

貯留型流出モデルの確率応答に関する研究(2) -降雨が互いに従属する場合-

Stochastic Response of Storage Function Model (2) -The Impact of Mutually Dependent Rainfall Input-

工藤睦信¹・藤田睦博²・田中岳³・阿部修⁴・熊谷進⁵

By Mutsunobu KUDO, Mutsuhiro FUJITA, Gaku TANAKA,

Osamu ABE and Susumu KUMAGAI

Abstract

The observed rainfall is described as a random step function whose step height belongs to some stochastic process. On the other hand, the theoretical equations to calculate the first four moments of discharge require stochastic properties of rainfall defined as continuous function. In this paper, it is assumed that the observed rainfall is approximated by the first order autoregressive process. In this paper, authors strictly derive the auto-covariance function for rainfall defined as continuous function and theoretical equations which give the first four moments of discharge based on storage function model.

key words: storage function model, stochastic response, random step function

1. はじめに

著者等はこれまでに貯留型流出モデルを用いて、降雨量が確率過程であるとき流出量の1～4次モーメントに関する理論式を誘導してきた^{1,2)}。流出量の1～4次モーメントが既知になると、流出量の確率密度関数が推定できる。これまでの研究をまとめると以下ようになる。

- (1) 降雨量が時間的に独立な確率過程であるとき、流出量の確率応答
 - (2) 降雨量が1次の自己回帰過程であるとき、流出量の確率応答
- Z_t を確率変数とすると周知のように1次の自己回帰過

程は、次式で与えられる。

$$Z_t = \rho Z_{t-1} + N_t \quad (1)$$

回帰係数 ρ の正負によって、 Z_t の自己相関関数の形状が異なるが、これまでの研究では $\rho < 0$ とき流出量の2～4次モーメントに関する理論式の適合範囲が狭く問題が残されていた。さらに、式(1)において、 $\rho = 0$ とすると $Z_t = N_t$ となる。これは、 Z_t が時間的に独立な確率過程となることを示している。したがって、式(1)を用いるならば流出量の2～4次モーメントを与える理論式は、 $\rho = 0$ 、 $\rho \neq 0$ とすることによって降雨量が独立な場合も、互いに従属する場合も統一された一つの式で表現できるはずである。

¹正会員 日本国土開発(株) 東京支店副支店長 (〒107 東京都港区赤坂4-9-17)

²正会員 工博 北海道大学教授 土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

³学生会員 北海道大学大学院 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

⁴正会員 鹿島建設(株) 札幌支店営業部長 (〒060 札幌市中央区北3条西3丁目)

⁵正会員 日産建設(株) 企画課長 (〒104 東京都港区南青山1-2-6)

2. 基礎理論

最も簡単な貯留型流出モデルとして、次式を考える。

$$\frac{dS}{dt} + q = r(t) \quad (2) \quad S = Kq^P \quad (3)$$

S : 貯留量, q : 流出量, r : 降雨量, K, P : 定数

いま、降雨量が確率過程とすると、貯留量、流出量もまた確率過程となる。これらの確率変数を、平均値(・記号)と平均値からの偏差(˜記号)に分離する。

$$\begin{aligned} S &= \bar{S} + \tilde{S} & E(\tilde{S}) &= 0 \\ q &= \bar{q} + \tilde{q} & E(\tilde{q}) &= 0 \\ r &= \bar{r} + \tilde{r} & E(\tilde{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式(2), (3)より、次式を得る。

$$\frac{dS}{dt} + \left(\frac{1}{K}\right)^m S^m = \bar{r}, \quad m = \frac{1}{P} \quad (5)$$

式(5)内のベキ乗型の確率変数 S^m に関して、次の近似式を用いる。

$$S^m = \alpha \bar{S} + \beta \tilde{S} \quad (6)$$

式(4), (6)を式(5)に代入して、次式を得る。

$$\frac{d(\bar{S} + \tilde{S})}{dt} + \left(\frac{1}{K}\right)^m (\alpha \bar{S} + \beta \tilde{S}) = \bar{r} + \tilde{r} \quad (7)$$

式(7)の期待値をとることにより、式(8)が得られる。また、式(7)より式(8)を差し引くと式(9)が得られる。

$$\frac{d\bar{S}}{dt} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \alpha \bar{S} = \bar{r} \quad (8)$$

$$\frac{d\tilde{S}}{dt} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \tilde{S} = \tilde{r} \quad (9)$$

式(9)を解いて、次式を得る。

$$\tilde{S}(t) = e^{-\int_0^t D \beta d\tau_1} \int_0^t \tilde{r}(\tau_2) e^{\int_0^{\tau_2} D \beta d\tau_3} d\tau_2, \quad D = \left(\frac{1}{K}\right)^m \quad (10)$$

式(10)の両辺を2~4乗して期待値をとることにより、貯留量の2~4次モーメントが得られる。

$$\sigma_S^2 = e^{-2\int_0^t D \beta d\tau_1} \int_0^t \int_0^t E\{\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\} \times e^{\int_0^{\tau_2} D \beta d\tau_4 + \int_0^{\tau_3} D \beta d\tau_5} d\tau_2 d\tau_3 \quad (11)$$

$$\mu_{S3} = e^{-3\int_0^t D \beta d\tau_1} \int_0^t \int_0^t \int_0^t E\{\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\} \times e^{\int_0^{\tau_2} D \beta d\tau_5 + \int_0^{\tau_3} D \beta d\tau_6 + \int_0^{\tau_4} D \beta d\tau_7} d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \quad (12)$$

$$\mu_{S4} = e^{-4\int_0^t D \beta d\tau_1} \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t E\{\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\tilde{r}(\tau_5)\} \times e^{\int_0^{\tau_2} D \beta d\tau_6 + \int_0^{\tau_3} D \beta d\tau_7 + \int_0^{\tau_4} D \beta d\tau_8 + \int_0^{\tau_5} D \beta d\tau_9} d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \quad (13)$$

一方、流出量の2~4次モーメントは、式(3), (6)より次のように与えられる。

$$\sigma_q^2 = (D\beta)^2 \sigma_S^2 \quad \mu_{q3} = (D\beta)^3 \mu_{S3} \quad \mu_{q4} = (D\beta)^4 \mu_{S4} \quad (14)$$

