

円形断面水路の波状段波に関する水理解析

Hydraulic Analysis of Undular Bore in Open Channels with Circular Cross Section

細田 尚*・岩田通明**・村本嘉雄***・古八健夫****

By Takashi HOSODA, Michiaki IWATA, Yoshio MURAMOTO and Takeo FURUHACHI

Rapidly varied unsteady flow in open channels with the circular cross section is investigated to predict the hydraulic transients in the underground floodways, which have been constructed to mitigate the flood disaster in the metropolitan area for the last decade. The momentum equation for open channel flows with the circular cross section including the effect of the vertical acceleration is derived in this study. The basic equations are applied to the laboratory test on the undular bore, and are verified through the comparison of the calculated results to the experimental ones.

Keywords: unsteady open channel flow, undular bore, numerical analysis

1.はじめに

近年、都市域の内水災害を軽減するために、地下河川および地下調節池が数多く建設され計画されている。このような地下水路の設計に関して、我国でも流入立坑部のエネルギー損失と空気連行量、ポンプ急停止時の非定常流などの現象把握が水理実験および数値解析を用いて行われている[1,2,3,4]。

本研究は、通常円形断面として施工される地下河川の初期湛水過程や流量急変時に生じると考えられる基本的な水理現象として、円形断面水路の波状段波を取り上げ、まず現象を再現するための基礎式を導出した。すなわち、円形断面において鉛直加速度項を考慮した場合の圧力分布を誘導し、運動方程式に代入して断面積分することにより鉛直加速度を考慮した1次元運動量方程式を導いた。さらに、導かれた基礎式を用いて波状段波の数値解析を行い、実験結果と比較することにより、数値解析モデルの適用性と限界を考察した。

2.円形断面水路の鉛直加速度を考慮した運動量方程式

1次元開水路流れの運動量方程式を導くとき、通常圧力の静水圧分布が仮定されているが、

* 正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科土木工学専攻

(〒606-01 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工修 (株)建設技術研究所技術第3部

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学研究科土木工学専攻

**** 学生会員 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻

波状段波を再現するためには圧力分布に鉛直加速度の効果を考慮する必要がある[5,6]。長方形断面の場合には、単位幅について導かれた圧力分布を用いることができるが、円形断面水路の場合は別途導く必要がある。そこで、図-1に示した座標系の下で円形断面の場合の圧力分布を求め、流れ方向の運動方程式を断面積分することにより鉛直加速度を考慮した1次元運動量方程式を導く。ただし、本研究では図-1に示したような水深が円管路の半径より小さい場合のみ考慮する。

水深積分された連続式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

を0から y まで積分することで、流速の y -方向成分 v が求まる。ここに、 h :局所水深、 (u, v, w) :流速ベクトルの成分、 (x, y, z) :空間座標、 t :時間。さらに、 u は断面内の一様性を、 v は水深方向の一様性を仮定している。

$$v = -\frac{1}{h} \left(\int_0^y \frac{\partial h}{\partial t} dy + \int_0^y \frac{\partial hu}{\partial x} dy \right) \quad (2)$$

連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

に(2)式を代入し $\int_z^{z_s} dz$ の積分を行うと、流速の z -方向成分 w が次式のように導かれる。

$$w = -\frac{z - z_b}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{z_s - z}{h^2} \frac{\partial h}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial h}{\partial t} dy + \int_0^y \frac{\partial hu}{\partial x} dy \right) \quad (4)$$

ここに、 z_s は路床から測った水位であり、水路幅方向の一様性を仮定している。

(2)式と(4)式を運動方程式の z -方向成分

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5)$$

に代入し $\int_z^{z_s} dz$ の積分を行うと圧力の分布(6)式が求まる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = & g(z_s - z) \cos \theta + \frac{h^2 - (z - z_b)^2}{2h} F_1 - \frac{(z_s - z)^2}{2h^2} \frac{\partial z_b}{\partial y} (yF_2 - f_{10}F_3) \\ & - \frac{(z_s - z_b)^2}{2h^3} \left[2 \frac{\partial z_b}{\partial y} (yF_4 - f_{10}F_5) + \frac{\partial^2 z_b}{\partial y^2} \left\{ y^2 F_6 + (f_{10})^2 F_7 - 2yf_{10}F_8 \right\} \right] \\ & + \frac{(z_s - z)^2}{2h^4} \left(\frac{\partial z_b}{\partial y} \right)^2 \left\{ y^2 F_6 + (f_{10})^2 F_7 - 2yf_{10}F_8 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、急変非定常流において最も卓越していると考えられる水位 z_s の時間に関する2階微分項 $\partial^2 z_s / \partial t^2$ を含む F_1 および F_2 のみ考慮することとし、 F_1 と F_2 の表示を示せば以下になる。

