

FDSを用いた開水路における衝撃波を含む流れの数値計算

Numerical Computation of Open Channel Flow with Shock Wave using FDS method

大川 秀典*・清水 康行**・藤田 睦博***

By Hidenori OKAWA, Yasuyuki SHIMIZU and Mutsuhiro FUJITA

Numerical calculation of flow including shock wave is one of the important tools in the practical river engineering works. Flux Difference Splitting, FDS, scheme is one of the numerical method to simulate the flow with shock wave. In this method, the theory of nonlinear characteristic wave and the concept of numerical flux are taken in account and it is very easy to be applied to various condition of open channel flow. In this paper, a numerical model using FDS scheme for two dimensional open channel flow is developed and was applied to several different hydraulic conditions. The calculated results are compared with the theoretical and experimental results and good agreement is obtained.

Keywords: FDS, shock wave, numerical flux

1. はじめに

衝撃波を含む計算法は、常射流混在流れ、ダム決壊、氾濫流などの河川学上非常に重要な現象に適用される。特に、河道および河道内構造物の設計外力としての流体力を算定する際の基礎となるデータを与えることとなるため、より正確な計算法の開発が望まれている。近年、開水路における衝撃波を正確に計算する手法としてMacCormack法が頻繁に用いられるようになってきている^{1,2,3)}。しかしながら、実河川へ適用するに際しては人工粘性を経験的に与える必要があり、さらに極端な水位差を伴う流れや常射流混在流れにおいては安定した計算が難しいといった問題があり、必ずしも一般的ではない。本研究においては、最近、航空力学の分野等で圧縮性流れの計算法として注目されているFDS法(Flux Difference Splitting scheme: 流束差分分離法)を開水路流れに適用することを試みる。FDS法においては従来の差分法とは異なり、数値流束といった概念を導入し、この数値流束を流れの特性の伝播方向に分割して配分をおこなう。このFDSは衝撃波の捕捉を目的に開発された手法であり、理論的にも計算アルゴリズム上においても明快であり取り扱いも易しい。したがって、多次元問題や、一般座標系への拡張も容易であり、より一般的な実河川の問題へ適用が可能と考えられる。

本研究では、まず元々圧縮性流体を対象に構築されているFDS法の基礎式を非圧縮性開水路の2次元流れに対して適用可能なものへと再構築をおこなう。その際に将来の実河川への適用を考慮して、一般座標系を採用することとする。これを用いて計算モデルを開発し、2次元段波の理論と比較することによりモデルの検証をおこなう。次にこのモデルを常射流混在の条件でおこなわれた固定床実験に適用し、モデルの検証をおこなう。さらに、MacCormack法では困難な、河床の一部が水面上に現れるような、非常に厳しい条件での実験の再現も試みることにする。

2. 基礎式

2次元の浅水流方程式を以下の保存型で表す。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} = \Omega \quad (1)$$

$$Q = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\epsilon \frac{\partial uh}{\partial x} \\ -\epsilon \frac{\partial vh}{\partial x} \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\epsilon \frac{\partial uh}{\partial y} \\ -\epsilon \frac{\partial vh}{\partial y} \end{pmatrix}, \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ gh \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{gn^2u\sqrt{u^2+v^2}}{h^{1/3}} \\ gh \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{gn^2v\sqrt{u^2+v^2}}{h^{1/3}} \end{pmatrix}$$

ここで、 h は水深、 u, v は流速成分、 z は河床高、 n は粗度係数、 g は重力加速度、 ϵ は渦動粘性係数、 (x, y) は直交する座標軸である。(1)式を一般座標系 (ξ, η) に変換する。座標 (x, y) と一般座標 (ξ, η) との関係は以下に示す通りである。

- * 学生員 北海道大学大学院 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)
- ** 正会員 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科 (同上)
- *** 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (同上)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \eta_x & -\eta_y \\ -\xi_y & \xi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで、 (ξ, η) は一般座標軸であり、 J は座標変換によるJacobian、 $J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$ である。また、

$$x_\xi = \frac{\eta_y}{J}, \quad y_\xi = -\frac{\eta_x}{J}, \quad x_\eta = -\frac{\xi_y}{J}, \quad y_\eta = \frac{\xi_x}{J} \quad \xi_x = Jy_\eta, \quad \xi_y = -Jx_\eta, \quad \eta_x = -Jy_\xi, \quad \eta_y = Jx_\xi \quad (3)$$

