

雲仙・水無川における土石流の発生条件の特性の評価

Estimation of the occurrence condition of a debris flow

高畑 洋*・平野 宗夫**・森山 聡之***・川原 恵一郎****

By Hiroshi TAKABATAKE, Munee HIRANO, Toshiyuki MORIYAMA and Keiichirou KAWAHARA

The occurrence condition of a debris flow is described by time of concentration and critical amount of rainfall. Since the occurrence condition varies stochastically with time, statistical analysis is required. Since there is no information about their distribution, nonparametric method may be efficient.

In this paper, the EM algorithm was used for nonparametric estimation of distribution of concentration time and critical amount of rainfall. The method was applied to the Mizunashi River in Unzen Volcano. It is demonstrated that the distributions of the concentration time and the critical amount of rainfall are approximated by a lognormal distribution.

Keywords : Debris flow, Statistical analysis, Nonparametric estimate, EM algorithm, Unzen Volcano

1. はじめに

雲仙・水無川においては、'91年以降火山活動の活発化に伴い、土石流が頻発していたが、火山活動の沈静化に伴い、土石流の発生条件も変化していると思われる。降雨によって発生する土石流は、降雨の到達時間とその間の雨量によって規定される¹⁾。しかし、土石流の発生条件は毎回の降雨ごとに変動し、同じような降雨波形をもつような降雨においても、土石流が発生したりしなかったりすることがあり、決定論的な考えに基づく発生条件の評価には無理がある。そこで本研究においては、土石流の発生条件が確率的に変動すると考え、土石流の発生条件を統計学的に評価することを試みる。そのためには、降雨の到達時間と限界雨量という2つの変量をもつ分布関数を与える必要がある。そこで、まず最初の段階として、Kaplan-Meier推定法流のノンパラメトリックな分布関数の推定法を2変量の場合に拡張し、分布のおおよその形を検討する。

2. 土石流の発生条件の評価法

2.1 土石流の発生限界とその推定法について

平野ら¹⁾は斜面における側方浸透流の水深がある限界値（一般には堆積層の厚さ D ）になったとき崩壊がはじまると考え、土石流の発生条件として次式を導いた。

$$l \geq k T \sin \theta / \lambda \quad (1)$$

* 学生員 九州大学大学院修士課程 工学研究科水工土木学専攻 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

** 正会員 工博 九州大学教授 工学部建設都市工学科 (同上)

*** 正会員 工博 九州大学助手 工学部建設都市工学科 (同上)

**** 学生員 九州大学大学院博士課程 工学研究科水工土木学専攻 (同上)

および

$$R_c = \frac{\lambda D}{\cos \theta} \leq \int_{t-T}^t r(u) du \quad (2)$$

ここに、 l は斜面の長さ、 θ は斜面の傾斜角、 k は透水係数、 λ は空隙率、 r は降雨強度、 t は時刻および T は到達時間で次式で与えられる。

$$T = \frac{\lambda l}{k \sin \theta} \quad (3)$$

これらより、

$$r_c = \frac{Dk}{l} \tan \theta \leq r_a = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t r(u) du \quad (4)$$

したがって、土石流の発生限界は到達時間 T と限界雨量 R_c (または限界降雨強度 r_c) によって規定されることになる。 T と、 R_c または r_c の評価のために、(2)式と、(3)または(4)式中の D , λ , θ , k および l を現地測定によって必要な精度で得ることはきわめて困難である。そこで、降雨のデータと土石流の発生記録から評価を行うことになる。

T および R_c の評価のために、まず一連の降雨のデータから次式で定義される時刻 $t-T$ から t 間の累加雨量 $R(\tau, t)$ を求める。

$$R(\tau, t) = \int_{t-T}^t r(u) du \quad (5)$$

次に、種々の時刻における $R(\tau, t)$ の最大値 $R_m(\tau)$ を求め、これを土石流が発生した場合とそうでない場合とにわけ、各降雨における $R_m(\tau)$ と τ との関係をグラフにプロットする。理想的な場合、すなわち理論が完全でデータに誤差が無く、かつ到達時間と限界降雨が常に一定である場合には、土石流が発生させる降雨の $R_m(\tau)$ の描く曲線はすべてグラフ上の一点 (T, R_c) の上側を通り、そうでない降雨の $R_m(\tau)$ の描く曲線は、すべて同点の下側を通ることになる。したがって、発生の場合の曲線群の下限包絡線と不発生の場合の上限の包絡線を描くと、2本の曲線は図-1 (a) に示すように点 (T, R_c) の近傍で交差することになる。しかし、実際には土石流発生場の特性は時間的に変動するので、 T と R_c も変動し、発生限界は点ではなく図-1 (b) に示すような大きさを持った領域で表されと考えられる。