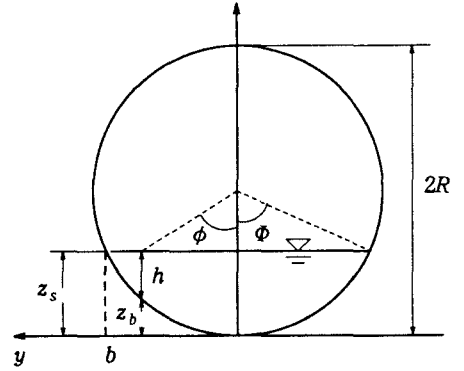


図-1 座標系

$$F_1 = \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^2 z_s}{\partial x \partial x} + u^2 \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial z_s}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (7)$$

$$F_2 = \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_s u}{\partial x \partial x} + u \frac{\partial^2 z_s}{\partial x \partial x} + u \frac{\partial^2 z_s u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial z_s u}{\partial x} \quad (8)$$

(6) 式の圧力分布を断面積分すれば次式が得られる。

$$\int_{-b}^b \int_{z_b}^{z_s} \frac{p}{\rho} dz dy = -gh_G A \cos \theta + \frac{1}{3} (2z_s^2 b - 2z_s f_{11} + f_{12}) F_1 - \frac{1}{12} (2z_s^2 b - 2z_s f_{11} + f_{12}) F_2 \quad (9)$$

ここに、 b は水面の半幅であり、(9) 式中の f_{11} と f_{12} は次式で定義される。

$$f_{11} = \int_{-b}^b z_b dy = 2Rb - \frac{R^2}{2} (\sin 2\Phi + 2\Phi) \quad (10)$$

$$f_{12} = \int_{-b}^b z_b^2 dy = 4R^2 b - \frac{2}{3} b^3 - R^3 (\sin 2\Phi + 2\Phi) \quad (11)$$

さらに、本研究では F_1 および F_2 を $\partial^2 z_s / \partial x^2$ と近似し、 $\partial^2 z_s / \partial x^2$ を 1 次元連続式を考慮して次式で評価する。

$$\frac{\partial^2 z_s}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2b} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (12)$$

3. 水理実験の概要

波状段波の実験は、図-2 に示す円形断面の水槽を用いて行われた。水路中央に仕切り板を設け、初期状態として仕切りの左側に h_l 、右側に h_r だけ湛水し、瞬間的に仕切り板を取り除いて波状段波を発生させた。図-2 中に示す 4 点(1-4)で波高計(東京計測(株)製 HK-101)を用いて水位の時間変化を計測した。実験条件を表 4-1 に示す。

表-1 実験条件

Run	h_l (cm)	h_r (cm)	
97	9.0	7.0	
96	9.0	6.0	
95	9.0	5.0	breaking
65	6.0	5.0	
64	6.0	4.0	

図-3 および図-4 は、それぞれ Run96、Run95

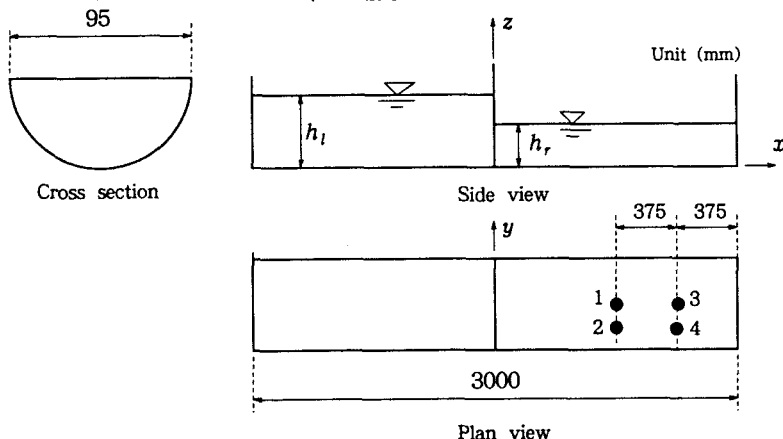


図-2 実験水槽の概要

の P1 点での水深の時間変動を示したものである。Run96 は第 1 波および反射波ともに波状を示しており、Run95 では、第 1 波目は不連続的な波形を示し、波状段波が碎波していると考えられる。その場合でも、反射波は波状を示している。