の関係より

$$J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta} \quad (4)$$

と表される。以上より式(1)を ξ と η による偏微分項に書き換えると、次式が得られる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial F_2}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial F_2}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial G_2}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial G_2}{\partial \eta} = \Omega \quad (5)$$

さらに、(3)～(4)式の関係を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} F_1 + \frac{\xi_y}{J} F_2 \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} F_1 + \frac{\eta_y}{J} F_2 \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} G_1 + \frac{\xi_y}{J} G_2 \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} G_1 + \frac{\eta_y}{J} G_2 \right) = \frac{\Omega}{J} \quad (6)$$

となる。これを書き換えると、

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}_2}{\partial \eta} = \tilde{\Omega} \quad (7)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \frac{Q}{J}, \quad \tilde{F}_1 = \frac{\xi_x}{J} F_1 + \frac{\xi_y}{J} F_2 = m_x F_1 + m_y F_2, \quad \tilde{F}_2 = \frac{\eta_x}{J} F_1 + \frac{\eta_y}{J} F_2 = n_x F_1 + n_y F_2, \\ \tilde{G}_1 &= \frac{\xi_x}{J} G_1 + \frac{\xi_y}{J} G_2 = m_x G_1 + m_y G_2, \quad \tilde{G}_2 = \frac{\eta_x}{J} G_1 + \frac{\eta_y}{J} G_2 = n_x G_1 + n_y G_2, \quad \tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{J} \end{aligned} \quad (8)$$

(7)式の擬似線形形は以下のように表される。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \mathbf{B} \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}_2}{\partial \eta} = \tilde{\Omega} \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ は以下の式で表される。

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \tilde{Q}} = \frac{\partial}{\partial Q} (m_x F_1 + m_y F_2) = m_x \frac{\partial F_1}{\partial Q} + m_y \frac{\partial F_2}{\partial Q}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial \tilde{Q}} = \frac{\partial}{\partial Q} (n_x F_1 + n_y F_2) = n_x \frac{\partial F_1}{\partial Q} + n_y \frac{\partial F_2}{\partial Q} \quad (10)$$

$\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ は行列であり、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & m_x & m_y \\ -uU_m + m_x gh & U_m + m_x u & -V_m + m_x v \\ -vU_m + m_y gh & V_m + m_y u & U_m + m_y v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ -uU_n + n_x gh & U_n + n_x u & -V_n + n_x v \\ -vU_n + n_y gh & V_n + n_y u & U_n + n_y v \end{pmatrix} \quad (11)$$

と書ける。ただし

$$U_m = m_x u + m_y v, \quad V_m = m_x v - m_y u, \quad U_n = n_x u + n_y v, \quad V_n = n_x v - n_y u \quad (12)$$

Jacobian行列 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ は3行3列であるから固有値を3つ持つ。 $\mathbf{A}$ の固有値を λ_a 、 $\mathbf{B}$ の固有値を λ_b とすると λ の値は、 $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ より求める。ただし、 $\mathbf{I}$ は単位行列である。これを解くと、

$$\begin{aligned} \lambda_{a1} &= U_m, \quad \lambda_{a2} = U_m + \sqrt{gh} \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = U_m + cM, \quad \lambda_{a3} = U_m - \sqrt{gh} \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = U_m - cM \\ \lambda_{b1} &= U_n, \quad \lambda_{b2} = U_n + \sqrt{gh} \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = U_n + cN, \quad \lambda_{b3} = U_n - \sqrt{gh} \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = U_n - cN \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここで M 、 N および c については以下のように定義される。

$$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \quad N = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}, \quad c = \sqrt{gh} \quad (14)$$

固有値行列を $\mathbf{D}$ と定義すれば

$$\mathbf{D}_a = \begin{pmatrix} \lambda_{a1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{a3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_b = \begin{pmatrix} \lambda_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{b2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{b3} \end{pmatrix} \quad (15)$$

