

非線形二相混合体モデルの積雪内 不飽和鉛直浸透への適用について

Application of a Non-linear Two-phase Mixture Model to the Unsaturated Vertical Flow through Snow

畑 時男*・矢富盟祥**・石田 啓***・宇治橋康行****

By Tokio HATA, Chikayoshi YATOMI, Hajime ISHIDA and Yasuyuki UJIHASHI

In this paper, we improve the two-phase mixture model which we proposed in the previous paper: Assuming a non-linear relation between the moisture of free phase and the infiltration flux within snowpack, we add an upper limit and a lower limit of moisture of trapping phase and estimate the model parameters by a method based on the least square method.

As a result, we find that the non-linear model agree much better with the experimental results than a linear model. Moreover we examine the transition of moisture profiles of infiltration process.

Keywords : non-linear two-phase mixture model, trapping phase, infiltration, meltwater

1 はじめに

流域における融雪流出の問題やあるいは積雪からの化学物質の流出の問題を検討していくためには、積雪内部の融雪水の移動機構を明らかにし、その過程を表現する浸透モデルを構築することが必要である。

著者らは前報¹⁾で、Gurtin and Yatomi²⁾のモデルに基づいた二相混合体モデルの線形近似モデルを一樣な積雪内の一次元不飽和鉛直浸透に適用し、その有用性を確認した。もちろん、複雑な層構造や水みち等を有する斜面積雪における上述の問題へのモデルの適用を考える場合、モデルの二次元さらには三次元への拡張、積雪の局所不均一性の表現等解決すべき点も多い。しかし、このようなモデルの拡張を考える上でも基礎となる一次元不飽和鉛直浸透現象の十分な再現およびモデルパラメータと積雪の物理特性との関係を明らかに

* 正会員 石川工業高等専門学校教授 土木工学科
(〒929-03 石川県河北郡津幡町字北中条)

** 正会員 Ph. D. 金沢大学教授 工学部土木建設工学科
(〒920 金沢市小立野2-40-20)

*** 正会員 工博 金沢大学教授 工学部土木建設工学科
(〒920 金沢市小立野2-40-20)

**** 正会員 工博 福井工業大学助教授 工学部建設工学科
(〒910 福井市学園3-6-1)

しておく必要がある。前報では解析解を求めるため積雪内のfree phaseにおける水分の移動を線形近似し、trapping phaseにおける水分保持の機構に何らの制限を設けなかった。その結果、浸透流出の減衰が実測値に比較して、計算値の方が若干大きいなどモデルの一部修正が必要な点があることがわかった。また前報では、パラメータの決定法については、実験値から推定したが、最適推定法は行わなかった。

本研究では、上記のことを考慮し、前報で提案した二相混合体モデルの改良を試みた。すなわち、積雪内のfree phaseの水分量と浸透フラックスの関係には非線形性を有するものとし、さらにはtrapping phaseの水分量に上・下限値を設定した。また、モデルの主要なパラメータの決定についても、最小自乗法に基づく手法により推定した。その結果、浸透流出の計算結果の実測の浸透流出に対する再現性は、線形近似モデルによるものと比較するとかなりの向上がみられた。さらに、この成果をもとに積雪内部の浸透過程における水分量分布の経時的变化を求め、浸透特性を考察した。

2 非線形二相混合体モデル

2. 1 モデルの概要

今、積雪表面を原点とし、鉛直下向きを x 軸の正方向とし、さらにfree phaseの水分量を θ_f 、trapping phaseの水分量を θ_t とする。また、空隙中の水分が阻止され、trapping phaseに単位時間単位体積当たり、捕捉される水分量を σ とし、この時の混合体内における浸透フラックスを u とすると、free phaseおよびtrapping phaseそれぞれにおける質量保存則は以下の式で与えられる。

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \sigma \quad (\text{free phase}) \quad (1), \quad \frac{\partial \theta_t}{\partial t} = \sigma \quad (\text{trapping phase}) \quad (2)$$

また、free phaseにおける水の鉛直方向の運動則は、重力の効果が卓越し、ダルシー則が拡張することができるものとして、

$$u = K \theta_f^n \quad (3)$$

で与える。ここで、 θ_f はfree phaseにおける水分量であり、 K はfree phaseにおける浸透水の移動速度に関する比例係数であり、 n は混合体に特有な物質定数である。