従って、式(11)~(13)を計算するためには、 $E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}$, $E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\}$, $E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\}$ などの一般化された2~4次モーメントを与えなければならない。観測降雨量は、図-1のようなステップ関数で表される。そのステップ高 $R(i)$ は、次式を用いて連続関数として定義されている降雨量 $r(t)$ より求められる。

$$R(i) = \frac{1}{\Delta t} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} r(\tau) d\tau \quad i: \text{integer} \quad (15)$$

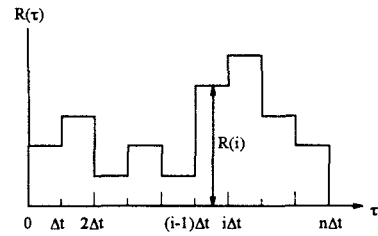


図-1 実測降雨の模式図(ランダムステップ関数)

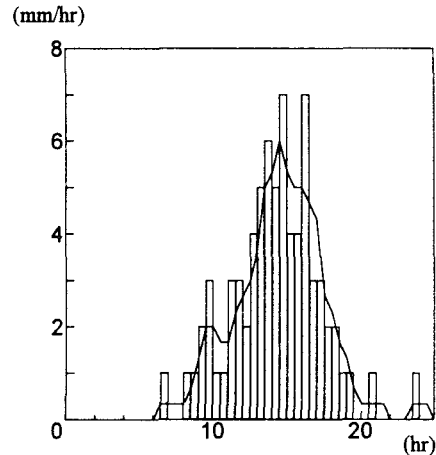


図-2 実測降雨の例
(1994年10月、定山溪ダム)

図-2は、定山溪ダム流域における実測降雨量の例である。時間移動平均値を図-1のステップ高 $R(i)$ の平均値とみなし、これからの偏差 $\tilde{R}(i)$ の自己共分散関数 γ_i を計算した例を図-3に示す。 Δt は、観測雨量の時間単位である。図より $\tilde{R}(i)$ は、次式の1次の自己回帰過程で記述できることがわかる。

$$\tilde{R}(i) = \rho \tilde{R}(i-1) + N(i) \quad \rho: \text{const.} \quad (16)$$

N_i は、互いに独立な確率変数でその1~4次モーメン

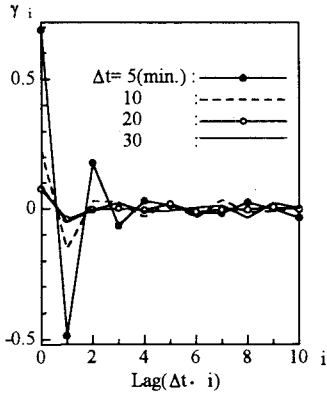


図-3 実測降雨の自己共分散関数

トを0, σ_N^2 , μ_{N3} , μ_{N4} とする。したがって、ここでは実測降雨をランダムステップ関数として考えていることになる。ステップ高 $\tilde{R}(i)$ と区別するためにランダムステップ関数と定義する際には $R_f(\tau)$ と表す。 $\tilde{R}(i)$ の2～4次モーメントは、周知のように次のように与えられる。

$$\sigma_R^2 = \frac{\sigma_N^2}{1-\rho^2} \quad \mu_{R3} = \frac{\mu_{N3}}{1-\rho^3} \quad \mu_{R4} = \frac{6\rho^2\sigma_N^2\sigma_R^2 + \mu_{N4}}{1-\rho^4} \quad (17)$$

また、 $\tilde{R}(i)$ の一般化された2～4次モーメントは、次式のようにになる。

$$\rho=0 \quad E\{\tilde{R}(i)\tilde{R}(j)\} = \sigma_R^2 \delta(i-j) \quad (18)$$

$$E\{\tilde{R}(i)\tilde{R}(j)\tilde{R}(k)\} = \mu_{R3} \delta(i-j)\delta(j-k) \quad (19)$$

$$E\{\tilde{R}(i)\tilde{R}(j)\tilde{R}(k)\tilde{R}(l)\} = (\mu_{R4} - 3\sigma_R^4) \delta(i-j)\delta(j-k)\delta(k-l) + \sigma_R^4 \delta(i-j)\delta(k-l) + \delta(i-k)\delta(j-l) + \delta(i-l)\delta(j-k) \quad (20)$$

$\delta(n)$: delta function

$$\rho \neq 0 \quad E\{\tilde{R}(i)\tilde{R}(j)\} = \sigma_R^2 \rho^{|i-j|} \quad (21)$$

$$E\{\tilde{R}(i)\tilde{R}(j)\tilde{R}(k)\} = \mu_{R3} \rho^{i+j-2k} \quad i \geq j \geq k \quad (22)$$

$$E\{\tilde{R}(i)\tilde{R}(j)\tilde{R}(k)\tilde{R}(l)\} = (\mu_{R4} - 3\sigma_R^4) \rho^{i+j+k-l} + \sigma_R^4 (2\rho^{i+j-k-l} + \rho^{i+j+l-k}) \quad i \geq j \geq k \geq l \quad (23)$$

一方、ランダムステップ関数 $R_f(\tau)$ の一般化された2～4次モーメントは、次式のようにになる。

$$\rho=0 \quad E\{\tilde{R}_f(\tau_1)\tilde{R}_f(\tau_2)\} = \begin{cases} \frac{\sigma_R^2}{\Delta t} (\Delta t - |\tau_1 - \tau_2|) & |\tau_1 - \tau_2| \leq \Delta t \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (24)$$

$$\rho \neq 0$$

$$E\{\tilde{R}_f(\tau_1)\tilde{R}_f(\tau_2)\} = \sigma_R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\rho^n - \rho^{n-1})}{\Delta t} (|\tau_1 - \tau_2| - n\Delta t) + \rho^n \right\} \times [U(|\tau_1 - \tau_2| - n\Delta t) - U(|\tau_1 - \tau_2| - (n-1)\Delta t)] \quad (25)$$

