

掃流砂量に関する力学的解釈

Bed-load Rate in View of Two Phase Flow Dynamics

江頭進治 * ・ 宮本邦明 ** ・ 伊藤隆郭 ***

By Shinji EGASHIRA, Kuniaki MIYAMOTO and Takahiro ITO

Discussions are made on the flow with bed-loads as well as on bed-load transport rates in view of solid-liquid two phase flow dynamics. Dynamic and kinematic conditions of the bottom or the interface between moving layer and non-moving one are described using constitutive relations of debris flows and momentum conservation equation. The equations governing flow field are derived, and solved numerically for velocity profile, sediment concentration profile, thickness of solid-liquid mixture flow, flow resistance, and sediment transport rates. These results emphasize that the flow with bed loads can be specified as a limit of debris flows.

Key words : bed-load transportation, constitutive relations, flow resistance, debris flow, solid-liquid two phase flow

1. はじめに

掃流砂の運動やそれを伴う流れについては、最近、粒子～流体モデルによる解析^{1),2),3)}が盛んに行われるようになり、粒子～流体の interaction や理論河床の考え方など議論すべき課題は残されてはいるものの、これらによって流れの理解は深められている。ところで、掃流砂を伴う流れは、粒子が移動している層に着目すると、砂と水の混相流としての性格を持っていることが期待される。とくに、掃流力が大きいところではそうであり、固液混相流としての取扱い、このような流れを理解するには合理的である。

著者らは、掃流砂を伴う流れについては、まず、固液混相流としての力学法則により説明を行うことが試みられるべきであり、その取扱いが不合理であるとしたら、それはなぜなのか、あるいは、そのような取扱いに限界があるとしたら、その限界を示す条件とその理由はどのように示されるのかを明らかにする必要があると考えて、土石流に関する構成則^{4),5)}をもとにして、その極限としての掃流砂を伴う流れの流砂量、抵抗則ともに説明し得るモデルの構築を目指している⁶⁾。同様の研究が高橋ら⁷⁾、橋本ら⁸⁾によってなされているが、現状では、構成則に対する基本的な考え方の相違が、掃流砂を伴う流れの力学解釈の相違となって表れている。

本論文では、著者らが提案する構成則に基づいて、掃流砂を伴う流れの構造と流砂量、とりわけ流砂量関数がどのように表現され、どの程度説明されるかについて考察を行っている。

* 正会員 工博 立命館大学教授 理工学部土木工学科 (〒525-77 滋賀県草津市野路町 1916)

** 正会員 工博 鳥取大学助教授 地域共同研究センター (〒680 鳥取県鳥取市湖山町南 4-101)

*** 学生会員 立命館大学大学院 環境社会工学専攻 (〒525-77 滋賀県草津市野路町 1916)

2. 構成則と流れの構造

著者らは、以下のような土石流の構成則を提案している。すなわち、粒子の密度が液体に比べ大きいような固液混相の重力流動では、図-1 に示すように、流れの応力が粒子相互の静的な接触による速度場に依存しない粒子間応力と粒子の非弾性衝突による応力、および粒子間隙の流体（液体）の応力の和として、次のように表されることを示した。^{4),5)}

$$p = p_s + p_d + p_w \quad (1)$$

$$\tau = \tau_y + \tau_d + \tau_f \quad (2)$$

p_s は静的な粒子間圧力、 p_d は粒子の衝突による動的圧力、 p_w は間隙水の圧力、 τ_y は降伏応力、 τ_d は粒子衝突に伴うせん断応力、 τ_f は間隙水のせん断に伴う応力であり、 p_s を除いてこれらはそれぞれ次のように与えられている。

$$\left. \begin{aligned} p_d &= \rho k_d (\sigma/\rho) e^2 c^{1/3} d^2 (\partial u / \partial z)^2, \quad \partial p_w / \partial z = -\rho g \cos \theta \\ \tau_y &= p_s \tan \phi_s, \quad \tau_d = \rho k_d (1-e^2) (\sigma/\rho) c^{1/3} d^2 (\partial u / \partial z)^2, \quad \tau_f = \rho k_f (1-c)^{5/3} / c^{2/3} d^2 (\partial u / \partial z)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 e は反発係数、 ρ は水の密度、 σ は砂粒子の密度、 c は砂粒子の体積濃度、 d は砂粒子径、 ϕ_s は砂粒子の内部摩擦角、 k_d 、 k_f は実験定数で、 $k_d = 0.0828$ 、 $k_f \cong 0.16$ 程度の値である。

