

マッコーマック法を用いた砂防ダム上流の堆砂計算法に関する研究

A Numerical Simulation of Sedimentation in
Upstream Region of Sabo Dam Using MacCormack
Scheme

日下部重幸*・道上正規**・藤田正治***・檜谷治****・宮本邦明*****

By Shigeyuki KUSAKABE, Masanori MICHIEUE, Masaharu FUJITA, Osamu HINOKIDANI and Kuniaki MIYAMOTO

MacCormack scheme is very effective in the calculation of sedimentation in the upstream region of Sabo dam because the flow situation changes from super-critical flow to sub-critical flow. The scheme, however, has some problems on estimating the artificial viscosity coefficient and application range of this scheme etc.. In this paper, following two points are mainly investigated.

- (1) general method for estimating the artificial viscosity coefficient for the flow with hydraulic jump.
- (2) stability of calculation of flow and bed variation near the front of delta of sedimentation.

keywords: MacCormack scheme, Sedimentation, Steep channel, Bed variation, Sabo dam

1. まえがき

砂防ダム上流部など常・射流の混在する流れや河床変動の計算にマッコーマック法が有力とされ注目されている^{1) 2) 3) 4)}。この方法は、(1)常・射流の区別なく計算できる、(2)跳水など流れの遷移点が自動的に決定される、(3)河床変動計算で前進・後退差分を分けなくてもよいなどの利点がある。しかし、砂防ダム上流のような急勾配流れの堆砂に適用するにはいくつかの問題点があると思われる。まず流れの計算には数値振動を抑えるため人工粘性項が必要とされ、拡散型とTVD型の人工粘性項が提案されているが^{5) 6)}、急勾配河道の堆砂計算のように跳水を含む流れに対して、人工粘性係数を一般的に与える方法が提案されていない。つぎに、堆砂前面は一種の段落ち流れと考えられ、しかもそこで流れが射流から常流に遷移するがその個所での流れの計算精度が明らかでない。さらに、河床変動の差分式に含まれる人工粘性項の効果や人工粘性係数の一般的な与え方が不明確である。本研究は、以上の点について考察し、(1)一般的な人工粘性係数の決定法、(2)堆砂前面の射流から常流へ流れが遷移する個所におけるマッコーマック法の安定性と適用限界および

*	正会員	神戸市立工業高等専門学校教授	(〒651-21 神戸市西区学園東町8-3)
**	正会員	工博 鳥取大学工学部教授	(〒680 鳥取市湖山町南4-101)
***	正会員	工博 京都大学農学部助教授	(〒606-01 京都市左京区北白川)
****	正会員	工博 鳥取大学工学部助教授	(〒680 鳥取市湖山町南4-101)
*****	正会員	工博 鳥取大学地域共同研究センター助教授	(" ")

人工粘性の効果などについて検討するものである。

2. 基礎式と計算法

2. 1 流れと河床変動に対する基礎式

図-1のような座標系のもとに、非定常・一次元漸変流の連続式、運動方程式および流砂の連続式は、保存形で表-1の式(1),(2)のように表される。本研究では一様砂を扱うものとし、流砂量の式は、芦田・道上の式を用いた。

2-2. 基礎式の差分化および人工粘性項

計算に用いた式は、式(1)をマッコーマック法で差分化したもので、式(3),(4)のような予測子と修正子からなる。また、人工粘性項は拡散型のものを用い式(5)~(7)で表され、人工粘性係数は、式(8)のように流れおよび河床変動の基礎式に対してKvおよびKzで表している。

2. 3 計算方法

堆砂計算の境界条件としては、上流端で流量と給砂量を下流端で水深を与える。また、初期条件は河床を固定床としたときの定常解をあらかじめ計算して与える。固定床の定常解は、上流端で流量を与え下流端を十分せき上げた状態から所定の下流端水深になるまで徐々に低下させて求められる。

3. ダム上流の跳水を含む流れの計算

3. 1 流れの計算精度におよぼす要因

跳水を含む流れにマッコーマック法を適用すると、跳水位置も含めて計算できるが、跳水点付近は数値振動が大きくなる。この数値振動に及ぼす要因としては差分間隔Δx、人工粘性係数Kvが考えられ、跳水の程度