$U(\tau)$: unit step function

$$\rho=0$$

$$E\{\tilde{R}_f(\tau_1)\tilde{R}_f(\tau_2)\tilde{R}_f(\tau_3)\} = \begin{cases} \frac{\mu_{R3}}{\Delta t} (\Delta t - T_1) & \tau_3 + \Delta t \geq \tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (26)$$

$$\rho \neq 0$$

$$E\{\tilde{R}_f(\tau_1)\tilde{R}_f(\tau_2)\tilde{R}_f(\tau_3)\} = \begin{cases} \frac{\mu_{R3}}{\Delta t} \rho^{i+j-3} \{ (\rho^2 - 1)T_1 + \rho(1-\rho)T_2 \\ \quad + \Delta t[(1-\rho)i + (1-\rho^2)j - 1 + \rho + \rho^2] \} \\ \quad (i-1)\Delta t \leq T_2 \leq i\Delta t \quad T_2 + (j-1)\Delta t \leq T_1 \leq (i+j-1)\Delta t \\ \frac{\mu_{R3}}{\Delta t} \rho^{i+j-2} \{ (\rho^2 - 1)T_1 + (1-\rho)T_2 \\ \quad + \Delta t[(\rho(1-\rho)i + (1-\rho^2)j + \rho^2)] \\ \quad (i-1)\Delta t \leq T_2 \leq i\Delta t \quad (i+j-1)\Delta t \leq T_1 \leq T_2 + j\Delta t \end{cases} \quad (27)$$

$$T_1 = \tau_1 - \tau_3 \quad T_2 = \tau_2 - \tau_3 \quad \tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3$$

$$\rho=0$$

$$E\{\tilde{R}_f(\tau_1)\tilde{R}_f(\tau_2)\tilde{R}_f(\tau_3)\tilde{R}_f(\tau_4)\} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} \{ \mu_{R4}(\Delta t - T_1) + \sigma_R^4(T_2 - T_3) \} & \tau_4 + \Delta t \geq \tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3 \geq \tau_4 \\ \frac{\sigma_R^4}{\Delta t} [T_2 - T_3 - (i-2)\Delta t] \\ \quad \tau_4 + i\Delta t \geq \tau_2 + \Delta t \geq \tau_3 + (i-1)\Delta t \geq \tau_1 \geq \tau_4 + (i-1)\Delta t \geq \tau_2 \\ \frac{\sigma_R^4}{\Delta t} (T_2 - T_1 + \Delta t) \\ \quad \tau_4 + i\Delta t \geq \tau_2 + \Delta t \geq \tau_1 \geq \tau_3 + (i-1)\Delta t \geq \tau_4 + (i-1)\Delta t \geq \tau_2 \\ \frac{\sigma_R^4}{\Delta t} (T_2 - T_3 - (i-2)\Delta t) \\ \quad \tau_1 + \Delta t \geq \tau_2 + \Delta t \geq \tau_3 + (i-1)\Delta t \geq \tau_4 + (i-1)\Delta t \geq \tau_1 \geq \tau_2 \\ \frac{\sigma_R^4}{\Delta t} (\Delta t + T_4 - T_3) \\ \quad \tau_4 + i\Delta t \geq \tau_3 + (i-1)\Delta t \geq \tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_4 + (i-1)\Delta t \\ \frac{\sigma_R^4}{\Delta t} (\Delta t - T_1 + T_2 - T_3) \\ \quad \tau_4 + i\Delta t \geq \tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3 + (i-1)\Delta t \geq \tau_4 + (i-1)\Delta t \\ \frac{\sigma_R^4}{\Delta t} (i\Delta t - T_1) \\ \quad \tau_4 + i\Delta t \geq \tau_2 \geq \tau_3 + (i-1)\Delta t \geq \tau_2 \geq \tau_4 + (i-1)\Delta t \\ \frac{\sigma_R^4}{\Delta t} (\Delta t - T_1 + T_2 - T_3) \\ \quad \tau_4 + i\Delta t \geq \tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3 + (i-1)\Delta t \geq \tau_4 + (i-1)\Delta t \\ T_j = \tau_j - \tau_4 \quad j=1,2,3 \quad i \geq 2 \end{cases} \quad (28)$$