一方、 σ の構成則は次式のように与えられている。

$$\sigma = \sigma_{fr} - \sigma_{re} \quad (4)$$

$$\sigma_{fr} = \beta \theta_f - \alpha \theta_t, \quad \sigma_{re} = \gamma(\theta_f) u^m + \sigma_m \quad (5), \quad (6)$$

ここで、 σ_{fr} は σ のうちfree phaseおよびtrapping phaseの水分量に依存し、trapping phaseに捕捉されたり、逆にfree phaseに放出される部分であり、 σ_{re} は積雪マトリックスの融解やfree phaseにおける水分移動などに伴う擾乱などにより水分がtrapping phaseからfree phaseに放出される部分である。また、 β 、 α および m はtrappingに関する物質定数であり、 $\gamma(\theta_f)$ は水分移動に伴うtrapping phaseからの水分放出に関する係数である。また、 σ_m は積雪マトリックスの融解速度である。

以上の関係より、 u および θ_f の支配方程式は次式で与えられることになる。

$$\frac{1}{n} K^{-(1/n)} u^{(1/n)-1} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \beta K^{-(1/n)} u^{1/n} - \gamma(\theta_f) u^m - \alpha \theta_f - \sigma_m = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial t} - \beta K^{-(1/n)} u^{1/n} + \gamma(\theta_f) u^m + \alpha \theta_f + \sigma_m = 0 \quad (8)$$

2. 2 σ の構成則の一部修正について

著者らのこれまでの線形モデルによる計算によれば、式(4)～式(6)の σ の構成則では、積雪表面からの融雪水の供給が停止した後の積雪内部の水分量 $\theta = \theta_f + \theta_t$ が早期に0に近づき、浸透流出の計算値が実験値と比較すると早く減衰している。そこで、本報告では、trapping phaseにおける水分保持の機構に以下のように制限を加える。

すなわち, trapping phase における水分量 θ_i には上限値 $\theta_{i, \max}$ および下限値 $\theta_{i, \min}$ が存在し, trapping phase の水分量の状態に応じて, $\sigma_{i,r}$ が次のような形で表現できるものとする.

$\sigma \geq 0$ の場合

$$\theta_i = \theta_{i, \min} \text{ の時} \quad \sigma_{i,r} = \beta \theta_i \quad (9)$$

$$\theta_{i, \min} < \theta_i < \theta_{i, \max} \text{ の時} \quad \sigma_{i,r} = \beta \theta_i - \alpha \theta_i' \quad (10)$$

$$\theta_i = \theta_{i, \max} \text{ の時} \quad \sigma_{i,r} = 0 \quad (11)$$

$\sigma < 0$ の時

$$\theta_i = \theta_{i, \max} \text{ の時} \quad \sigma_{i,r} = -\alpha \theta_i' \quad (12)$$

$$\theta_{i, \min} < \theta_i < \theta_{i, \max} \text{ の時} \quad \sigma_{i,r} = \beta \theta_i - \alpha \theta_i' \quad (13)$$

$$\theta_i = \theta_{i, \min} \text{ の時} \quad \sigma_{i,r} = 0 \quad (14)$$

なお, θ_i' ($= \theta_i - \theta_{i, \min}$) は trapping phase における水分量 θ_i と $\theta_{i, \min}$ の差であり, 非負の値を持つ.

3 数値計算とパラメータの推定

3. 1 差分方程式の誘導

積雪試料からの浸透流出をもとめるには, 与えられた初期条件および境界条件のもとで式(7)および(8)を解く必要がある. しかし, 線形近似モデルのように解析解が求まらないので, 数値計算によらざるを得ない. このため差分法により計算を実施し, 非線形モデルによる積雪試料からの浸透流出を求め, これと実験結果を比較することによりモデルの再現性について検討する. 以下に, 数値計算の概要を簡単に述べる.

まず, 式(7), (8)において, 取扱いを簡単にし, パラメータの減少化を図るため, $n=3$, $m=1$, $\gamma(\theta_i)=0$, $\sigma_{m,s}=0$, $\overline{\beta} = \beta K^{-1/3}$ と仮定する. このうち, $n=3$ と仮定したのは, Colbeck のモデルにおける重力浸透流でのフラックスと有効飽和度の関係を考慮したものである³⁾. なお, この時 trapping 速度 σ は $\sigma_{i,r}=0$ であるから, $\sigma = \sigma_{i,r} = \beta \theta_i - \alpha \theta_i'$ となる.