運動方程式に式(1),(2),(3)の関係をを用いると、定常等流の条件のもとで、その x 、 z 成分は次のように表される。

$$p_s \tan \phi_s + \rho f_d d^2 (\partial u / \partial z)^2 + \rho f_f d^2 (\partial u / \partial z)^2 = \int_z^h \rho \{ (\sigma/\rho - 1) c + 1 \} g \sin \theta dz \quad (4)$$

$$p_s + \rho f_{pd} d^2 (\partial u / \partial z)^2 = \int_z^h \rho (\sigma/\rho - 1) c g \cos \theta dz \quad (5)$$

$$f_d = k_d (1-e^2) (\sigma/\rho) c^{1/3}, \quad f_f = k_f (1-c)^{5/3} / c^{2/3}, \quad f_{pd} = k_d (\sigma/\rho) e^2 c^{1/3}$$

ここで、未知数は、 u 、 c 、 p_s の3つである。それに対して、方程式は2つしかない。これは、流れの構成則に関する情報が不足していることを示している。運動学的な物理量である u 、 c が構成則になり得ないのは明白であるから、 p_s に関して構成則が与えられる必要がある。 p_s は流れ場の関数でないから、 p_s がその引数として持ちうる可能パラメータは c のみである。一方、粒子が移動している層と静止している層の境界で、外力としてのせん断応力と粒子間の静的なせん断応力が釣り合っていなければならない。したがって、静止している層での粒子の濃度が c_* であるとする、 $c = c_*$ のとき、 $p_s = p - p_w$ である必要がある。これより、 p_s として、次の形が想定される。

$$p_s / (p_s + p_d) = f(c, c_*) \quad (6)$$

ここに、 $f(c, c_*)$ は $c = c_*$ で1となる関数である。

静的な応力のオーダを見積もることを目的とする場合、粒子移動層の濃度分布を一定として取り扱っても十分である。この場合、 $p_s / (p_s + p_d)$ は一定値をとるので、近似的に流動層中での p_s を次式のように置くことができる。

$$p_s / (p_s + p_d) = \text{const} < 1 \quad (\text{ただし、} z=0 \text{ で } p_s = p - p_w) \quad (7)$$

著者らはそのような観点から、静的な応力を式(7)あるいは、これと同義の形において、土石流の抵抗則と流砂量について考察を行った。その結果、無理のない物理定数を用いて、構成則が流れを説明できること、ま

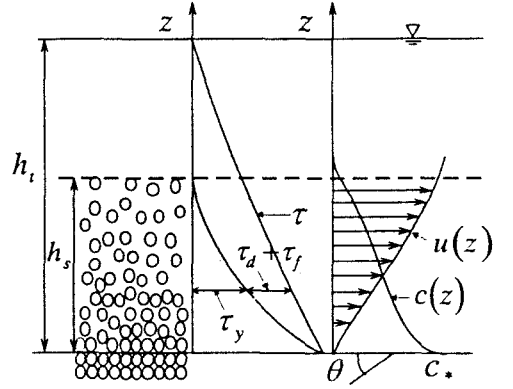


図-1 流れの模式図

た、粒子移動層では、全応力の80%以上が静的応力であるという結論を得ている^{4)・6)}。

ところで、掃流砂を伴う流れの抵抗則や流砂量を土石流の構成則を用いて評価するとき、濃度の深さ方向の分布が必要である。そのためには、 p_s の構成則を定めなければならない。現段階では、 $p_s/(p_s + p_d)$ を表す構成則を理論的に得るための十分な情報が得られていないので、ここでは、関数形を次式のように置いて議論する。

$$p_s/(p_s + p_d) = f(c) = (c/c_s)^{1/n} \quad (8)$$

まず、粒子の静止層と移動層の理論的な境界、ここでは以下理論河床と呼ぶことにするが、これは次のように定まる。すなわち、理論河床では、外力のせん断力が静的な摩擦力と釣り合っている必要があることから、式(3),(4)より p_s を消去して $z = 0$ とすると、次式を得る。

$$\bar{c} \equiv \int_0^{h_t} c dz / h_t = \tan \theta / \{(\sigma/\rho - 1)(\tan \phi_s - \tan \theta)\} \quad (9)$$