4. 数値解析法の概要

基礎式として、開水路流れの 1 次元連続式 (13) 及び運動量方程式 (14) を用いる。運動量方程式では水路の一様性を仮定するとともに、圧力項には (9) 式を用いる。

[連続式]

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial uQ}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^b \int_{z_b}^{z_s} \frac{p}{\rho} dz dy = gA(\sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho g R}) + \frac{\partial -u'^2 A}{\partial x} \quad (14)$$

ここに、A:断面積、Q:流量、R:径深、u:断面平均流速、 u' :乱れ速度、 τ_b :壁面せん断応力、 θ :水路床勾配。本研究では $\theta=0$ なので、以後 $\cos \theta=1$, $\sin \theta=0$ とする。

壁面せん断応力はマニング則を用いることとし、 $n=0.01$ とする。数値解析法は、著者等が満水の管路への Air Cavity の侵入の解析に用いた方法 [7] と同一であり、運動量方程式に Harten の提案するスキーム [8] を適用するとともに、鉛直加速度項 ((9) 式右辺第 2、3 項) に陰形式の離散化を用いて時間積分を行った。

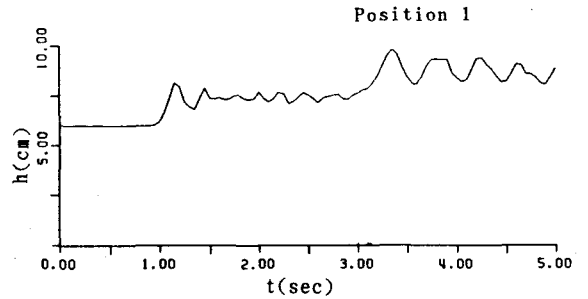


図-3 水深の時間変化(Run96,P1)

5. 計算結果と実験結果の比較

図-5 に $h_l=9.0\text{cm}$, $h_r=6.0\text{cm}$ の場合、図-6 に $h_l=6.0\text{cm}$, $h_r=5.0\text{cm}$ の場合の結果を示す。実験結果はいずれも碎波が生じていない場合であり、計算結果と実験結果はほぼ適合している。次に図-7 に $h_l=9.0\text{cm}$, $h_r=5.0\text{cm}$ の場合の結果を示す。この場合、第 1 波目の段波は碎波しており、計算結果は碎波した状態を再現していない。ただし、波状の反射波については計算と実験はほぼ適合している。

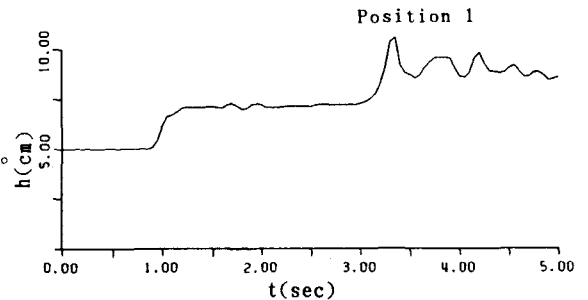


図-4 水深の時間変化(Run95,P1)

そこで、次に波状段波と碎波した状態の段波とともに再現する方法について考察する。

6. モデルの改良

波状から碎波した状態への遷移を再現するために、(15) 式のような減衰関数を導入し、鉛直加速度項に乗じる。すなわち、碎波した状態が鉛直加速度項を無視した運動量方程式で再現され、碎波しない状態が鉛直加速度項を考