さて, 前述のような仮定をし, 陽形式の差分近似を行うと, 以下の差分方程式が得られる.

$$\frac{1}{3} K^{-1/3} u(I, J)^{(2/3)} \frac{u(I+1, J) - u(I, J)}{\Delta t} + \frac{u(I, J) - u(I, J-1)}{\Delta x} + \overline{\beta} u(I, J)^{1/3} - \alpha \theta_i(I, J)' = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\theta_i(I+1, J) - \theta_i(I, J)}{\Delta t} - \overline{\beta} u(I, J)^{1/3} + \alpha \theta_i(I, J)' = 0 \quad (16)$$

3. 2 パラメータの推定について

式(9)～式(16)により積雪試料からの浸透流出を計算するには, パラメータとして K , α , $\overline{\beta}$, $\theta_{i, \min}$, $\theta_{i, \max}$ と与える必要がある. このうち, $\theta_{i, \min}$ については Colbeck の研究⁴⁾ や Denoth の研究⁵⁾ を考慮し, $\theta_{i, \min}=0.03$ と仮定し, $\theta_{i, \max}=0.04$ とした. また, 他のパラメータの K , α , $\overline{\beta}$ の推定については最小自乗法に基づく推定法⁶⁾ を用いた.

以下にその方法を簡単に述べる. 今, 積雪試料を対象とした浸透実験において, 試料からの浸透流出の実測値を $u_{o.b. i}$ とし, 二相混合体モデルの数値解による計算値を $u_{c.a.l. i}$ とする. ここに, $u_{c.a.l. i}$ は時刻 $t=i\Delta t$ における試料底部 $x=h$ における値である. すなわち,

$$u_{c.a.l. i} = u(x=h, t=i\Delta t; K, \alpha, \overline{\beta}) = u(K, \alpha, \overline{\beta}) \quad (17)$$

この時, 各時刻の計算値と実測値の差の平方和を目的関数として次式のように定義する.

$$F(K, \alpha, \overline{\beta}) = \sum_{i=1}^n \{u_{c.a.l. i} - u_{o.b. i}\}^2 \quad (18)$$

ここで, n は fitting に用いる実測値の個数である. この目的関数 $F(K, \alpha, \overline{\beta})$ を最小にするパラメータの組を最適パラメータとするものである. パラメータの推定には, 初期値を入力し, その付近での最適値を上

記の計算によって探索する。最適値は初期値によって異なる値になるため、初期値を更新し、再入力してそのつど最適値を求め、誤差の自乗和 F が最も小さいものを最終的に最適値として決定する。

4 計算結果について

4. 1 計算条件

二相混合体モデルの非線形モデルの再現性を検討するため、積雪試料からの浸透流出を与えられた条件のもとで差分計算により求めた。計算の対象とした実験例は表-1に示すとおりである⁷⁾。差分計算においては、 $\Delta x = 0.0002m$ 、 $\Delta t = 0.2sec$ として計算を行った。この差分計算の妥当性を検証するため、前報で提案した線形モデルを対象に、吸水過程および排水過程のそれぞれの水分分布の経時の変化を差分計算および解析解により求め、比較した。その結果の一部を図-1に示す。差分計算によるものおよび解析解によるものいずれも同じパラメータを用い、浸透フラックス u および試料内部の水分量 θ_i 、 θ_i の初期条件は0として計算した。差分計算による結果は解析解によるものに十分な精度で一致しており、ここで用いた差分計算は妥当なものと判断できる。

なお、本報告での浸透フラックス u および試料内部の水分量 θ_i 、 θ_i に関する初期条件は表-2に示してある。ここで、表-2の積雪試料の内部の水分量の初期条件については次のような取り扱いをした。例えば、重量含水率から換算された体積含水率を積雪内部の水分量 θ に対応するものとし、これと、初期浸透流出量から式(3)によって逆算されるfree phaseの水分量 θ_i の差を、trapping phaseの水分量 θ_i の値とした。ただし、この時の θ_i が $\theta_{i, \min}$ より小さくなった場合で、かつ積雪試料からの浸透流出量が存在する場合は、含水率の実測値にかかわらず、 $\theta_{i, \min}$ に等しいとした。なお、水分量の初期条件は簡単のため積雪試料内部で一定と仮定して、計算を行った。