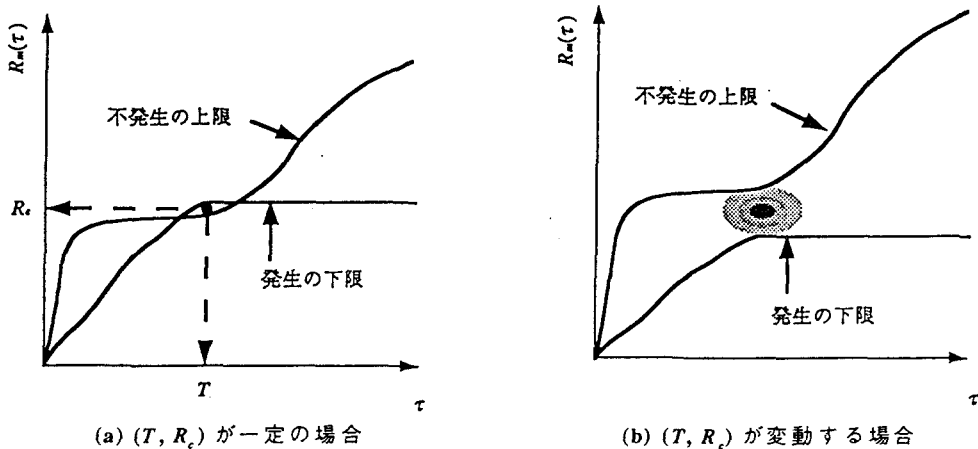


図-1 $R_m(\tau)$ と土石流の発生・不発生

2.2 土石流の発生条件の統計学的な推定法について

(a) 最尤推定法による発生条件分布の推定法

土石流の発生条件は図-1(b)のように $(\tau, R_m(\tau))$ 平面上に、ある密度分布をもって広がっていると思われる。

そこで、 T と R_c の同時密度分布関数 $f(T, R_c; \phi)$ を仮定する。ここで ϕ は分布関数のパラメータベクトルである。

ϕ を最尤推定法により推定する方法は以下ようになる。 n 個の降雨中 i ($i = 1, \dots, n$) 番目の降雨において、2.1の τ 時間雨量最大値 $R_m(\tau)$ のデータとして、 $R_{mi}(\tau)$ を得たとする。このとき、降雨 i が土石流を発生させる確率 P_i は、 $\tau - R_m(\tau)$ 平面上に $R_{mi}(\tau)$ が描く曲線の下側の領域に (T, R_c) が存在している確率であるから、

$$P_i = \int_0^\infty \left\{ \int_0^{R_{mi}(\tau)} f(T, R_c; \phi) dR_c \right\} dT \quad (6)$$

となる。

n 個の降雨データと土石流の発生記録による対数尤度関数は

$$l(\phi) = \sum_{i=1}^n \{ \delta_i P_i(\phi) + (1 - \delta_i) [1 - P_i(\phi)] \} \quad (7)$$

ここに、 δ_i は土石流を発生させた降雨で $\delta_i = 1$ 、そうでない降雨で $\delta_i = 0$ である。この $l(\phi)$ を最大にする ϕ の値 $\hat{\phi}$ が ϕ の最尤推定量である。

(b) 土石流の発生条件の分布のノンパラメトリックな推定法

しかし、 (T, R_c) または (T, r_c) は、どのような分布に従っているか判らない。そこで、その見当をつけるためにはノンパラメトリックな分布関数の推定法が有効である。

降雨は離散的なデータとして観測されているので、離散量で取り扱うことにする。図-1に示された平面を $J \times K$ 個の離散的な点に分割する。 (T, R_c) が、離散化して得られた点の番号 (j, k) に相当する点をとる確率が π_{jk} の多項分布をしていると仮定する。このとき、降雨 i が土石流を発生させる確率 P_i を、パラメータベクトル $\pi = \{\pi_{jk} | j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K\}$ で置き換えて表示すると

$$P_i = \sum_{j=1}^J \sum_{k, R_c \leq R_{mi}(\tau)} \pi_{jk} \quad (8)$$

ゆえに π_{jk} の最尤推定量は、(8)式を(7)式の $P_i(\phi)$ に代入して計算される $l(\pi)$ を各 π_{jk} で偏微分したものを0としたものの解である。しかし、これを陽の形で求めることは困難である。そこで以下のように、EMアルゴリズム²⁾を用いた反復計算法によって π_{jk} を求める。まず、もし仮に n 回の観測（降雨）すべてにおいて (T, R_c) が明確に観測できる場合、点の番号 (j, k) に相当する (T, R_c) が n 回中、 C_{jk} 回観測されたとすると、(7)式に対応する対数尤度関数 $l_0(\pi)$ は、