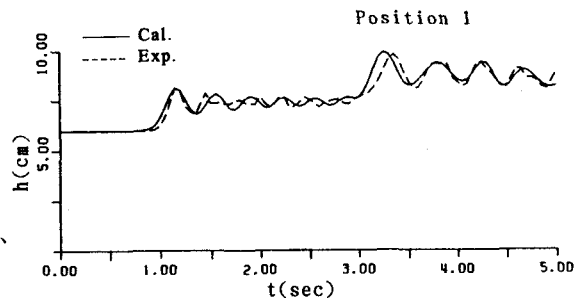


図-5 (a) 実験結果と計算結果の比較 (Run96, P1)

慮することによって再現できると考え、中間の状態を鉛直加速度項に減衰関数を乗じることにより表現する。(15)式では、碎波は水面勾配が限界値を越えると始まると考え、水面勾配が大きくなるほど鉛直加速度項の効果が小さくなるようになっている。

$$f_{dump} = \exp \left[-\beta \left(\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{max} - \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{cr} \right) \right] \quad \text{for } \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{max} \geq \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{cr}$$

$$= 1.0 \quad \text{for } \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{max} < \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{cr}$$

(15)

数値計算では、(15)式中の $\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{max}$ として各時間ステップの流れの全領域の最大水面勾配(波状段波では段波の前面で生じると考えられる。)を用い、減衰関数を全領域にわたって鉛直加速度項に乘じた。ただし、二つのパラメータ β と $\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{cr}$ の値を試行錯誤的に定めて計算を行った。Run95について $\beta=5.0, \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{cr}=0.150$ の場合を図-8に、 $\beta=5.0, \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{cr}=0.225$ の場合を図-9に示す。図-8を見ると、最初に到達する波の碎波した状態については再現できているが、反射波については逆に適合しなくなっている。図-9は図-7と図-8の中間となっている。以上の結果から、波状段波から碎波状態および碎波状態から波状への遷移を同時には十分再現できていない。今後、限界値を水深の関数にするなどさらにモデルの改良が必要と考えられる。

7. おわりに

本研究で得られた結論を要約すると以下のようになる。

- (1) 円形断面の開水路急変非定常流を解析するために、円形断面における鉛直加速度を考慮した圧力分布を導き、断面積分することで運動量方程式を示した。
- (2) 円形断面の水槽を用いて波状段波の水理実験を行い、水深の時間変化を明らかにした。
- (3) 得られた運動量方程式を数値解析し、計算結果と実験結果を比較した。段波が碎波していない場合、両者はよく適合した。

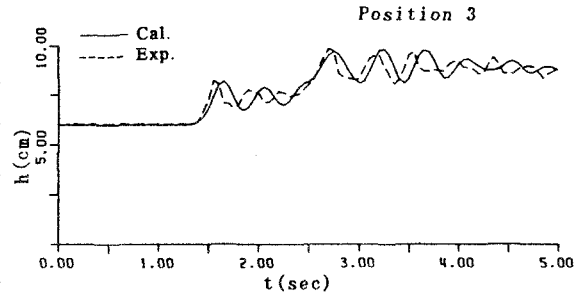


図-5(b)実験結果と計算結果の比較
(Run96, P3)

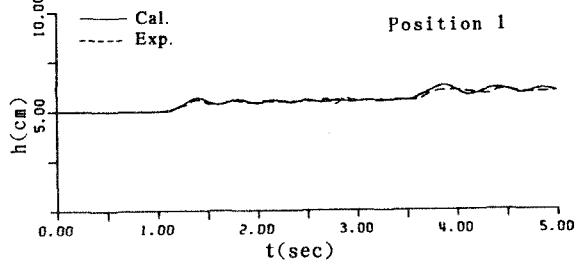


図-6(a)実験結果と計算結果の比較
(Run65, P1)

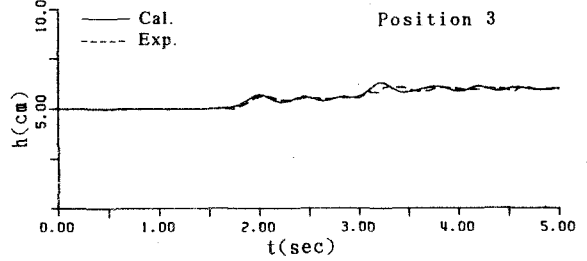


図-6(b)実験結果と計算結果の比較
(Run65, P3)