となる。次に右固有値行列、左固有値行列を求める。 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ の右固有ベクトルを $\mathbf{I}_a$ 、 $\mathbf{I}_b$ とすると、右固有ベクトルの定義、 $\mathbf{I}_a \mathbf{A} = \lambda_a \mathbf{I}_a$ より、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{a1} &= (V_m, -m_y, m_z), \quad \mathbf{I}_{a2} = (\lambda_{a3}, -m_y, -m_z), \quad \mathbf{I}_{a3} = (\lambda_{a2}, -m_y, -m_z) \\ \mathbf{I}_{b1} &= (V_n, -n_y, n_z), \quad \mathbf{I}_{b2} = (\lambda_{b3}, -n_y, -n_z), \quad \mathbf{I}_{b3} = (\lambda_{b2}, -n_y, -n_z) \end{aligned} \quad (16)$$

したがって、 $\mathbf{L}$ を右固有値行列とすると、

$$\mathbf{L}_a = \begin{pmatrix} V_m & m_y & -m_z \\ U_m - cM & -m_y & -m_z \\ U_m + cM & -m_y & -m_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_b = \begin{pmatrix} V_n & n_y & -n_z \\ U_n - cN & -n_y & -n_z \\ U_n + cN & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \quad (17)$$

となる。また、 $\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ の左固有値行列を $\mathbf{R}_a$ および $\mathbf{R}_b$ とすると、 $\mathbf{L}\mathbf{R} = \mathbf{I}$ より

$$\mathbf{R}_a = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2cM} & \frac{1}{2cM} \\ \frac{m_y}{M^2} & -\frac{m_z \lambda_{a2} + m_y V_m}{2cM^3} & \frac{m_z \lambda_{a3} - m_y V_m}{2cM^3} \\ -\frac{m_z}{M^2} & -\frac{m_y \lambda_{a2} - m_z V_m}{2cM^3} & \frac{m_y \lambda_{a3} + m_z V_m}{2cM^3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_b = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2cN} & \frac{1}{2cN} \\ \frac{n_y}{N^2} & -\frac{n_z \lambda_{b2} + n_y V_n}{2cN^3} & \frac{n_z \lambda_{b3} - n_y V_n}{2cN^3} \\ -\frac{n_z}{N^2} & -\frac{n_y \lambda_{b2} - n_z V_n}{2cN^3} & \frac{n_y \lambda_{b3} + n_z V_n}{2cN^3} \end{pmatrix} \quad (18)$$

が得られる。上記の諸式より(9)式は(19)式のように書き換える。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{R}_a \mathbf{D}_a \mathbf{L}_a \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial \xi} + \mathbf{R}_b \mathbf{D}_b \mathbf{L}_b \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}_2}{\partial \eta} = \tilde{\mathbf{Q}} \quad (19)$$

3. 計算法

(7)式を離散化して書き直すと(20)式ようになる。

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{i,j}^{n+1} = \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left\{ \partial \tilde{\mathbf{F}}_{1,j}^n + (\tilde{\mathbf{G}}_{1,i+1/2,j}^n - \tilde{\mathbf{G}}_{1,i-1/2,j}^n) \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left\{ \partial \tilde{\mathbf{F}}_{2,i,j}^n + (\tilde{\mathbf{G}}_{2,i+1/2,j}^n - \tilde{\mathbf{G}}_{2,i-1/2,j}^n) \right\} + \Delta t \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j}^n \quad (20)$$

ここで上付き添え字 n は時間ステップ、下付き添え字 (i,j) は格子点の番号、 Δt は計算上の時間刻み幅、 $\Delta \xi$ 、 $\Delta \eta$ は一般座標上の格子間隔である。(20)式中の $\partial \tilde{\mathbf{F}}_{1,j}^n$ および $\partial \tilde{\mathbf{F}}_{2,i,j}^n$ については(19)式より次式で求められる。

$$\partial \tilde{\mathbf{F}}_{1,j}^n = \mathbf{R}_a \mathbf{D}_a \mathbf{L}_a \partial \tilde{\mathbf{Q}}, \quad \partial \tilde{\mathbf{F}}_{2,i,j}^n = \mathbf{R}_b \mathbf{D}_b \mathbf{L}_b \partial \tilde{\mathbf{Q}} \quad (21)$$