すなわち、理論河床 $z = 0$ では、流れの深さ方向の平均体積濃度 $\bar{c}$ が高橋の濃度式を満たさなければならないことがわかる。これは、また、深さ方向の濃度分布は、流動深にわたる平均濃度に対する式(9)を満たす必要があることを意味している。

濃度分布は、式(4),(5)に式(8)を適用し、これらの式から速度勾配を消去して、 z で微分することにより、次式のように表される。

$$(h_t - z) \frac{\partial F}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} = F - c \quad (10)$$

$$\text{ここに、} F = \frac{f_{pd} \tan \theta}{(\sigma/\rho - 1) \left[f_f + f_d - f_{pd} \tan \theta - f(c) \{ f_f + f_d - f_{pd} \tan \phi_s \} \right]}$$

ここに、 f_{pd}, f_f, f_d は式(5)の下に示されている。こうして、構成則、流速分布を表す方程式、濃度分布を表す方程式が定まり、流れの構造が定まったことになる。ただし、ここで得られる流れについては、二つの点に注意を払わなければならない。一つは、構成則そのものに関する問題から派生する事柄で、もう一つは、構成則に関わる事柄ではあるが、むしろ流れの構造と大きな関係を持っている問題である。

構成則のうち、静的な粒子の接触応力について、その圧力とせん断力の比 $\tan \phi_s$ をここでは一定とおいている。これは、むしろ一般的には粒子濃度の関数であり、濃度の減少に伴って小さくなることが知られている⁹⁾。もう一つは、粒子濃度が小さいところ、あるいは濃度勾配の大きいところにおける粒子間隙の空間スケールの大きさと粒子間隙内部を充填している流体の乱れのスケールの大小関係に関連する問題である。この点に関する議論は稿を改めることにして、ここでは触れない。というのは、水深粒径比 h/d があまり大きくない流れでは、粒子間隙の空間スケールと乱れの空間スケールの間にはさほど大きな差がないことが期待され、本研究の結果は多少大きめの抵抗を示す程度で、大きな差異は生じないであろうと想定されるからである。これら二つの問題は、流速分布、濃度分布に多少影響を及ぼすこと、後者については流砂量関数には殆ど影響を及ぼさないことが分かっている。

3. 流速分布と濃度分布

掃流砂を伴う流れの流速分布と濃度分布は、砂粒子層については式(10)と式(4)あるいは式(5)を連立させ、これらを式(9)の条件のもとで数値的に解くことで得られる。ただし、水流層の流速分布については、便宜的に次のものを用いる。粒子流動層 h_s と水流層との境界を形式的に粒子濃度5%の位置に定め、仮想原点 η_0 を導入して得られる対数則を適用することにすれば、これは次式で表される。

$$\frac{u(z)}{u_w} = \frac{u_i}{u_w} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z - h_s + \eta_0}{\eta_0} \quad (11)$$

ここに、 $u_w = \sqrt{gh_w \sin \theta}$, u_i は $z = h_s$ における流速で、 η_0 は粒子間間隙スケールで、 η_0 は粒子間間隙スケールに関する江頭らの式⁵⁾より次式で与えられる。

$$\eta_0 = a l_0 = a \sqrt{k_f} \left\{ (1-c)/c \right\}^{1/3} d \quad (12)$$

($a \approx 1, c = 0.05$)

図-2 は、このようにして得られた流速分布、濃度分布に関する計算結果と実験結果¹⁷⁾とを比較した一例である。計算には、 $e = 0.85$, $\phi_s = 34.0^\circ$