$$\rho \neq 0$$

$$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3 \geq \tau_4$$

$$\begin{aligned}
& E\{\tilde{R}_s(\tau_1)\tilde{R}_s(\tau_2)\tilde{R}_s(\tau_3)\tilde{R}_s(\tau_4)\} \\
&= \frac{1}{\Delta t}[\rho^{3l-k-j}(\mu_{Rd}-3\sigma_R^2) \\
&\times [\rho^{-1}(l\Delta t-\tau_1+\tau_4)+(\tau_3-\tau_4-(j-1)\Delta t) \\
&+\rho(j-k)\Delta t+\tau_2-\tau_3]+\rho^2((k-l)\Delta t+\tau_1-\tau_2)] \\
&+2\rho^{l+k-j}\sigma_R^4[\rho^{-1}(l\Delta t-\tau_1+\tau_4)+(\tau_1-\tau_2+\tau_3-\tau_4-(l-k+j-1)\Delta t) \\
&+\rho(j-k)\Delta t+\tau_2-\tau_3] \\
&+\rho^{l-kj}\sigma_R^4[\rho^{-1}((l-k+j)\Delta t-\tau_1+\tau_2-\tau_3+\tau_4) \\
&+(\tau_1-\tau_2+\tau_3-\tau_4-(l-k+j-1)\Delta t)]] \\
&(l-1)\Delta t+\tau_4\leq(l-j)\Delta t+\tau_3\leq(l-k)\Delta t+\tau_2\leq\tau_1<l\Delta t+\tau_4, \quad l\geq k\geq j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E\{\tilde{R}_s(\tau_1)\tilde{R}_s(\tau_2)\tilde{R}_s(\tau_3)\tilde{R}_s(\tau_4)\} \\
&= \frac{1}{\Delta t}[\rho^{3l-k-j}(\mu_{Rd}-3\sigma_R^2) \\
&\times [\rho^{-1}(l\Delta t-\tau_1+\tau_4)+(\tau_2-\tau_4-(k-1)\Delta t) \\
&+\rho(k-j)\Delta t+\tau_3-\tau_2]+\rho^2((j-l)\Delta t+\tau_1-\tau_3)] \\
&+2\rho^{l+k-j}\sigma_R^4[\rho^{-1}((l-k+j)\Delta t-\tau_1-\tau_2+\tau_3+\tau_4) \\
&+(\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4-(l-k+j-1)\Delta t) \\
&+\rho^{l-kj}\sigma_R^4[\rho^{-1}(l\Delta t-\tau_1+\tau_4)+(\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4-(l-k+j-1)\Delta t) \\
&+\rho((k-j)\Delta t+\tau_3-\tau_2)]] \\
&(l-1)\Delta t+\tau_4\leq(l-k)\Delta t+\tau_2\leq(l-j)\Delta t+\tau_3\leq\tau_1<l\Delta t+\tau_4, \quad l\geq k\geq j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E\{\tilde{R}_s(\tau_1)\tilde{R}_s(\tau_2)\tilde{R}_s(\tau_3)\tilde{R}_s(\tau_4)\} \\
&= \frac{1}{\Delta t}[\rho^{3l-k-j}(\mu_{Rd}-3\sigma_R^2) \\
&\times [\rho^{-2}((l-j)\Delta t+\tau_3-\tau_1)+\rho^{-1}(j\Delta t-\tau_3+\tau_4) \\
&+(\tau_2-\tau_4-(k-1)\Delta t)+\rho((k-l)\Delta t+\tau_1-\tau_2)] \\
&+2\rho^{l+k-j}\sigma_R^4[\rho^{-2}((l-j)\Delta t+\tau_3-\tau_1) \\
&+\rho^{-1}((j+k-l)\Delta t+\tau_1-\tau_2-\tau_3+\tau_4)+(\tau_2-\tau_4-(k-1)\Delta t) \\
&+\rho^{l-kj}\sigma_R^4[\rho^{-1}(j\Delta t+\tau_3-\tau_4)+((l-k+j-1)\Delta t-\tau_1+\tau_2+\tau_3-\tau_4) \\
&+\rho((k-l)\Delta t+\tau_1-\tau_2)]] \\
&(l-1)\Delta t+\tau_4\leq(l-k)\Delta t+\tau_2\leq\tau_1<(l-j)\Delta t+\tau_3\leq l\Delta t+\tau_4, \quad l\geq k\geq j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E\{\tilde{R}_s(\tau_1)\tilde{R}_s(\tau_2)\tilde{R}_s(\tau_3)\tilde{R}_s(\tau_4)\} \\
&= \frac{1}{\Delta t}[\rho^{3l-k-j}(\mu_{Rd}-3\sigma_R^2) \\
&\times [\rho^{-2}((l-k)\Delta t+\tau_2-\tau_1)+\rho^{-1}(k\Delta t-\tau_2+\tau_4) \\
&+(\tau_3-\tau_4-(j-1)\Delta t)+\rho((j-l)\Delta t+\tau_1-\tau_3)] \\
&+2\rho^{l+k-j}\sigma_R^4[\rho^{-1}(k\Delta t-\tau_2+\tau_4) \\
&+(l-k-j+1)\Delta t-\tau_1+\tau_2+\tau_3-\tau_4]+\rho((j-l)\Delta t+\tau_1-\tau_3)] \\
&+\rho^{l-kj}\sigma_R^4[\rho^{-2}((l-k)\Delta t+\tau_2-\tau_1) \\
&+\rho^{-1}((j+k-l)\Delta t+\tau_1-\tau_2-\tau_3+\tau_4)+(\tau_3-\tau_4-(j-1)\Delta t) \\
&(l-1)\Delta t+\tau_4\leq(l-j)\Delta t+\tau_3\leq\tau_1<(l-k)\Delta t+\tau_2\leq l\Delta t+\tau_4, \quad l\geq k\geq j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E\{\tilde{R}_s(\tau_1)\tilde{R}_s(\tau_2)\tilde{R}_s(\tau_3)\tilde{R}_s(\tau_4)\} \\
&= \frac{1}{\Delta t}[\rho^{3l-k-j}(\mu_{Rd}-3\sigma_R^2) \\
&\times [\rho^{-3}((l-j)\Delta t+\tau_3-\tau_1)+\rho^{-2}((j-k)\Delta t+\tau_2-\tau_3) \\
&+\rho^{-1}(k\Delta t-\tau_2+\tau_4)+(\tau_1-\tau_4-(l-1)\Delta t) \\
&+2\rho^{l+k-j}\sigma_R^4[\rho^{-1}((l-k+j)\Delta t-\tau_1-\tau_2+\tau_3+\tau_4) \\
&+(\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4-(l-k+j-1)\Delta t) \\
&+\rho^{l-kj}\sigma_R^4[\rho^{-2}((j-k)\Delta t+\tau_2-\tau_3) \\
&+\rho^{-1}((l+k-j)\Delta t-\tau_1-\tau_2+\tau_3+\tau_4)+(\tau_1-\tau_4-(l-1)\Delta t)]] \\
&(l-1)\Delta t+\tau_4\leq\tau_1<(l-j)\Delta t+\tau_3\leq(l-k)\Delta t+\tau_2\leq l\Delta t+\tau_4, \quad l\geq k\geq j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E\{\tilde{R}_s(\tau_1)\tilde{R}_s(\tau_2)\tilde{R}_s(\tau_3)\tilde{R}_s(\tau_4)\} \\
&= \frac{1}{\Delta t}[\rho^{3l-k-j}(\mu_{Rd}-3\sigma_R^2) \\
&\times [\rho^{-3}((l-k)\Delta t+\tau_2-\tau_1)+\rho^{-2}((k-j)\Delta t+\tau_3-\tau_2) \\
&+\rho^{-1}(j\Delta t-\tau_3+\tau_4)+(\tau_1-\tau_4-(l-1)\Delta t) \\
&+2\rho^{l+k-j}\sigma_R^4[\rho^{-2}((k-j)\Delta t+\tau_3-\tau_2) \\
&+\rho^{-1}((l-k+j)\Delta t-\tau_1+\tau_2-\tau_3+\tau_4)+(\tau_1-\tau_4-(l-1)\Delta t) \\
&+\rho^{l-kj}\sigma_R^4[\rho^{-1}((l-k+j)\Delta t-\tau_1+\tau_2-\tau_3+\tau_4) \\
&+(\tau_1-\tau_2+\tau_3-\tau_4-(l-k+j-1)\Delta t)]] \\
&(l-1)\Delta t+\tau_4\leq\tau_1<(l-k)\Delta t+\tau_2\leq(l-j)\Delta t+\tau_3\leq l\Delta t+\tau_4, \quad l\geq k\geq j
\end{aligned} \tag{29}$$