は上流側のフルード数Frの関数となるのでFrも要因の一つと考えられる。しかし、いくつかの数値計算を行うとこれらの値が一定でも、配置された格子点の位置と跳水の生じる位置の関係によっても数値振動が変化することが分かった。たとえば、勾配1/50、マニングの粗度係数0.01の水路に単位幅流量98.5cm²/sの通水を行い、下流端の水深Hdを7.27cmから7.54cmに変えると跳水の位置が上流に移動する。この流れを同一の計算格子上で計算すると、水面形は図-2、3のようになる。ここに、図中の描点は計算値、実線は実験値であり、上流側のフルード数は2.17、跳水長は0.1mであった。計算値は、跳水を含む水面形の実験値をほぼ再現しているが、配置された格子点の中の跳水点位置の違いにより計算精度の傾向が異なっていることが分かる。すなわち、図-2では、跳水上流側でKvが大きいほど計算値の数値振動が小さいのに対し、図-3では逆にKvが小さいほど数値振動が小さい。以上の結果により、人工粘性係数は一般に値が大きいほど数値振動を抑える効果があると考えられているが、場合によっては反対の傾向になることが分かった。

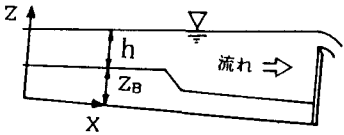


図-1 座標系

表-1 基礎式と人工粘性係数

$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = C$	(1)
ここに、t:時間、x:流れ方向の距離、U、EとCは次のように表される。	
$U = \begin{bmatrix} Bh \\ Q \\ z_B \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} Q \\ gBh^2/2 + Q^2/(Bh) \\ q_n/(1-\lambda) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ gBh(i_B - i_r) \\ 0 \end{bmatrix}$	(2)
ここに、B:水路幅、h:水深、Q:流量、g:重力の加速度 i _B :河床勾配、i _r :エネルギー勾配、z _B :河床高、q _n :単位幅当り流砂量、λ:河床材料の空隙率である。	
予測子: $\bar{U}_i = U_i - \Delta t / \Delta x \cdot (E_{i+1}^n - E_i^n) + \Delta t C_i + V_i$	(3)
修正子: $U_i^{n+1} = 0.5 \{ (U_i^n + \bar{U}_i) - \Delta t / \Delta x \cdot (\bar{E}_i - \bar{E}_{i-1}) + \Delta t \bar{C}_i + W_i \}$	(4)
ここに、Δx:格子点の計算間隔、Δt:計算の時間間隔、 V、W:人工粘性項、i: x 軸上の計算点、n: 時間軸上の計算点、 $\bar{}$: 予測子による結果である。	
予測子: $V_i = -(D_{i+1}^n - D_i^n)$	(5)
修正子: $W_i = (\bar{D}_i - \bar{D}_{i-1})$	(6)
$D_i = Ku_{*i} h_i (u_{*i+1} - 2U_i + U_{i-1}) (\Delta t / \Delta x^2)$	(7)
ここに、K は人工粘性係数で、流れおよび河床変動の基礎式に対しKvおよびKzとすると次式で表される。	
$K = \begin{bmatrix} Kv & 0 & 0 \\ 0 & Kv & 0 \\ 0 & 0 & Kz \end{bmatrix}$	(8)

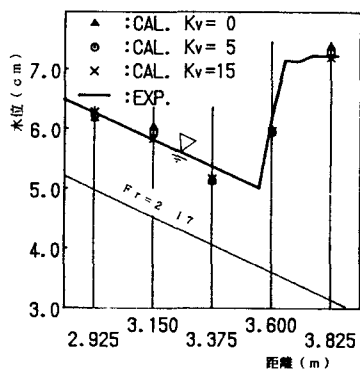


図-2 $H_d=7.27\text{cm}$ の水面形

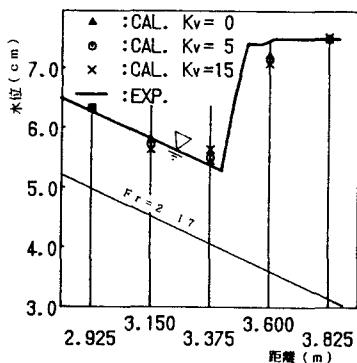


図-3 $H_d=7.27\text{cm}$ の水面形

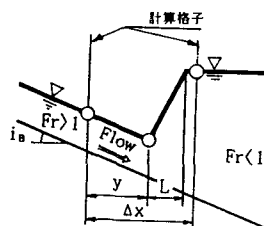


図-4 跳水点の位置

3.2 最適な人工粘性係数

跳水の形状の点では、 K_v を大きくすると一般に跳水の形が鈍ってくるのであるべく小さいほうが良い。また数値振動の点では前項の結果のように配置された格子点の中の跳水点の位置によって K_v が大きい程良い場合と反対の場合がある。そこで跳水点がどこにあっても平均的に数値振動がおさえられ、しかも跳水の形の鈍りが少ない計算結果を与える K_v を最適な人工粘性係数として以下のように求める。