ただし、 $\partial \tilde{\mathbf{F}}_{1,j}^n$ および $\partial \tilde{\mathbf{F}}_{2,i,j}^n$ はそれぞれ3つの要素を持ち、それぞれの要素は、(21)式の右辺での固有値の正負により2種類の選択がある。例えば(21)式の $\partial \tilde{\mathbf{F}}_{1,j}^n$ は、(22)式のように扱う。

$$\begin{aligned} \partial \tilde{\mathbf{F}}_{1,j}^n &= \mathbf{R}_{a,i+1/2,j}^n \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_{a1,i+1/2,j} + |\lambda_{a1,i+1/2,j}| & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{a2,i+1/2,j} + |\lambda_{a2,i+1/2,j}| & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{a3,i+1/2,j} + |\lambda_{a3,i+1/2,j}| \end{pmatrix} \mathbf{L}_{a,i+1/2,j}^n (\partial \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j}^n - \partial \tilde{\mathbf{Q}}_{i-1,j}^n) \\ &+ \mathbf{R}_{a,i-1/2,j}^n \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_{a1,i-1/2,j} - |\lambda_{a1,i-1/2,j}| & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{a2,i-1/2,j} - |\lambda_{a2,i-1/2,j}| & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{a3,i-1/2,j} - |\lambda_{a3,i-1/2,j}| \end{pmatrix} \mathbf{L}_{a,i-1/2,j}^n (\partial \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j}^n - \partial \tilde{\mathbf{Q}}_{i-1,j}^n) \end{aligned} \quad (22)$$

(13)式で示した固有値の正負を基準として、固有値が正ならば $(i+1/2,j)$ 点の、負ならば $(i-1/2,j)$ 点での値を採用する。横断方向も同様である。また、格子点 $(i,j+1/2)$ での $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{L}$ が必要となるが、(23)式⁴⁾より対応する格子点での流速、水深を求め、この値を用いて、(12)式および(17)、(18)式より $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{L}$ の要素の値を求める。

$$\begin{cases} u_{i+1/2,j} = \frac{\sqrt{h_{i,j}} u_{i,j} + \sqrt{h_{i+1,j}} u_{i+1,j}}{\sqrt{h_{i,j}} + \sqrt{h_{i+1,j}}}, & v_{i+1/2,j} = \frac{\sqrt{h_{i,j}} v_{i,j} + \sqrt{h_{i+1,j}} v_{i+1,j}}{\sqrt{h_{i,j}} + \sqrt{h_{i+1,j}}}, & c_{i+1/2,j} = \sqrt{g \frac{h_{i,j} + h_{i+1,j}}{2}} \\ u_{i,j+1/2} = \frac{\sqrt{h_{i,j}} u_{i,j} + \sqrt{h_{i,j+1}} u_{i,j+1}}{\sqrt{h_{i,j}} + \sqrt{h_{i,j+1}}}, & v_{i,j+1/2} = \frac{\sqrt{h_{i,j}} v_{i,j} + \sqrt{h_{i,j+1}} v_{i,j+1}}{\sqrt{h_{i,j}} + \sqrt{h_{i,j+1}}}, & c_{i,j+1/2} = \sqrt{g \frac{h_{i,j} + h_{i,j+1}}{2}} \end{cases} \quad (23)$$

数値計算の際に、常流から射流へ遷移する個所においては膨張衝撃波が生じ連続的な解が得られないことがあり、この膨張衝撃波を除去する必要がある。これについてはSawadaら⁵⁾の結果を参考とする。具体的には、膨張衝撃波の発生する計算点において、この膨張衝撃波の発生する $\partial \tilde{\mathbf{F}}$ の要素の値の1/2をそれぞれ上下流の計算点に配分する。