$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}$, $E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\}$, $E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\}$ などの一般化された2~4次モーメントは、次のように表すことができる。

$$E\{\tilde{R}_s(\tau_1)\tilde{R}_s(\tau_2)\} = \frac{1}{\Delta t^2} \int_{\tau_1-\Delta t}^{\tau_1} \int_{\tau_2-\Delta t}^{\tau_2} E\{\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\} d\tau_3 d\tau_4 \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
& E\{\tilde{R}_s(\tau_1)\tilde{R}_s(\tau_2)\tilde{R}_s(\tau_3)\} \\
&= \frac{1}{\Delta t^3} \int_{\tau_1-\Delta t}^{\tau_1} \int_{\tau_2-\Delta t}^{\tau_2} \int_{\tau_3-\Delta t}^{\tau_3} E\{\tilde{r}(\tau_4)\tilde{r}(\tau_5)\tilde{r}(\tau_6)\} \\
&\quad \times d\tau_4 d\tau_5 d\tau_6
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
& E\{\tilde{R}_s(\tau_1)\tilde{R}_s(\tau_2)\tilde{R}_s(\tau_3)\tilde{R}_s(\tau_4)\} \\
&= \frac{1}{\Delta t^4} \int_{\tau_1-\Delta t}^{\tau_1} \int_{\tau_2-\Delta t}^{\tau_2} \int_{\tau_3-\Delta t}^{\tau_3} \int_{\tau_4-\Delta t}^{\tau_4} E\{\tilde{r}(\tau_5)\tilde{r}(\tau_6)\tilde{r}(\tau_7)\tilde{r}(\tau_8)\} \\
&\quad \times d\tau_5 d\tau_6 d\tau_7 d\tau_8
\end{aligned} \tag{32}$$

式(30)~(32)の右辺は既知なので、一般化された2~4次モーメントは積分方程式の解として与えられる。ここでは、紙面の関係もあるので、 $E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}$ の誘導過程について述べる。式(25)を図示すると図-4のようになる。これを、次式で表すことができる。

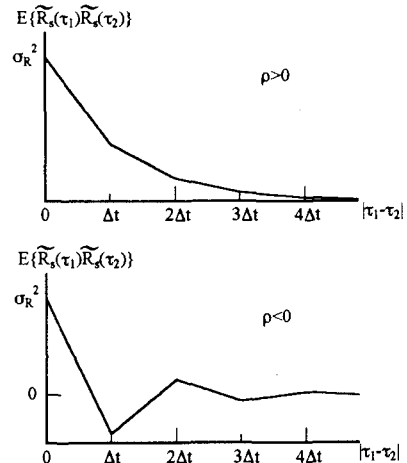


図-4 ランダムステップ関数の自己共分散関数

$$E(\tilde{r}_f(\tau_1)\tilde{r}_f(\tau_2)) = \sigma_R^2 F(\tau_1 - \tau_2) e^{-\gamma(\tau_1 - \tau_2)}, \quad \tau_1 \geq \tau_2 \quad (33)$$

$$\gamma = -\frac{\log |\rho|}{\Delta t}$$

$$F(\tau_1 - \tau_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\rho^n - \rho^{n+1})}{\Delta t} (\tau_1 - \tau_2 - n\Delta t) + \rho^n \right\} \times \{U(\tau_1 - \tau_2 - n\Delta t) - U(\tau_1 - \tau_2 - (n+1)\Delta t)\} e^{\gamma(\tau_1 - \tau_2)} \quad (34)$$

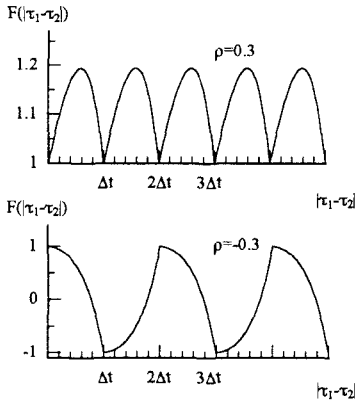


図-5 $F(\tau)$ の例

関数 $F(\tau)$ は、図-5に示すように $\rho > 0$ のとき周期 Δt 、 $\rho < 0$ のとき周期 $2\Delta t$ の周期関数になっていることが容易にわかる。これを次式のようにフーリエ級数に展開する。

$$F(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} \{a_j \cos(\omega_j \tau) + b_j \sin(\omega_j \tau)\} \quad (35)$$

$\rho > 0$

$$\begin{aligned} \omega_j &= \frac{2j\pi}{\Delta t} \\ a_j &= \frac{2(\gamma^2 - \omega_j^2)(1-\rho)^2}{\Delta t^2(\gamma^2 - \omega_j^2)^2 \rho} \\ b_j &= -\frac{4\gamma\omega_j(1-\rho)^2}{\Delta t^2(\gamma^2 - \omega_j^2)^2 \rho} \end{aligned} \quad (36)$$

$\rho < 0$

$$\begin{aligned} \omega_j &= \frac{j\pi}{\Delta t} \\ a_j &= \frac{(\gamma^2 - \omega_j^2)(1-\rho)^2}{\Delta t^2(\gamma^2 - \omega_j^2)^2 \rho} \{1 - (-1)^j\} \\ b_j &= -\frac{2\gamma\omega_j(1-\rho)^2}{\Delta t^2(\gamma^2 - \omega_j^2)^2 \rho} \{1 - (-1)^j\} \end{aligned} \quad (37)$$

次に $E(\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2))$ を次式のように仮定して、式(30)に代入して、未知定数 c_0, c_j, d_j, ω_j を求める。

$$E(\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)) = \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \{c_j \cos \omega_j(\tau_1 - \tau_2) + d_j \sin \omega_j(\tau_1 - \tau_2)\} \right] e^{-\gamma(\tau_1 - \tau_2)} \quad (38)$$