4. 2 パラメータの推定結果

前述した最適パラメータの推定を行う前に、浸透流出の実測値の時間間隔が300secであるのに対し、モデルによる差分計算によって求められる浸透流出の時間間隔が0.2

表-1 実験条件

実験番号	C-1	C-2	C-3	C-4
雪質	ざらめ雪	ざらめ雪	ざらめ雪	ざらめ雪
流入強度 ($\times 10^{-6} m/sec$)	5.206	3.771	3.989	6.007
流入継続時間 (sec)	6000	4800	4800	4800
試料の高さ (m)	0.45	0.45	0.45	0.45
ぬれ密度 ($\times t/m^3$)				
実験前 上	0.45	0.47	0.40	0.38
下	0.47	0.47	0.47	0.50
実験後 上	0.47	0.47	0.46	0.38
下	0.44	0.48	0.56	0.52
空隙率				
実験前 上		0.52	0.67	0.64
下	0.54	0.53	0.64	0.53
実験後 上	0.55	0.51	0.59	0.63
下	0.57	0.51	0.49	0.52
体積含水率 (%)				
実験前 上		2.8	10.0	4.5
下	4.4	3.8	13.9	6.8
実験後 上	5.7	2.6	8.3	4.4
下	4.3	2.7	9.1	8.2
粒径 ($\times 10^{-3} m$)	2.0	2.0	2.0	1.5

(表中の上は試料上部、下は試料下部を示す)

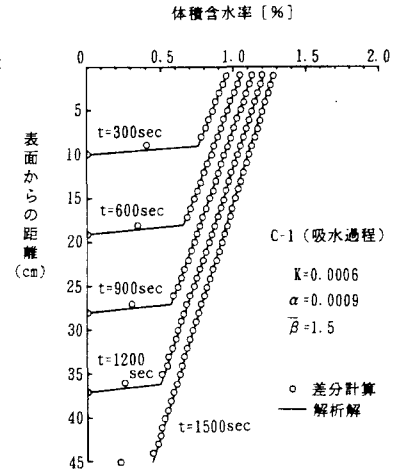


図-1 差分計算と解析解の比較

表-2 初期条件および境界条件

実験ケース	C-1	C-2	C-3	C-4
浸透フラックス $u(x, t=0)$	0.55×10^{-4}	0.29×10^{-4}	0.62×10^{-4}	0.04×10^{-4}
水分量 $\theta_i(x, t=0)$	0.034	0.030	0.030	0.040
水分量 $\theta_i(x, t=0)$	0.009	0.009	0.009	0.002
浸透フラックス $u(x=h, t \leq a)$	5.21×10^{-4}	3.77×10^{-4}	3.99×10^{-4}	6.01×10^{-4}

a: 流入継続時間 フラックスの単位 (m/sec)

secであるという時間間隔の差を補正するために、実測値に対応する計算値としてはモデルによる1500個の計算値を平均化して求めるという操作をし、パラメータの推定を行った。

推定されたパラメータの値(表-3)をみると、 K はほぼ 10^{-1} [m/sec]のオーダーであり、また α はほぼ 10^{-3} (1/sec)のオーダーの値であるといえる。一方、 β は 10^{-4} [$m^{-(1/3)}sec^{-(1/3)}$]のオーダーの値となっている。このように推定されたパラメータの値はそれぞれオーダー的にはほぼ等しいが、実験例ごとにより変動している。この理由として、実験には自然積雪および落下堆積した屋根雪のざらめ雪層から水平に採取した試料を用いたが、表-1に示すように供試体間および供試体内の雪の特性が同一でなかったことが考えられる。はじめにでも述べたようにモデルパラメータと雪の物性の関係を明らかにすることは今後の課題である。