$k_f = 0.16$, $k_d = 0.0828$ を用いている。また計算の対象とした実験の条件は図中に示している。

図中の点線は粒子流動層と流水層の境界であり、これは実験において観察される粒子を高濃度に含む層と低濃度の層との間の比較的明瞭に見える境界を示している。流速分布についてみると、計算値と実験値はほぼ一致しているものの、境界近傍では若干の隔たりがある。これは、先に述べたように、この領域で粒子間隙の空間スケールと乱れの空間スケールとの関係が考慮されていないことによる。図-2 には、計算から得られたせん断応力の各成分、すなわち静的応力と粒子間の動的応力および間隙流体によって受け持たれるせん断応力の深さ方向の分布も示している。河床では、せん断応力の全てが静的な応力で支えられている。河床から上方に向かうにつれ、せん断応力に占める静的な応力の割合が減少しているのがわかる。とくに、濃度が急激に減少する領域で、静的な応力が急激に減少すること、また、この領域で、間隙流体の受け持つせん断応力が急激に増加することが理解される。

図-3 は、粒子流動層との境界を粒子濃度が5%の位置に選んだときの層厚比 h_s/h_i に関する計算値と実験値を比較したものである。実験値については、粒子流動層 h_s に変動があること、および河床より下の部分でのクリーピングの影響により理論河床の位置が深めに判定されているため、層厚比が小さくなっている可能性がある。これらを考慮すると、両者はよく一致していることが分かる。

4. 抵抗則と輸送濃度、流砂量

得られた流速分布、濃度分布から断面平均流速、粒子の輸送濃度、単位幅流砂量を求める。なお、粒子

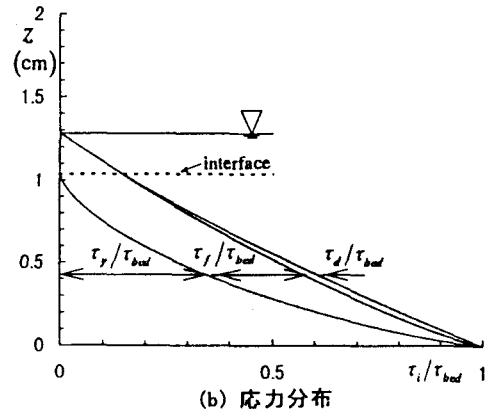
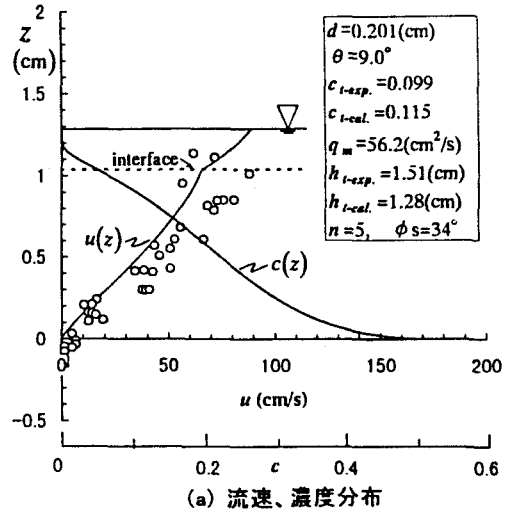
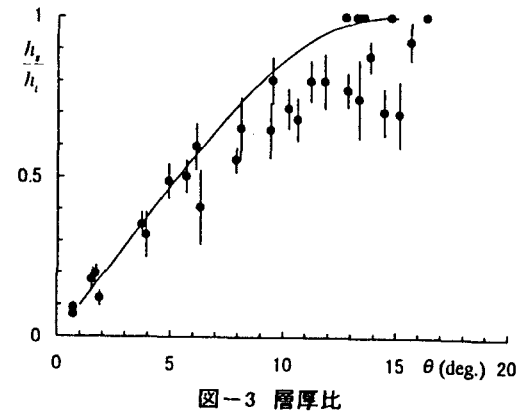


図-2 流速分布、濃度分布および応力分布



の輸送濃度 c_t 、および、単位掃流砂量 q_b は、それぞれ、次のように定義される。

$$c_t = \int c u dz / \int u dz \quad (13)$$

$$q_b = \int c u dz \quad (14)$$

図-4 は、平均流速を抵抗則の形で表したものである。粒子の輸送濃度 c_t をパラメータにして整理してある。輸送濃度が大きくなるにしたがって抵抗が急激に増加している様子が分かる。また、図には、比較のため、粗面固定床における抵抗則（対数則、ただし、 k_s は相当粗度）も載せている。