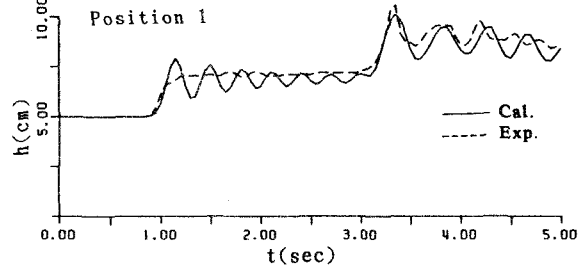


図-7(a)実験結果と計算結果の比較
(Run95, P1)

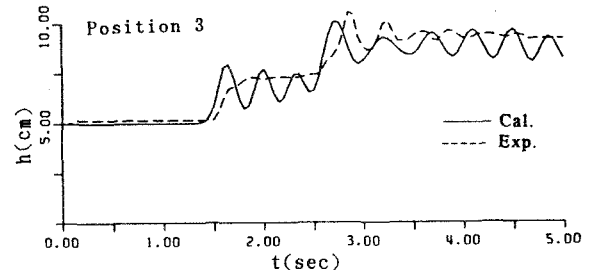


図-7(b)実験結果と計算結果の比較
(Run95, P3)

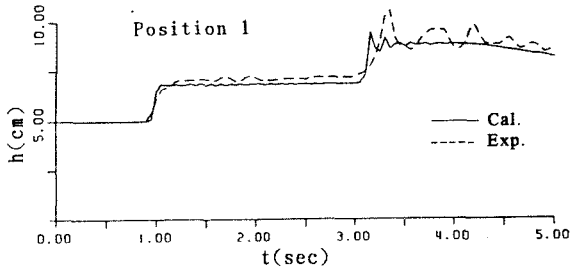


図-8 減衰関数を導入した計算結果
(Run95, $\beta = 5.0$, $|\partial h / \partial x|_{cr} = 0.150$)

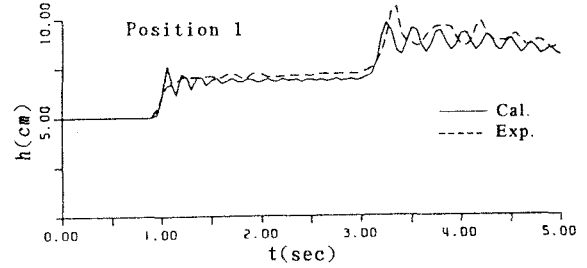


図-9 減衰関数を導入した計算結果
(Run95, $\beta = 5.0$, $|\partial h / \partial x|_{cr} = 0.225$)

(4) 第1波が碎波した場合、不連続な段波と波状段波およびその中間の状態を表現するために、運動量方程式の鉛直加速度項に減衰関数を乗じて数値計算を試みた。その結果、パラメータの値によって第1波目の碎波状態は再現できるようになったが、碎波状態から波状と波状段波から碎波状態への遷移を同時には十分再現再現できず、今後の研究課題と考えられた。

参考文献

- [1]栗城稔・木内豪・田中義人：圧力式地下河川の流入立坑のエネルギー損失特性，土木技術資料 36-8, pp.42-47, 1994.
- [2]戸田圭一・井上和也：渦流式立坑の水理特性について，水工学論文集 第39巻, pp.583-588, 1995.
- [3]斉藤憲・戸田圭一・太田良雄：開水路流・管路流が共存した流れの非定常流解析モデルの構築，水文・水資源学会 1994 年研究発表会要旨集, pp.298-391, 1994.
- [4]多田彰秀・細田尚・井上和也・北原政宏：管路・開水路流れ境界面の発生する管水路のサージング現象，京都大学防災研究所年報, No.37 B-2, pp.475-488, 1994.
- [5]Sandoover, J.A. and O.C.Zienkiewicz: Experiments on surge waves, Water Power, Vol.9, No.11, pp.418-424, 1957.
- [6]細田尚・多田彰秀：鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析，水工学論文集 第38巻, pp.457-462, 1994.
- [7]細田尚・多田彰秀・井上和也・北原政宏：管路・開水路流れ境界面の伝播を伴う急変非定常流の解析法に関する基礎的研究，土木学会論文集, No.503/2-29, pp.89-97, 1994.
- [8]Harten, A.: High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, J.Comp.Phys., Vol49, pp.375-393, 1983.