4. 3 非線形二相混合体モデルによる 積雪試料からの浸透流出の再現 と試料内部の水分量の変化

図-2から図-5までは、表-3の最適パラメータを用いた二相混合体モデルによる積雪試料からの計算値と実測値を比較したものである。各実験ケースとも前報に示す線形モデルによる計算結果⁸⁾と比較すると、かなり再現精度が改善され、浸透流出の初期の過程から減衰部全体の過程まで、浸透流出の計算値は実測値をよく表現しており、本モデルが積雪内部の水分移動を良好に表現していることがわかる。

次に、積雪内部の融雪水の浸透過程における水分量の変化の特性を考察するため、それぞれの実験ケースに対して、表-3で与えられるパラメータを用いて積雪試料内部の水分分布の経時変化を計算し、これを図-6から図-13に示した。なお、積雪試料内部の水分量 θ はtrapping phaseの水分量 θ_t とfree phaseの水分量 θ_f の和であり、これが体積含水率に等しいものとしている。

この水分分布の変化が実際の状況を良好に再現するものなのか、また水の供給を停止した時点での一定強度の融雪水の流入に対する平衡水分状態での体積含水率が、5.0~5.9%程度となっているがこれが妥当なものなのかは、現段階では積雪含水率の精度

表-3 パラメータの推定値

	C-1	C-2	C-3	C-4
K (m/sec)	0.704	0.386	0.776	0.822
α (1/sec)	0.00107	0.00314	0.00257	0.00118
β ($m^{-(1/3)}sec^{-(1/3)}$)	0.00065	0.00051	0.00043	0.00031

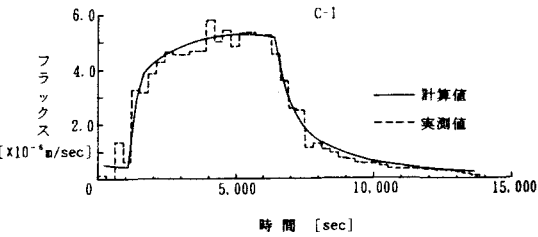


図-2 浸透流出の計算値と実測値の比較(その1)

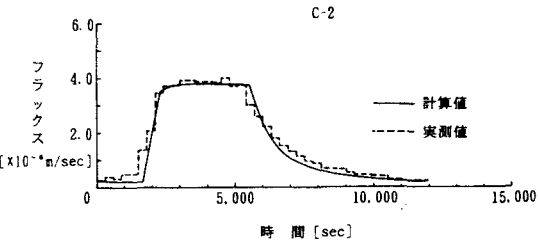


図-3 浸透流出の計算値と実測値の比較(その2)

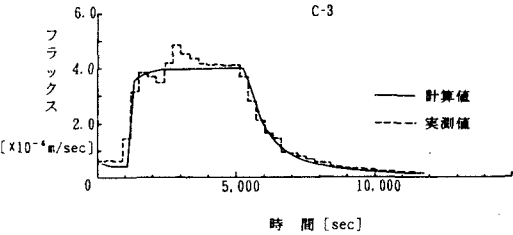


図-4 浸透流出の計算値と実測値の比較(その3)

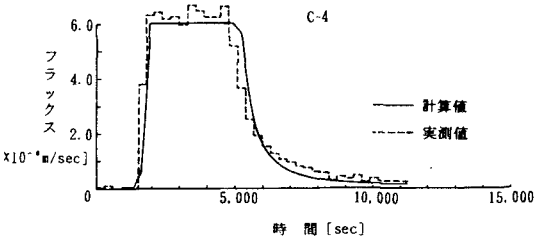


図-5 浸透流出の計算値と実測値の比較(その4)

の良い実測が困難であることから、今後の研究課題とする。ただ、モデルの計算による積雪試料の初期含水率と水分供給を停止した時点における平衡水分状態における含水率との差を、試料への流入量の総和と流出量の総和の差から推定したものと比較すると表-4 ようになる。この表によれば、計算値は実測値とほぼ一致している。このことは本モデルの一つの有効性を示すものであるといえる。

さて、図に示される水分分布の経時的变化の特徴を考察してみる。図-6～図9の吸水過程では、水の試料上端からの供給につれて明瞭な浸潤前線を形成しつつ、高含水率領域が試料上端から下方に伝播していく状況が見られる。また、C-4を除いて水分の供給につれtrapping効果により時間の経過とともに、含水率が増大していく様子がわかる。しかし、流入強度の大きいC-4の場合には浸透過程におけるtrappingの効果が十分には見られない。これは初期水分状態で既にtrapping phaseにおける水分量が飽和値 $\theta_{t, \max}$ に達していることによるものと考えられる。