清水流においては、河床において、対数則との接続を議論する必要があるため、掃流力が掃流砂の移動限界に等しい場合について考察する。この場合、本研究のモデルによれば、粒子は粒径よりもかなり薄い層厚で移動することになる。乱れの空間スケールは粒子間隙の空間スケールと接続する必要があるので、混合距離の原点は、 $z = h_s$ ではなく、河床の平均的な粒子間隙に相当した大きさ η_0 だけ下方にとる必要がある。したがって、式(12)において $c = c_t$ とすれば、これは次式で与えられる。

$$\eta_0 = a l_0 = a \sqrt{k_s} \{ (1 - c_t) / c_t \}^{1/3} d \quad (15)$$

これを式(11)に代入して、対数型抵抗則の基準に合わせるために、 $z = h_s (\ll d)$ から $z = h_t$ まで積分すると次式を得る。

$$\frac{v}{u_*} = a + \frac{1}{\kappa} \left\{ \left(1 + \frac{\eta_0}{h_w} \right) \ln \frac{h_w + \eta_0}{\eta_0} - 1 \right\} \quad (16)$$

図-4 には、式(16)で $a = 1$ とした曲線も示している。

また、図には、一般の対数則型の抵抗則とともに、Song ら¹⁰⁾のデータも示している。これらより h/d の小さい領域では、掃流砂を伴う流れの抵抗は清水流のものよりも大きいことが分かる。

図-5 は、輸送濃度 c_t と勾配の関係を示したものである。 c_t は、相対水深 h_t/d によりわずかに異なるものの、理論、実験^{14),15),16)}ともほぼ勾配の関数で表されることが、また、理論が実験値をよく説明することが分かる。

図-6 は、無次元流砂量と無次元掃流力との関係を示している。無次元量は、次のように定義されている。

$$\Phi = q_b / \sqrt{(\sigma/\rho - 1) g d^3}, \quad \tau_* = u_*^2 / (\sigma/\rho - 1) g d$$

ここに、 $u_* = \sqrt{g h_t \sin \theta}$ である。理論から得られる両者の関係は、厳密には勾配により異なるが、この差異はほとんど無視し得るほどのものである。実験データは文献 15) のものである。図には、比較のため Brown¹¹⁾、Graf・Suszka¹²⁾、篠原・椿¹³⁾の提案する流砂量式、および著者の一人が提案している近似式⁶⁾も示している。これらは、驚くほどよく一致している。これは、図に示す経験則に含まれている係数が、構成則に含まれるパラメータ、 $\sigma/\rho, e, \phi_s$ のみによって合理的に説明できることを意味している。