式(30), (33), (34), (38)を用いて、次式が得られる。

$0 \leq \tau_1 - \tau_2 < \Delta t$

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 F(\tau_1 - \tau_2) e^{-\gamma(\tau_1 - \tau_2)} &= \frac{2}{\Delta t^2} \int_{\tau_1 - \Delta t}^{\tau_1} \int_{\tau_1 - \Delta t}^{\tau_3} \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \{c_j \cos \omega_j(\tau_3 - \tau_4) + d_j \sin \omega_j(\tau_3 - \tau_4)\} \right] \\ &\times e^{-\gamma(\tau_3 - \tau_4)} d\tau_4 d\tau_3 \\ &+ \frac{1}{\Delta t^2} \int_{\tau_1 - \Delta t}^{\tau_1} \int_{\tau_1 - \Delta t}^{\tau_2} \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \{c_j \cos \omega_j(\tau_3 - \tau_4) + d_j \sin \omega_j(\tau_3 - \tau_4)\} \right] \\ &\times e^{-\gamma(\tau_3 - \tau_4)} d\tau_4 d\tau_3 \\ &+ \frac{1}{\Delta t^2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \int_{\tau_2}^{\tau_3} \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \{c_j \cos \omega_j(\tau_3 - \tau_4) + d_j \sin \omega_j(\tau_3 - \tau_4)\} \right] \\ &\times e^{-\gamma(\tau_3 - \tau_4)} d\tau_4 d\tau_3 \end{aligned} \quad (39)$$

$\tau_1 - \tau_2 \geq \Delta t$

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 F(\tau_1 - \tau_2) e^{-\gamma(\tau_1 - \tau_2)} &= \frac{1}{\Delta t^2} \int_{\tau_1 - \Delta t}^{\tau_1} \int_{\tau_2}^{\tau_3} \\ &\times \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \{c_j \cos \omega_j(\tau_3 - \tau_4) + d_j \sin \omega_j(\tau_3 - \tau_4)\} \right] \\ &\times e^{-\gamma(\tau_3 - \tau_4)} d\tau_3 d\tau_4 \end{aligned} \quad (40)$$

得られた結果を以下に示す。

$\rho > 0$

$$c_j = 2\sigma_R^2, \quad d_j = 0, \quad \omega_j = \frac{2j\pi}{\Delta t} \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (41)$$

$\rho < 0$

$$c_j = \sigma_R^2 \{1 - (-1)^j\}, \quad d_j = 0, \quad \omega_j = \frac{j\pi}{\Delta t} \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

したがって、 $E(\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2))$ を次のように書くことができる。

$\rho > 0$

$$E(\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)) = \sigma_R^2 \left\{ 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos \omega_j(\tau_1 - \tau_2) \right\} e^{-\gamma(\tau_1 - \tau_2)} \quad (43)$$

$\rho < 0$

$$E(\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)) = \sigma_R^2 \sum_{j=1}^{\infty} \{1 - (-1)^j\} \cos \omega_j(\tau_1 - \tau_2) e^{-\gamma(\tau_1 - \tau_2)} \quad (44)$$

一方、次の周期 T のデルタ関数列のフーリエ展開式

$$\delta_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{2i\pi}{T} t \quad (45)$$

を利用すると、式(43), (44)は次のようになる。

$$E(\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)) = \sigma_R^2 \sum_{i=0}^{\infty} A_i \delta(\tau_1 - \tau_2 - i\Delta t) e^{-\gamma(\tau_1 - \tau_2)} \quad (46)$$

$$\tau_1 - \tau_2 \geq 0 \quad A_i = \begin{cases} (-1)^i & \rho < 0 \\ 1 & \rho > 0 \end{cases} \quad \sigma_R^2 = \frac{\Delta t}{C} \sigma_R^2$$

上式の係数 C は、値が1であるが時間の次元を持っている。両辺の次元を揃えるために必要である。式

(46)を式(11)に代入して、若干の計算の後、次式が得られる。

$$\frac{d\sigma_s^2}{dt} + 2D\beta\sigma_s^2 = C\sigma_r^2[1 + U_1(t)] \quad (47)$$

$$U_1(t) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 1 \\ 2 \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \rho^i \frac{U_2(t)}{U_2(t-i\Delta t)} & [t/\Delta t] \geq 1 \end{cases} \quad (48)$$

$$\frac{dU_2(t)}{dt} + D\beta U_2(t) = 0 \quad (49)$$

$U_2(0)=1$ [] : ガウス記号

3. シミュレーション法による理論式の検討

シミュレーションでは、図-1に示すランダムステップ関数を発生させ、式(2)、(3)を用いて流出量 $q(t)$ を数値計算で求める。この過程を繰り返し、時刻 t における流出量の1~2次モーメントを求める。すなわち、式(2)の右辺の $r(t)$ をランダムステップ関数に置換して計算することになる。最初に、ランダムステップ関数を用いたときの流出量の確率応答特性を検討しておこう。 $p=1$ のとき、式(2)、(3)は容易に解けて、流出量は次のようになる。

$$q(t) = \begin{cases} \int_0^t R(1)h(t-\tau)d\tau & 0 \leq t < \Delta t \\ \sum_{j=1}^{i-1} \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} R(j)h(t-\tau)d\tau + \int_{(i-1)\Delta t}^t R(i)h(t-\tau)d\tau & (i-1)\Delta t \leq t \leq i\Delta t \quad 2 \leq i \leq n \\ \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} R(j)h(t-\tau)d\tau & t \geq n\Delta t \end{cases} \quad (50)$$

$$h(t) = \frac{1}{K} e^{-\frac{t}{K}}$$

両辺の期待値をとると、次式が得られる。

$$\bar{q}(t) = \begin{cases} R \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{K}} \right\} & 0 \leq t < \Delta t \\ R \left\{ e^{-\frac{n\Delta t}{K}} - 1 \right\} e^{-\frac{t}{K}} & t \geq n\Delta t \end{cases} \quad (51)$$

流出量の分散は、平均ステップ高 $\bar{R}$ からの偏差を $\bar{R}(j)$ とすると、 $\bar{q}(t)$ は次のようになる。

$$\bar{q}(t) = \begin{cases} \int_0^t \bar{R}(1)h(t-\tau)d\tau & 0 \leq t < \Delta t \\ \sum_{j=1}^{i-1} \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} \bar{R}(j)h(t-\tau)d\tau + \int_{(i-1)\Delta t}^t \bar{R}(i)h(t-\tau)d\tau & (i-1)\Delta t \leq t \leq i\Delta t \quad 2 \leq i \leq n \\ \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} \bar{R}(j)h(t-\tau)d\tau & t \geq n\Delta t \end{cases} \quad (52)$$