一方、図-10～図-13の排水過程においては、初期条件の影響を受けず、すべての実験例で同様な水分分布の経時的变化が見られる。すなわち、明瞭な乾燥前線の形成が見られず、給水停止とともに、試料上端で

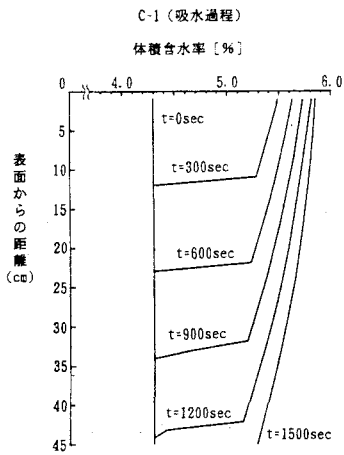


図-6 水分分布の経時的变化(その1)

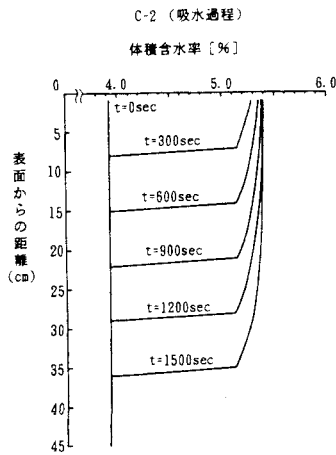


図-7 水分分布の経時的变化(その2)

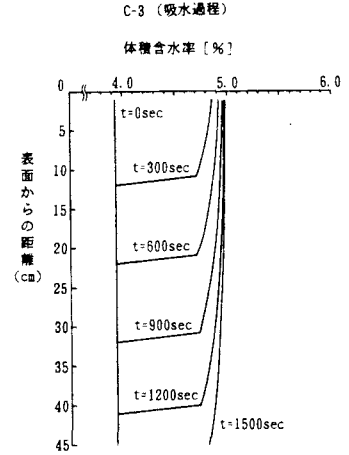


図-8 水分分布の経時的变化(その3)

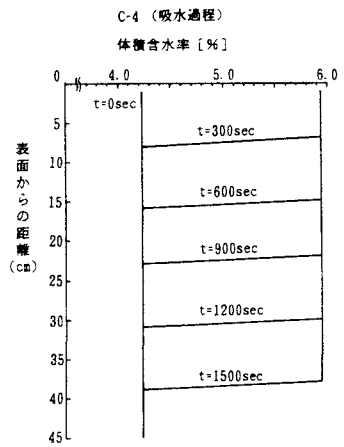


図-9 水分分布の経時的变化(その4)

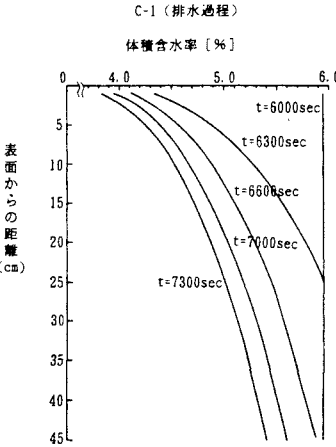


図-10 水分分布の経時的变化(その5)

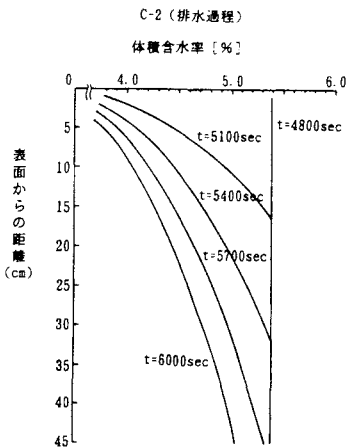


図-11 水分分布の経時的变化(その6)

急激な含水率低下が見られるが、その後は試料全体にわたって減少するような傾向が見られる。これは、trapping phaseによる効果により、ある程度水分の放出がなされると、それ以後については、水分の放出が抑えられることによるものである。