$$l_0(\pi) = \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=1}^{K-1} C_{jk} \ln \pi_{jk} + \sum_{k=1}^{K-1} C_{Jk} \ln \pi_{Jk} + \sum_{j=1}^{J-1} C_{jK} \ln \pi_{jK} + C_{JK} \ln \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=1}^{K-1} \pi_{jk} - \sum_{j=1}^{J-1} \pi_{jK} - \sum_{k=1}^{K-1} \pi_{JK} \right\} \quad (9)$$

となる。ただし、 π_{jk} に関係のない項は省略した。ここでは、多項分布のパラメータ π_{jk} について、

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \pi_{jk} = 1 \quad (10)$$

であることを用いた。実際の観測においては、降雨 i ($i = 1, \dots, n$) の τ 分雨量最大値のデータ $(\tau, R_{mi}(\tau))$ と土石流発生・不発生の記録 δ_i が与えられるのみである。そこで、EMアルゴリズムにおけるExpectation Stepは次のようになる。いま、 n 個の、降雨と土石流発生・不発生のデータを $M = \{(\tau, R_{mi}(\tau)), \delta_i; i = 1, \dots, n\}$ で表す。データ M および π の近似値として $\pi^{(p)}$ を与えたときの $l_0(\pi)$ の条件付期待値 $Q(\pi, \pi^{(p)})$ は、

$$\begin{aligned} Q(\pi, \pi^{(p)}) &= E[l_0(\pi) | M, \pi^{(p)}] \\ &= \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=1}^{K-1} E[C_{jk} | M, \pi^{(p)}] \ln \pi_{jk} + \sum_{k=1}^{K-1} E[C_{Jk} | M, \pi^{(p)}] \ln \pi_{Jk} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{J-1} E[C_{jK} | M, \pi^{(p)}] \ln \pi_{jK} + E[C_{JK} | M, \pi^{(p)}] \ln \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=1}^{K-1} \pi_{jk} - \sum_{j=1}^{J-1} \pi_{jK} - \sum_{k=1}^{K-1} \pi_{JK} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここで、降雨 i と任意の点 (T, R_c) に関して、以下の $g_i(j, k)$ を定義する。

$$g_i(j, k) = \begin{cases} 1 & R_c \leq R_{mi}(t), \delta_i = 1 \text{ or } R_c > R_{mi}(t), \delta_i = 0 \\ 0 & R_c \leq R_{mi}(t), \delta_i = 0 \text{ or } R_c > R_{mi}(t), \delta_i = 1 \end{cases} \quad (12)$$

このとき、(11)式における $E[C_{jk} | M, \pi^{(p)}]$ は、(7)式の δ_i と(8)式の P_i を用いて、

$$E[C_{jk} | M, \pi^{(p)}] = \sum_{i=1}^n \frac{g(j,k) \pi_{jk}^{(p)}}{\delta_i P_i + (1 - \delta_i)(1 - P_i)} \quad (13)$$

この(13)式を得て、Expectation step がなされたことになる。

EMアルゴリズムの Maximization step は、(11) で示される π の関数 Q を最大化するような π を計算することである。すなわち Q を π_{jk} で偏微分した Q の偏導関数の値を0としたものの解を計算して、

$$\pi_{jk} = \frac{E[C_{jk} | M, \pi^{(p)}]}{n} \quad (14)$$

となる。EMアルゴリズムの性質から、(14)式により、初めに与えた $\pi_{jk}^{(p)}$ が、 π_{jk} の最尤推定量 $\hat{\pi}_{jk}$ に近づく方向にむけて π_{jk} に修正される。そこで、(14)式で得られた π_{jk} を再び(13)式の $\pi_{jk}^{(p)}$ に代入して新たな π_{jk} を計算することを繰り返し、 $\pi_{jk}^{(p)}$ が収束したときの値をもって $\hat{\pi}_{jk}$ とする。反復計算における $\pi_{jk}^{(p)}$ の初期値は、例えば、 n 個の雨量データ中にその値が存在する点の π_{jk} について(10)式を満足するようにすべて等しい値を与え、それ以外の点においては、すべて0を与えるようにする。