跳水点の位置を図-4の y で定義し、計算時の数値振動が $\Delta x/L, K_v, y/\Delta x$ によっていかに変化するかを調べた。ここに、 L は跳水長である。数値振動は、跳水上流側の顕著な数値振動が見られる部分の水面形の実験値に対する計算値の分散 σ^2 で表した。図-5の実線は $\Delta x/L=2.25$, $Fr=2.17$ の場合の $K_v, y/\Delta x$ による σ^2 の変化を表したものである。 $y/\Delta x=0.8$ のときは、 K_v を大きくすると σ^2 が小さくなり、人工粘性の効果が見られるが、 $y/\Delta x=0.2$ のときは、逆に K_v が不要であることが分かる。一般に跳水はどこで起こるか分からないので、跳水がどこで起こってもある程度の精度を保証するためには $K_v>5$ 程度が必要である。一方計算による跳水部の水面勾配 θ_c とV.T.Chow⁷⁾による跳水部の水面勾配 θ_o との比 θ_c/θ_o を求めると、図-5の破線に示すように K_v を大きくすると小さくなる。ただし、 θ_o は跳水部における1格子当りの最大水深差を Δx で除したもので、 $\Delta x/L=2.25$ の場合は、跳水前後の水深差が実験値と同じとき最大でも θ_c/θ_o は0.44である。したがって、跳水の形をよりよく評価するためには K_v をできるだけ小さくしたほうがよい。以上の2点からこの流れに対する最適な K_v は $\Delta x/L=2.25$ の場合 $K_v=5$ とする。図-6は、 $\Delta x/L=0.28$, $Fr=2.17$ の結果で、同様の考察により $K_v=1$ が

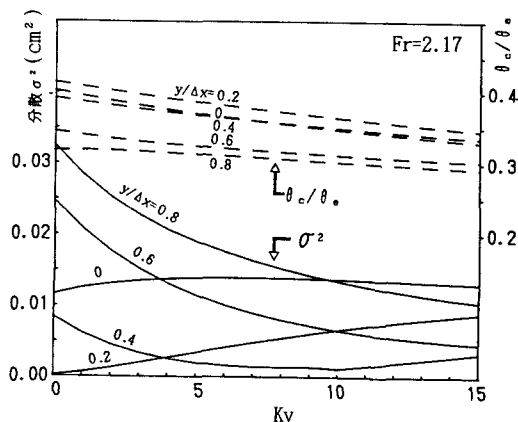


図-5 K_v による σ^2 と θ_c/θ_o の変化 ($\Delta x/L=2.25$)

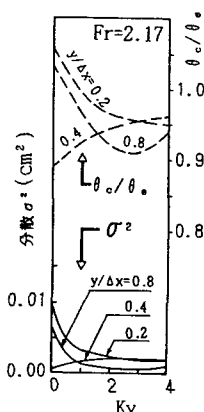


図-6 ($\Delta x/L=0.28$)

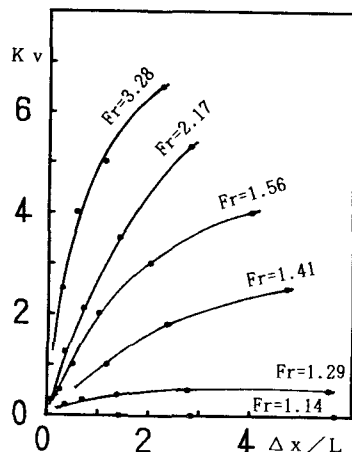


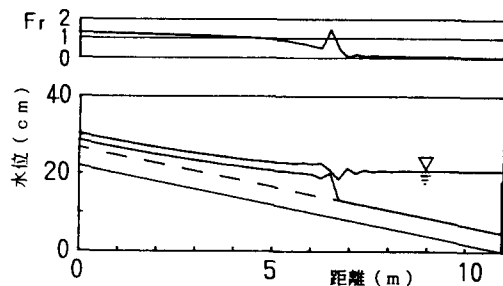
図-7 最適な人工粘性係数

最適であると見なせる． $\Delta x/L$ および Fr を変化させて最適な K_v を求め、それらの関係を示すと図－7のようになる．この図より跳水・上流側の Fr が大きく、跳水前後の水位差が大きい程人工粘性係数 K_v を大きくしなければならないことが分かる．また、格子間隔を小さくすると K_v は小さくなる．しかし、実用上は Δx の大きさに限度があると考えられるので、 $\Delta x/L$ に応じた最適な K_v の値をこの図から求めるのが良い．

