研究，土木学会論文集，第266号，1977.