3. 解析結果

上述の手法を雲仙・水無川における土石流に適用して、土石流発生条件の分布関数を求める。用いる資料は、気象庁の雲仙測候所で記録された'91年5月から'96年9月までの10分雨量データと地震波形から得られた土石流発生時刻の記録である。

土石流の発生条件を規定する到達時間 T と限界雨量 R_c ならびに限界降雨強度 r_c の分布のノンパラメトリックな推定を上述のEMアルゴリズムを用いて行う。なお、ここでは降雨のない時間が2時間以上の場合を降雨の区切りとする。また、雲仙・水無川においては'93年7月以降、土石流の発生条件が変化している³⁾とみられるため、分布関数の推定期間を'93年7月の前後で分け、'91年5月~'93年6月と'93年7月~'96年9月について計算を行う。結果は図-2 ~ 図-4 に示されている。

図-2 は、 T の推定累積分布関数で、 T の確率 $\pi_j = \sum_{k=1}^K \pi_{jk}$ の累積確率 $\Pi_j = \sum_{m=1}^j \pi_m$ を表わしている。

'93年7月前後の T の平均値は、それぞれ49.2分および43.8 分、標準偏差は、それぞれ36.5分および35.4分となる。また、両期間の $\ln T$ の平均値は、それぞれ3.52 (=

$\ln 33.9$) および3.41 (= $\ln 30.2$)、標準偏差は、それぞれ0.93

(= $\ln 2.54$) および0.89 (= $\ln 2.44$) となる。図中の直線は、

$\ln T$ の平均値と標準偏差に基づく対数正規分布の累積分布関数を表す。この図によると、 T の分布は、おおよそ対数正規分布で近似できることがわかる。また、 T の分布に関しては、'93年7月前後は、ほとんど変化はない。

図-3 は、 R_c の推定累積分布関数で、 R_c の確率 $\pi_k = \sum_{j=1}^J \pi_{jk}$ の累積確率 $\Pi_k = \sum_{m=1}^k \pi_m$ を表わしている。

'93年7月前後の R_c の平均値は、それぞれ9.4mmおよび26.9mm、標準偏差は、それぞれ5.5mmおよび33.8mmとなっており、両期間で大きく変化している。また、両期間の $\ln R_c$ の平均値は、それぞれ2.02 (= $\ln 7.53$) と2.73 (= $\ln 15.4$)、標準偏差は、それぞれ0.72 (= $\ln 2.06$) と0.94 (= $\ln 2.55$)

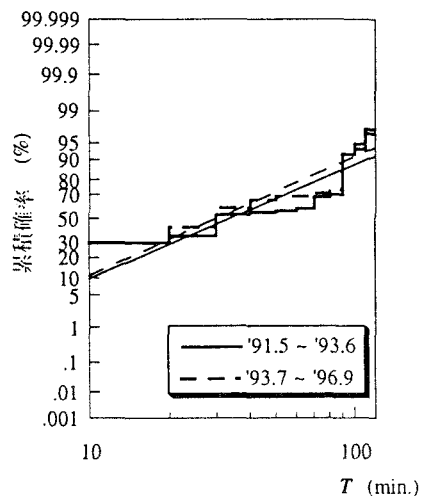


図-2 到達時間の推定分布関数
(直線は対数正規分布)

である。図中の直線は $\ln R_c$ の平均値と標準偏差に基づく対数正規分布の累積分布関数を表す。それによると、 R_c の分布は'93年7月以前において、おおよそ対数正規分布で近似できているが、'93年7月以降においては対数正規分布の当てはめには無理があるようである。なお、ノンパラメトリック推定による T と R_c の相関係数は、'93年7月以前において0.33, 以降において0.66となり、 $\ln T$ と $\ln R_c$ の相関係数は、'93年7月以前において0.50, 以降において0.70である。

図-4 は、 r_c の推定累積分布関数で、

$$\Theta_k = \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^J \sum_{a=j(m-1)+1}^{jm} \pi_{ja} \text{ で表わされる。}$$

'93年7月前後の r_c の平均値は、それぞれ3.2mm/10min. および6.3mm/10min., 標準偏差は、それぞれ2.0mm/10min. および3.6mm/10min. となっており、両期間で変化している。また、両期間の $\ln r_c$ の平均値は、それぞれ0.90 (= $\ln 2.46$) および1.64 (= $\ln 5.15$), 標準偏差は、それぞれ0.75 (= $\ln 2.11$) および0.70 (= $\ln 2.01$) である。図中の直線は $\ln r_c$ の平均値と標準偏差に基づく対数正規分布の累積分布関数を表す。この図によると r_c の分布は'93年7月前後とも、おおよそ対数正規分布で近似できている。また、分布関数のノンパラメトリック推定による T と r_c の相関係数は、'93年7月以前において-0.67, '93年7月以降において-0.03, $\ln T$ と $\ln R_c$ の相関係数は、'93年7月以前において-0.62, '93年7月以降において-0.31 である。