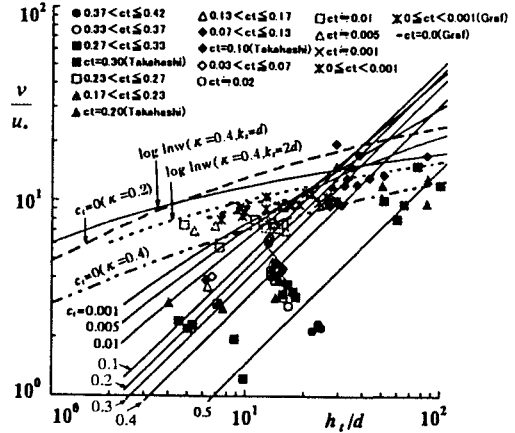


図-4 抵抗則

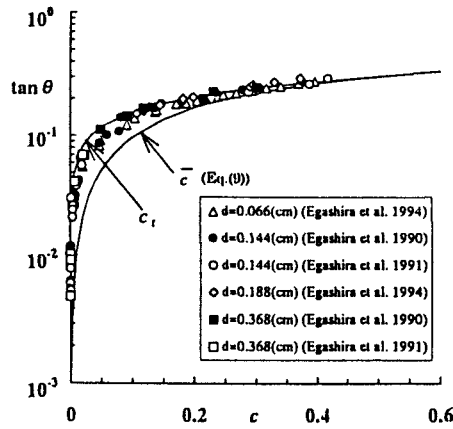


図-5 輸送濃度と勾配の関係

5. 結語

掃流砂を伴う流れの抵抗則と流砂量を固液混相流の力学に基づいて検討した。用いた構成則は、液体より密度が大きい粒子の重力流動について提案されているもので、粒子間の静的な接触応力、動的な衝突応力、および粒子間隙の液体が受け持つ応力の線形和で表されるものである。これらと運動方程式から、理論河床、粒子の濃度分布および流速分布が定まり、これらより抵抗則と流砂量が求められた。得られた流速分布、抵抗則、流砂量は、従来の研究や実験結果と比較され、良好な一致を見ている。とくに、流砂量に関する計算値は、Brown、Graf & Suszka および篠原・椿式らの経験則とほぼ一致している。このことは、これらの経験則に含まれる係数を合理的に説明でき、しかもこれらは、 $\sigma/\rho, e, \phi_s$ によって定められていることを意味している。なお、ここでは、力学的な考察と理論の展開を容易にするために、2. で示したように流れの構造を決定する二つのファクターを省略している。たとえば、粒子流動層と水流層との境界近傍より上方の流れの構造については、詳細には議論せず、流速分布には式(11)を適用していることである。 h_s/h_t と c が上方の流れの構造とはほぼ独立に定まるため、省略したファクターは、流砂量（図-6 の関係）には殆ど影響を及ぼさない。しかしながら、その影響は、抵抗則の表現に多少出ている。これについては、稿を改めて議論する予定にしている。

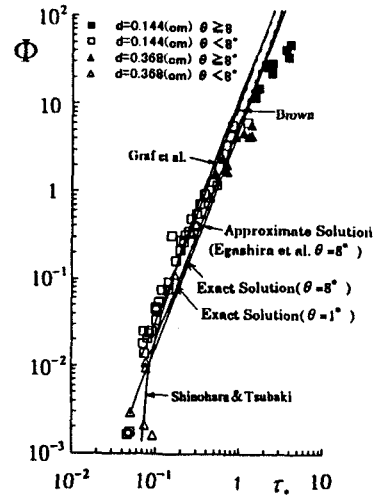


図-6 無次元掃流力と
無次元流砂量の関係

参考文献

- 1) Sekine, M. et al. : Mechanics of Saltating Grains. II, *Jour. Hydr. Eng. ASCE*, Vol.118, 536-558, 1992.
- 2) 関根ら : Bed Material Load の輸送機構に関する研究, 土木学会論文集, 545/II-36, 23-32, 1996.
- 3) Gotoh, H. et al. : Discrete probabilistic model of bed-load layer as granular assemblies, *Jour. Hydroscience and Hydraulic Eng., JSCE*, Vol.14, 13-23, 1996.
- 4) 宮本邦明 : Newton 流体を含む粒子流の流動機構に関する基礎的研究, 立命館大学学位論文, 39-72, 1985.
- 5) 江頭ら : 土石流の構成則に関する研究, 京大防災研年報, 32B-2, 487-501, 1989.
- 6) 江頭ら : 連続体モデルに基づく流砂量式の誘導, 水工学論文集, 35 巻, 441-446, 1991.
- 7) 高橋 保 : 土石流の停止・堆積機構に関する研究, 京大防災研年報, 25B-2, 327-348, 1982.
- 8) 橋本ら : 掃流状集合流動に関する抵抗則と流砂量, 土木学会論文集, 54/II-36, 33-42, 1996.
- 9) 最上武雄 : 土質力学, 第 8 章, 技報堂.
- 10) Song, T. et al. : Uniform flow in open channels with movable gravel bed, *Jour. of Hydraulic Res.*, Vol.32, No.6, 861-876, 1994.
- 11), 12) 河村三郎 : 土砂水理学 1, 第 5 章, 253-256, 森北出版.
- 13) Graf, W. H. et al. : Sediment Transport in Steep Channel, *J. Hydroscience and Hydr. Eng., JSCE*, Vol.5, No.1, 11-26, 1987.
- 14) 江頭ら : 連続体手法による掃流砂量式に関する研究, 京大防災研年報, 34B-2, 261-274, 1991.
- 15) 江頭ら : エネルギー散逸機構に基づく流砂モデル, 京大防災研年報, 33B-2, 293-306, 1990.
- 16) 江頭ら : 砂粒子を高濃度を含む流れに及ぼす粒子径の影響, 京大防災研年報, 37B-2, 359-369, 1994.
- 17) 千代啓三 : 土石流・泥流の流れの構造に関する研究, 京大修士論文, 1995.