移流項以外の項については、ソース項および粘性項共に一般座標へと変換し、ソース項の河床勾配、粘性項に関しては中央差分を用いることとする。

4. 衝撃波を含む条件での数値計算例

4. 1 ダム決壊の計算例

(1) 計算条件および境界条件

開水路では衝撃波は段波に相当し、この段波がはっきりと現れるダム決壊の計算をおこなう。基礎方程式は(1)式とするが、後述の理論値と比較するため、河床勾配、粗度および粘性は無しとして計算をおこなう。計算の平面格子は直交格子とし、計算条件等は表-1、図-1に示す通りとする。境界条件は上下流端で流束の空間的な変化は無しとする。左右岸については水路外側に仮想格子を加え、水路内側のもっとも側岸よりの格子上の流速と正負逆の値を与える。これは(23)式より数値流束の値を考

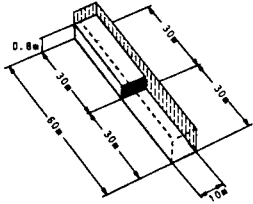


図-1 計算条件(初期水面)

表-1 計算条件

計算格子 dx, dy (m)	水路幅 B (m)	初期水位 (m)		河床高 z (m)	粗度係数 n
		上流側	下流側		
0.2	10	0.8	0.05	0.0	0.0

えるためであり、これにより側岸上の流速は無くなる。尚、以下に示すこれ以外の数値計算においても、左右岸の境界条件は同様にする。

(2) 計算結果

計算結果を図-2に、また、同じ条件における理論値⁶⁾との比較を表-2に示す。ただし、今回の条件では横断方向の水深、流速等の変化は見られないため縦断方向のみである。理論値と計算結果に大きな差は見られず、段波がほぼ正確に捕らえている。

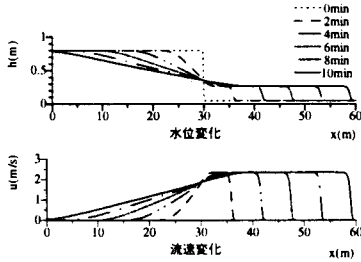


図-2 計算結果(縦断方向)

表-2 理論値と計算値の比較

	段波の伝播速度 (m/s)	段波部分の流速 (m/s)	段波部分の水深 (m)
計算値	2.90	2.35	0.268
理論値	2.90	2.36	0.268

4. 2 横断方向の変化を考慮したダム決壊の計算例

次に計算結果に横断方向の変化が現れるように、表-3、図-3のような条件で計算をおこなう。計算の平面格子幅は前述の計算と同じとし、格子の分割数は流下方向350分割、横方向49分割とする。また河床勾配、粗度および粘性は無視している。この例では計算結果を理論値と比較することはできないため、水位の変化のみを図-4に示す。衝撃波が計算格子に対して斜めに存在している場合でも、衝撃波の捕獲は十分におこなえることがわかる。

表-3 計算条件

計算格子 dx, dy (m)	水路幅 B (m)	初期水位 (m)		河床高 z (m)	粗度係数 n
		上流側	下流側		
0.2	10	0.5	0.01	0.0	0.0

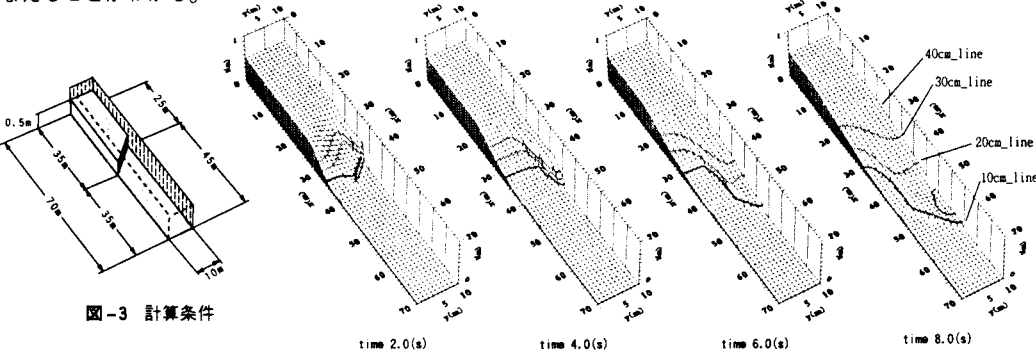


図-3 計算条件

図-4 計算結果

4. 3 ダム決壊の計算で不規則な格子を用いた場合の計算例

次に計算モデルの一般座標系における精度を検証するために計算格子を取って直交ではなく、不規則な格子を用いた場合の計算をおこなう。計算条件は4.1の計算例と同様である。計算平面の格子は図-5のように歪ませてある。計算格子の間隔は個々に異なるが、分割数は流下方向に300分割、横断方向に49分割であり、4.1の計算例と同様である。表-4に計算結果と理論値との比較を示す。いずれの値も十分に満足できる結果であり、直交座標の場合と比較してもモデルの精度は十分であると考えられる。