4. 土石流の発生条件の確率分布に関する一考察

上述の結果から、 T , R_c および r_c の分布が対数正規分布で近似できることが判った。これら諸量は(2) ~ (4) 式で与えられるが、このように多数の因子が積の形で関係する量においては、中心極限定理により対数正規分布がよく当てはまることが知られている。そこで例えば、 $X_1 = \ln T$, $X_2 = \ln R_c$ とし、これらの同時密度が2変量正規分布 $N(\mu_{X1}, \sigma_{X1}, \mu_{X2}, \sigma_{X2}, \rho)$ に従うとすれば、 (T, R_c) の同時密度分布 f は

$$f(T, R_c) = \frac{1}{2\pi\sigma_{X1}\sigma_{X2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(\ln T - \mu_{X1})^2}{\sigma_{X1}^2} - \frac{2\rho(\ln T - \mu_{X1})(\ln R_c - \mu_{X2})}{\sigma_{X1}\sigma_{X2}} + \frac{(\ln R_c - \mu_{X2})^2}{\sigma_{X2}^2}\right]\right\} \quad (15)$$

となる。この式において、パラメータが与えられれば、これを(5)式に適用することにより、土石流の発生確率を求めることができる。

5. 結論

雲仙・水無川において'91年以降に発生した土石流に関し、土石流の発生記録と降雨データから、土石流

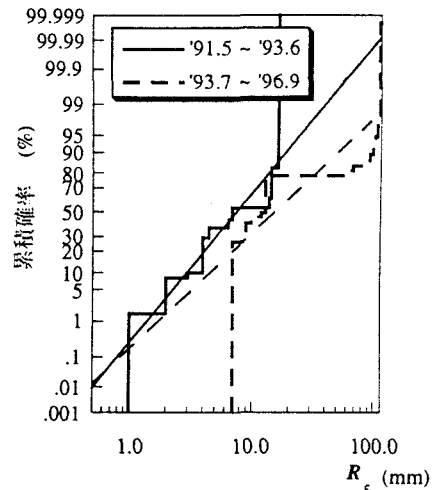


図-3 限界雨量の推定分布関数 (直線は対数正規分布)

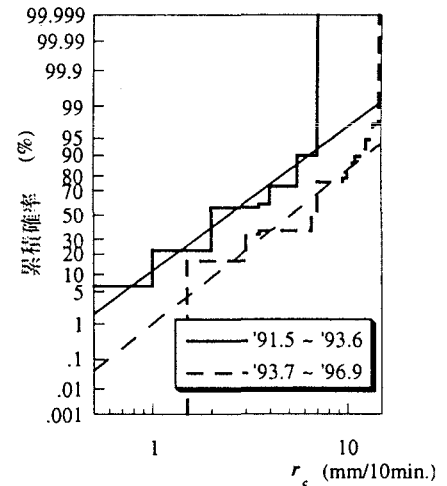


図-4 限界降雨強度の推定分布関数 (直線は対数正規分布)

の発生条件を規定する降雨の到達時間 T および限界雨量 R_c の分布のノンパラメトリックな推定をEMアルゴリズムを用いて行った。その結果、 T 、 R_c および r_c はおおむね対数正規分布に従うこと、'93年7月を境に発生条件が大きく変化していることなどが明らかとなった。また、推定された分布関数から、降雨が土石流を発生させる確率が計算でき、降水確率予報と同種の土石流の確率予測への可能性が示された。

今後は、さらに到達時間と限界雨量の同時密度分布を検討した上で、ここで得られた結果をもとに、対数正規分布などの特定の分布を統計学的モデルに導入したパラメトリックな解析法、さらに発生条件の変化の統計学的検定法についてについて検討する予定である。

参考文献

- 1) 平野宗夫・疋田誠・森山聡之：活火山流域における土石流の発生限界と流出規模の予測，第30回水理講演会論文集，181-186，1986
- 2) Dempster, A. P., Laird, N. M., and Rubin, D. B. : Maximum likelihood from imcomplete data via the EM algorithm, Journal of the Royal Statistical Society B(39), 1-38, 1977
- 3) 平野宗夫・橋本晴行・川原恵一郎：雲仙・水無川における流出特性とその変化，水工学論文集第40巻，1027-1032，1996