両辺を2乗して期待値をとると、式(53)が得られる。

$$\sigma_q^2 = \begin{cases} \sigma_R^2 (1 - e^{-\frac{t}{K}})^2 & 0 \leq t \leq \Delta t \\ \sigma_R^2 \left\{ e^{-\frac{2t}{K}} \left[1 - e^{-\frac{\Delta t}{K}} \right]^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{i-1} \rho^{j+l} e^{\frac{(j+l)\Delta t}{K}} \right. \\ \quad \left. + 2e^{-\frac{t}{K}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{K}} \right) \left[1 - e^{-\frac{(i-1)\Delta t - t}{K}} \right] \sum_{j=1}^{i-1} \rho^{j+1} e^{\frac{j\Delta t}{K}} \right. \\ \quad \left. \times \left(1 - e^{-\frac{(i-1)\Delta t - t}{K}} \right)^2 \right\} & (i-1)\Delta t \leq t \leq i\Delta t \quad 2 \leq i \leq n \\ \sigma_R^2 \left(1 - e^{-\frac{(i-1)\Delta t - t}{K}} \right)^2 & t \geq n\Delta t \end{cases} \quad (53)$$

図-6は式(53)の分散 σ_q^2 の計算例を示しているが、平滑な曲線ではなく Δt 毎に振動していることがわかる。すなわち、流出量の平均値 $\bar{q}(t)$ は合理的なシミュレーションを行うと、式(51)に示すように十分に滑らかな曲線となるが、分散は例え合理的なシミュレーションを行っても、滑らかな曲線とはならないことを示している。

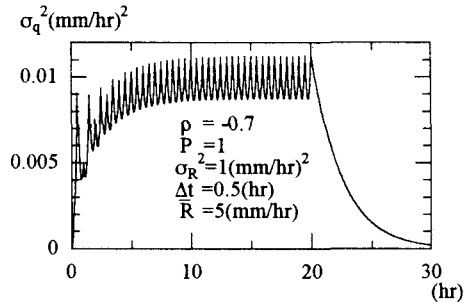


図-6 式(53)の計算例

シミュレーションでは、式(16)の確率変数 $N(t)$ の確率密度関数として、次の指数分布を与えた。

$$f(N) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda N - \frac{1}{\lambda}} & -\frac{1}{\lambda} \leq N \quad \lambda: \text{const.} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (54)$$

$$E(N)=0, \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \mu_{N3} = \frac{2}{\lambda^3}, \quad \mu_{N4} = \frac{9}{\lambda^4}$$

図-7は降雨量の平均値が一定のとき、回帰係数 ρ の値が流量の分散に及ぼす影響を示している。図の実線はシミュレーションによる結果で、破線は式(8)、(47)~(49)を連立させて解き、式(14)を用いて分散を計算した結果を示している。なお、式(8)、(47)の係数 α 、 β に関しては、次式の第1項のみを採用している。

$$\alpha = S^{m-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} m(m-1) \frac{E(\bar{S}^2)}{\bar{S}^2} + \frac{1}{6} m(m-1)(m-2) \frac{E(\bar{S}^3)}{\bar{S}^3} \right\} \quad (55)$$

$$\beta = \frac{\bar{S}^{m+1}}{E(\bar{S}^2)} \left\{ m \frac{E(\bar{S}^2)}{\bar{S}^2} + \frac{1}{2} m(m-1) \frac{E(\bar{S}^3)}{\bar{S}^3} + \frac{1}{6} m(m-1)(m-2) \frac{E(\bar{S}^4)}{\bar{S}^4} \right\} \quad (56)$$

式(55), (56)は、式(6)の誤差の2乗平均値を最小にする α , β を意味しており、Brasら³⁾によって与えられたものである。図-7には貯留指数が $P=0.6$ の場合を示しているが、図-6の貯留指数が $P=1$ の場合と同様に Δt 毎の振動が現れている。理論式によって求められた分散は、これら振動の上限値の包絡線になっている。また、図-8は $\bar{R}(t)$ が三角形波形をしている場合であるが、シミュレーション値と理論値の適合性は良好である。

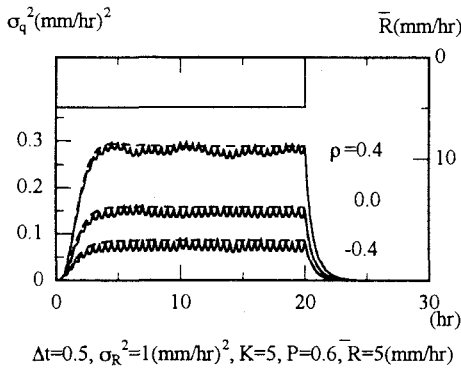


図-7 シミュレーションと理論解の比較
(平均降雨量が一定の場合)

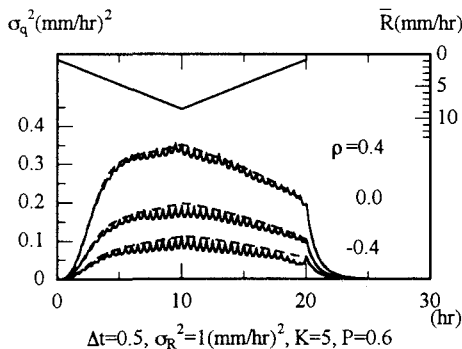


図-8 シミュレーションと理論解の比較
(平均降雨量が三角形の場合)

4. まとめ

降雨量が互いに従属する場合、著者等のこれまでの研究では次式を仮定している。すなわち、 $\rho > 0$ のとき離散的な降雨量、連続関数と定義される降雨量の自己共分散関数をそれぞれ式(57), (58)で表している。

$$E\{\bar{R}(\tau_1)\bar{R}(\tau_2)\} = \sigma_R^2 e^{-\gamma|\tau_1 - \tau_2|} \quad (57)$$

$$E\{f(\tau_1)f(\tau_2)\} = \sigma_{f1} e^{-\gamma|\tau_1 - \tau_2|} + \sigma_{f2} \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (58)$$

式(57), (58)は、それぞれ式(25), (46)に対応することになる。式(57), (58)を式(30)に代入して、未定数 σ_{f1} , σ_{f2} を求めた結果を以下に示している。

$$\sigma_{f1} = -\frac{(\gamma \Delta t)^2 \sigma_R^2}{J_1 J_2} \quad \sigma_{f2} = \frac{\Delta J_3 \sigma_R^2}{C J_1 J_2} \quad (59)$$

$$J_1 = 1 - e^{-\gamma \Delta t} \quad J_2 = 1 - e^{-\gamma \Delta t} \quad J_3 = e^{-\gamma \Delta t} - e^{-\gamma \Delta t} + 2\gamma \Delta t \quad (60)$$