図-5 計算格子

表-4 計算結果の比較

ケース	段波の伝播速度 (m/s)	段波部分の流速 (m/s)	段波部分の水深 (m/s)
左岸側	2.87	2.34	0.268
中央	2.90	2.34	0.265
右岸側	2.90	2.32	0.263
理論値	2.90	2.36	0.268

5. 常射流混在流れの実験と数値計算との比較

5. 1 実験条件

常射流混在流れの実験を数値計算により再現し、モデルの検証をおこなう。実験は長谷川ら⁷⁾による複列砂州実験を用いる。実験は全長15m、幅0.8m、勾配1/300の水路上に、(24)式で定義され、図-7の示されるような複列砂州を模倣した河床形状を水路縦断方向に3波長(6m)配置しておこなわれている。河床は珪砂が用いられ、表面をセメントで固めて、固定床としている。計算との比較をおこなった実験ケースは河床全体が水面下となるRun1と河床の一部が水面上に出るRun2とし、それぞれの実験の平均水理量を表-5に示す。

$$\eta = -1.5 \cos\left(\frac{2\pi}{200}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{80}y\right) \quad (24)$$

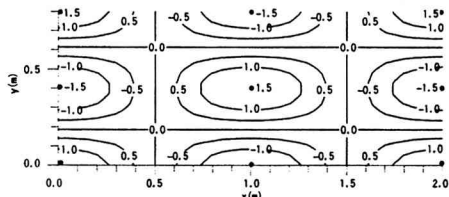


図-7 河床コンター図(加工部、1波長)

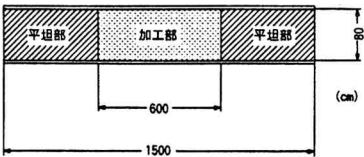


図-6 実験水路概略図

表-5 実験条件

実験 No	RUN1	RUN2
流路幅(cm)	80	80
流量 (l/s)	4.51	1.47
勾配	1/300	1/300
平均水深 (cm)	2.02	1.09
平均流速 (cm/s)	27.91	16.86
平均フルード数	0.63	0.52

5. 2 薄層流における粗度の補正

本実験のように粗度が小さく、砂州上の水深が非常に浅い状態においては(1)式中の摩擦項の評価では実情に合わない。具体的には、水深が非常に浅くなった場合、摩擦抵抗も薄層流としての取り扱いが当然必要となる。ただ、本研究の主眼は薄層流の研究ではないので便宜的に図-8のように水深の浅い地点(h<h_r、hは水深、h_rは粗度が変化すると仮定した限界の水深)ではManningの粗度係数を直線的に上げることとした。

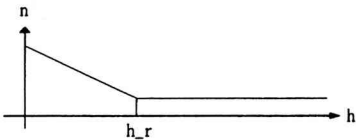


図-8 粗度係数の変化

5. 3 実験ケース・Run1

実験Run1の特徴は、平均水理量では常流であるが、河床凸部では弱い射流となっていることである。また、射流から常流に遷移していく地点、すなわち図-9のx=50(cm)近辺の両側壁からx=120(cm)近辺の水路中央部分で弱い跳水が起こっている。計算の平面格子を直交座標に取り、表-6の条件で数値計算をおこなった結果を図-10～図-14に示す。図-11や図-12、13によれば水位や流速はほぼ実験結果に一致した値となっているが、図-14のフルード数の分布では水路中央部の極端に水深の浅い地点の影響が下流部へ完全には伝わっていないことがわかる。これは前述の摩擦項の評価に問題があるためであるが、図-9、10を比較してみれば、全体的に良い一致を示している。