表-4 水分量の変化に対する計算値と実測値の比較

実験例	初期水分状態での含水率 (計算値)	平衡水分状態での含水率 (計算値)	体積含水率の変化 (計算値)	体積含水率の変化 (実測値)
C-1	4.3%	5.9%	1.6%	1.9%
C-2	3.9%	5.4%	1.5%	1.4%
C-3	3.9%	5.0%	1.1%	0.8%
C-4	4.2%	5.9%	1.7%	1.9%

5 おわりに

前報では、積雪内部における融雪水の不飽和浸透に対して、二相混合体モデルの線形近似モデルを適用し、その解析解を求め、さらにそれが積雪試料からの浸透流出の実測値を良好に再現することを示した。すなわち、二相混合体モデルが積雪内部の融雪水の不飽和鉛直浸透の表現に有効であることを示した。

本研究では、上記線形モデルによる結果をより実測値に整合させる目的で、二相混合体モデルの非線形モデルを構築し、その妥当性を検討した。

その際、パラメータの推定にも最適化の手法を導入した。その結果、非線形モデルでは、線形近似モデルよりかなり実験値の再現性の向上がみられた。また、これより二相混合体モデルの積雪内部の融雪水の浸透流出を表現するモデルとしての有効性がさらに確認された。さらに、本報告では、浸透過程における積雪試料内部の水分分布の経時変化も求め、その特性について考察した。

最後に、二相混合体モデルにより一次元不飽和鉛直浸透現象が十分な精度で再現できることが示されたので、今後は実験観測を重ねてモデルパラメータと雪の物性との関連を明らかにするとともに、二次元への拡張、積雪の不均一性の表現等について検討し、融雪流出や積雪内の化学物質の移動といった実際問題への適用を行っていく予定である。

参考文献

- 1) 矢富盟祥, 畑 時男, 石田 啓: 二相混合体モデルの積雪内不飽和鉛直浸透への適用に関する研究, 土木学会論文集, No. 509/II-30, pp. 27-33, 1995.
- 2) Gurtin, M. E. and Yatomi, C.: On a Model for two phase diffusion in composite material, *Journal of COMPOSITE MATERIALS*, Vol. 13, pp. 126-130, 1979.
- 3) Colbeck, S. C., and G. Davidson: Water Percolation through homogenous snow, paper presented at *International Symposia on the Role of Snow and Ice in Hydrology*, Unesco and World Meteorol. Organ. Banff, Sept. pp. 6-20, 1972.
- 4) Colbeck, S. C.: The Capillary effect on water percolation in homogeneous snow, *Journal of Glaciology*, Vol. 13, No. 67, 1974.

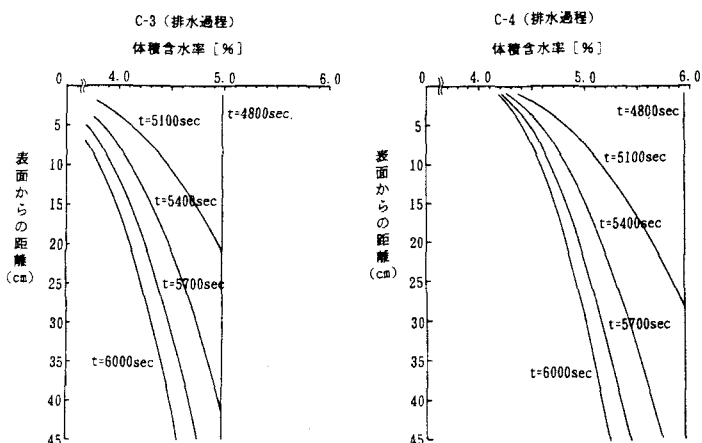


図-12 水分分布の経時変化 (その7)

図-13 水分分布の経時変化 (その8)

- 5) Denoth, A. : The pendular-fanicular liquid transition and snow metamorphism, *Journal of Glaciology*, Vol. 13, No. 67, 1974.
- 6) 棚橋秀行, 佐藤 健, 湯浅 晶, 宇野尚雄 : Two-Regionモデルによる砂層中の溶質の輸送構造とパラメータの評価, 土木学会論文集, No. 499 / III-28, pp. 107-116, 1994.
- 7) 畑 時男, 高瀬信忠 : 積雪内における融雪水の鉛直浸透に関する実験的研究, 土木学会論文集, 第423号 / II-14, pp. 101-109, 1990.
- 8) 前出1)