式(58)～(60)を式(11)に代入して、次式を得ている。

$$\frac{d\sigma_s^2}{dt} + 2D\beta\sigma_s^2 = 2\sigma_{f1}V_1 + C\sigma_{f2} \quad (61)$$

$$\frac{dV_1}{dt} + (\gamma + D\beta)V_1 = 1 \quad (62)$$

式(61), (62)を用いた流出量の分散は、シミュレーションによって得られた結果と一致していた。図-9は、同一の条件で式(47)と式(61)の右边を比較したものである。実線が式(47)を破線が式(61)の右边の値である。式(47)が厳密解であるのに対して、式(61)は近似解であるが、極めてよく一致している。一方、 $\rho < 0$ の場合には、 $\bar{R}(\tau)$ の自己共分散関数として次式を仮定している。

$$E\{\bar{R}(\tau_1)\bar{R}(\tau_2)\} = \sigma_R^2 e^{-\gamma|\tau_1 - \tau_2|} \cos \omega(\tau_1 - \tau_2) \quad (63)$$

$$\omega = \frac{\pi}{\Delta t}$$

$\cos \omega(\tau_1 - \tau_2)$ によって、自己共分散関数が正負に振動している現象を表現しようとしたものである。しかし、式(63)は $|\tau_1 - \tau_2| = i\Delta t$ (i : integer)のとき、式(25)に一致しているが、 $|\tau_1 - \tau_2| \neq i\Delta t$ のとき図-10に示すように式(25)から大きくはずれる場合がある。したがって、式(63)の適用限界が狭い原因になっている。

定常状態における分散 $\sigma_q^2(\infty)$ は、式(47), (48)において次式を考えることにより求まる。

$$\frac{d\sigma_s^2}{dt} = 0, \quad \frac{U_2(t)}{U_2(t - i\Delta t)} = 1 \quad (64)$$

$$\sigma_q^2(\infty) = \frac{m}{2K} \bar{r}^{1-\frac{1}{m}} \sigma_r^2 \left\{ 1 + \frac{2\rho}{\exp\left(\frac{m}{K} \bar{r}^{1-\frac{1}{m}} \Delta t\right) - \rho} \right\} \quad (65)$$

式(47),(61)の右辺強制項

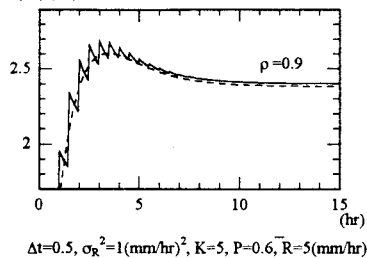


図-9 式(47)と式(61)の右辺強制項の比較
実線：式(47)、破線：式(61)

式(25),(63)の左辺

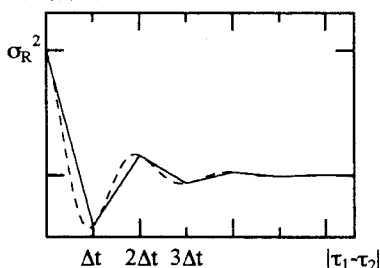


図-10 式(25)と式(63)の比較
実線：式(25)、破線：式(63)

図-11は、式(65)の定常状態における流出量の分散 $\sigma_q^2(\infty)$ とパラメータ ρ , $\bar{R}$, K , m の関係を示している。 ρ , $\bar{R}$, m の値が増加すると $\sigma_q^2(\infty)$ は増大し、貯留係数 K の値が増加すると $\sigma_q^2(\infty)$ は減少している。平均降雨量 $\bar{R}(t)$ が図-8に示すように三角形波形になると、定常状態の分散を定義できない。流出量の分散の最大値 $\sigma_q^2(\max)$ を対象にすると、 $\sigma_q^2(\max)$ は図-11の $\sigma_q^2(\infty)$ と同様な傾向のあることを確かめている。また、式(65)において $\rho=0$ とすると、これは藤田ら¹⁾が求めた降雨が時間的に独立な場合の定常状態の流出量の分散に一致している。

また、式(47)において $\rho=0$ とすると、右辺の $U_1(t)$ が消失して次のようになる。

$$\frac{d\sigma_s^2}{dt} + 2D\beta\sigma_s^2 = C\sigma_r^2 \quad (66)$$

式(66)もまた藤田らが求めた降雨が独立な場合の式に一致している。

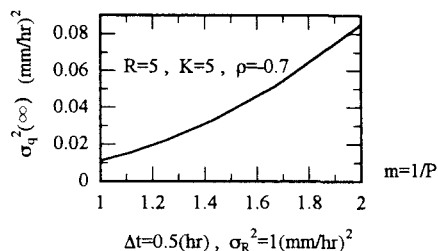
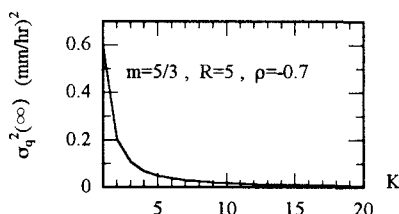
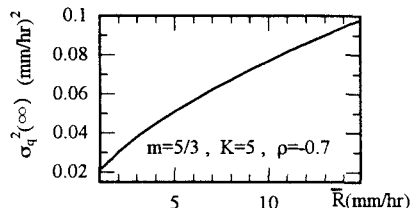
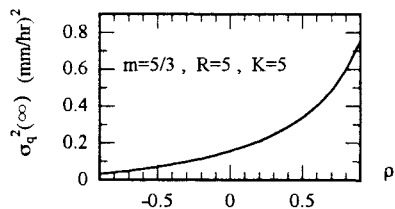


図-11 定常状態における流出量の分散

参考文献

- 1) 藤田睦博、工藤睦信、中尾隆志、橋本誠秀；貯留型流出モデルの確率応答-降雨が時間的に独立な場合-、土木学会論文集, No515/II-31, 1~11, 1995
- 2) 工藤睦信、藤田睦博、田中岳、内島邦秀；貯留型流出モデルの確率応答-降雨が互いに従属する場合-、水工学論文集, 第40巻, 113-120, 1996
- 3) Bras, R.L and Georgakakos, K.P., "Real time nonlinear filtering techniques in streamflow forecasting: A statistical linearization approach", Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, 95-105, 1980