表-6 計算条件

計算格子 dx, dy(cm)	粗度係数 n	渦動粘性係数 ε	流量 (l/s)	流路幅 (cm)
5.0	0.01	0.0001	4.51	80

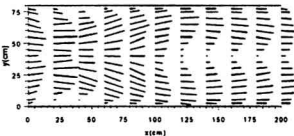


図-9 流速ベクトル図(実測値)

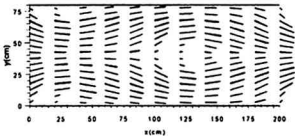


図-10 流速ベクトル図(計算値)

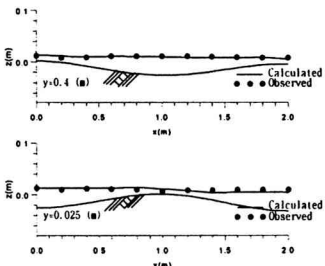


図-11 水位比較図(上:中央、下:右岸側)

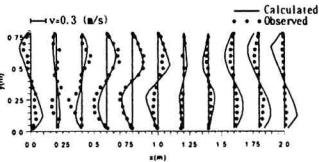
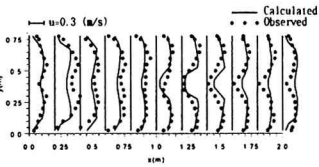


図-12 流速比較(上:縦断方向、下:横断方向)

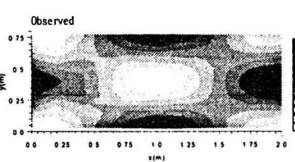
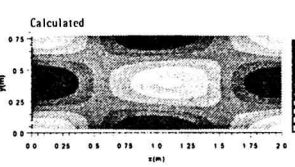


図-13 水深コンター図

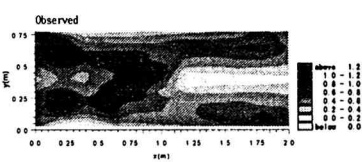
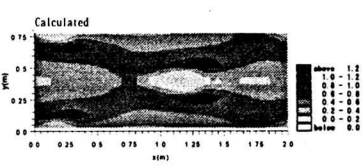


図-14 フルード数コンター図

5. 4 実験ケース・Run2

Run2はRun1の流量を減らしておこなった実験であり、図-15に示すように河床の凸部先端は水面上に現れている。また、実験での流速測定は水深1.5cm以下の地点だけでおこなったため、一部データの無い地点があり、そのような部分は流速、水深等のデータは無しとしている。このため、以下の実験結果の図は実際の実験より多少広範囲の部分が水面上に現れているような表現となっている。数値計算では水深を0とはできないため、前もって最小の水深 $h_{\min}$ を決め、計算中に水深が $h_{\min}$ 以下となれば、水深は $h_{\min}$ 、流速は流下方向および横断方向共に0と置き換えることにした。数値計算結果は図-16および18に示すように河床凸部先端では流下方向の流速は無く、その付近も流速、水深は少ない。図-17および19の水位の計算結果も良好である。しかしながら、フルード数の分布結果は完全に実験結果を再現するには至っていない。これは、実験ケース・Run1と同様に摩擦項の評価に問題があるためである。従来、このような水路の一部が水面上に現れる場合の計算を安定におこなうことは非常に難しいと考えられてきたが、このような通常厳しいと思われる条件下でも容易に計算を実行することが可能であり、また良好な再現結果も得ることが可能となった。

表-7 計算条件

計算格子 dx, dy(cm)	粗度係数 n	渦動粘性係数 ϵ	流量 (l/s)	流路幅 (cm)
5.0	0.01	0.0001	1.47	80

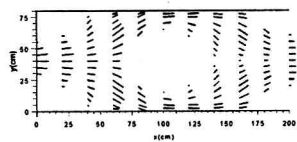


図-15 流速ベクトル図(実測値)

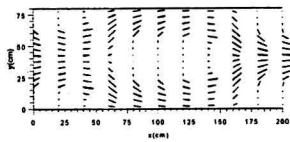


図-16 流速ベクトル図(計算値)

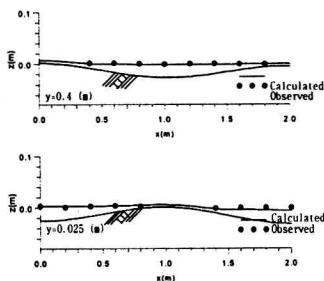


図-17 水位比較図(上:中央、下:右岸側)

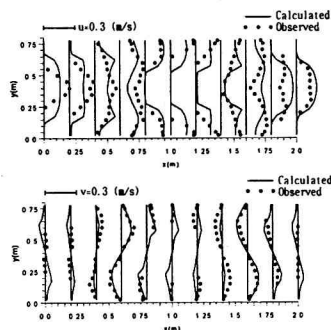


図-18 流速比較(上:縦断方向、下:横断方向)

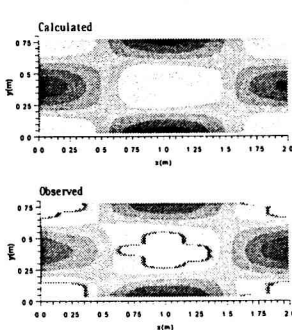


図-19 水深コンター図

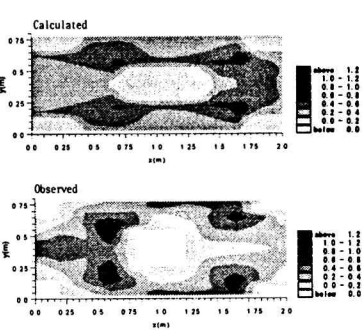


図-20 フルード数コンター図

6. おわりに

本研究においては、航空流体力学の分野で衝撃波捕獲法の一つとして注目されている、FDS法を開水路の2次元流れへと適用すべく、数値計算モデルの開発をおこなった。モデルには実河川問題等への適応を考慮して一般座標系を用いた。計算モデルの検証は、理論値の明らかな条件でのダム決壊の計算および常射流混在流れの状態における固定床の模型実験を用いておこなわれた。この結果、十分に満足できる精度の結果が得られ、また従来のMacCormack法などでは計算が困難な厳しい条件下においても、FDSによれば非常に容易に計算することが可能であることが確かめられた。今後は、高精度への拡張をおこない、流砂の連続式を加え、河床変動計算モデルへの拡張をおこなう予定である。

本研究を推進するにあたり、北海道大学工学部土木工学科、長谷川和義先生には、水路実験等の貴重な資料をご提供いただいた。ここに記して深謝する。

参考文献

- 岡部健士、山下秀基、天野裕仁：常・射流が混在する2次元浅水流の数値計算法、水工学論文集、第39巻、pp.403-408、1995。
- 岡田尚弥、田中祐一郎、中谷 剛：水制工周辺に射流域を生じる流れの数値計算に関する研究、水工学論文集、第39巻、pp.551-556、1995。
- 平井真砂郎、道上正規、松谷 治：都市域における浸水氾濫解析に関する基礎的研究、水工学論文集、第40巻、pp.405-410、1995。
- Struijs R., Deconinck H. and Roe P.L.: Computational Fluid Dynamics, VKI Lecture Series 1991-01, 1991。
- K.Sawada, E.Shimada and T.Matsuda: *Memoirs of Fac.Eng., Kyoto Univ.*, 51(1986), Part2, p.124。
- 本間 仁・安芸編：物部水理学、岩波書店、1962。
- 花田紀明：複列砂州上の流れに関する基礎的研究、北海道大学学士論文、1988。
- 八田夏夫：流れの計算、森北出版株式会社、1994。
- 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法、東京大学出版会、1994。
- 西本直史：FDSによる開水路流れの数値解析、2次元数値計算法による都市域急流河川の安全度評価システムの開発、pp.133-143、1996。
- 森 明巨：最近の衝撃波捕捉理論の話題・AUSMとCIP、2次元数値計算法による都市域急流河川の安全度評価システムの開発、pp.45-57、1996。
- 清水康行：沖積河川における流れと河床変動の予測手法に関する研究、北海道大学学位論文、1990。