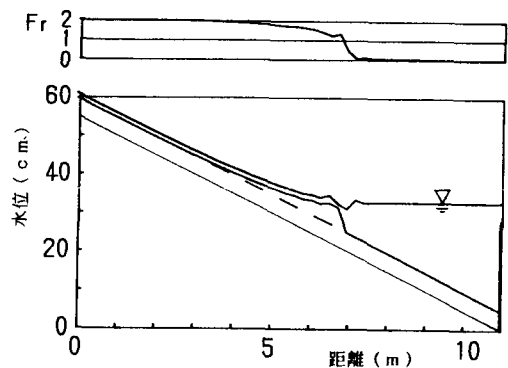
4．ダム上流の堆砂過程の計算

4．1 デルタ前面付近における不安定性

マッコーマック法を初期河床勾配の異なる2つの場合の堆砂計算に適用した．計算条件は、長さ11m、単位幅流量 $93.8\text{cm}^2/\text{s}$ 、砂の粒径1mm、粗度係数0.016で初期河床勾配、単位幅給砂量、下流端水深は、CaseT-1で $1/50, 0.5\text{cm}^2/\text{s}, 0.16\text{m}$ 、CaseT-2で $1/20, 2.0\text{cm}^2/\text{s}, 0.28\text{m}$ である．給砂量は上流端における平衡流砂量である．計算において流れに対する人工粘性係数は前章の結果より $K_v=5$ とし、河床変動に対する人工粘性係数 K_z は明確でないのでとりあえず0とおいた．両ケースについて計算を実行するとCaseT-1では44.0分後、CaseT-2では4.4分後に計算が発散した．そこで発散直前の水面形、河床形を調べると図－8、9のようでありデルタ前面付近において水面と河床形状に振動が見られた．デルタの前面では一種の段落ち流れを形成しており、流れが射流から常流へ遷移している．また、CaseT-1ではデルタ前面で緩勾配、CaseT-2では急勾配になっている．このような条件下では、デルタ前面近傍での計算精度が問題であると考え、まず段落ち部の流れの計算について考察する．



図－8 CaseT-1の水面形と堆砂形(44分経過時)



図－9 CaseT-2の水面形と堆砂形(4分経過時)

4．2 段落ち流れの計算

マッコーマック法により固定床段落ち流れの計算を行った．段落ちの形状は上流側の勾配 $1/500$ 、下流側の勾配 0 で、段落ちの高さ Δz はCaseS-1, S-2で 2cm 、CaseS-3で 4cm である．単位幅流量は $98.5\text{cm}^2/\text{s}$ 、下流側的水深 H_d は、完全越流、不完全越流、もぐりせきの条件になるよう $H_d/(\Delta z+h_c)=0.6, 0.9, 1.2$ に設定した．ここに、 h_c は限界水深である．人工粘性係数 K_v はCaseS-1で 0 、CaseS-2, S-3で 6 とし、マンニングの粗度係数 0.0097 、計算の距離間隔 0.225m とした．この条件では段落ち上流側はCaseT-1の場合のように緩勾配となる．

図－10、11、12はCaseS-1, S-2, S-3の結果を示したもので、等流水深線と限界水深線を破線と一点鎖線で表示している．どのCaseも完全越流および不完全越流の場合、段落ち部で水深が限界水深以下になっている．このとき段落ち部上流の水面形を見ると低下背水になるべきところがせき上げ背水になっている．この傾向は段落ちの高さが高いほど、また、人工粘性を考慮しないと大きくなる．いま、段落ち部とその直上流の計算断面の間で成り立つ差分式を使って、段落ち部の水深を与えて上流側的水深を定常状態に対して

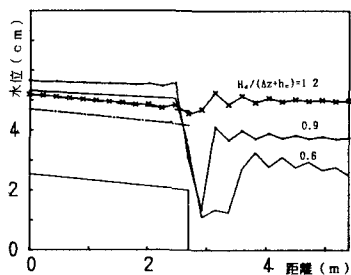


図-10 CaseS-1の水面形

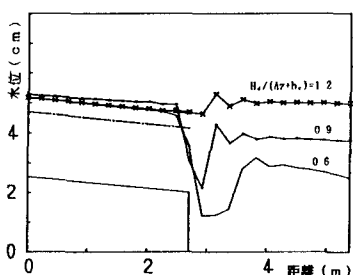


図-11 CaseS-2の水面形

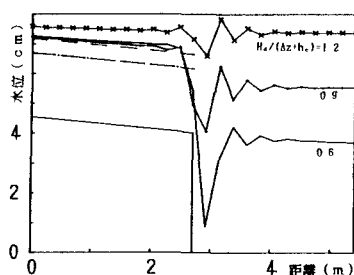


図-12 CaseS-3の水面形

計算した。ただし、人工粘性項は無視した。この結果、段落ち上流部が緩勾配のとき、段落ち部の水深が小さく限界水深から離れるほど、上流側の水深は大きくなり、等流水深を越えるようになった。したがって、段落ち部の水深が限界水深以下になると上流側の計算精度が悪くなることになる。図-13は前述の水路と流量に対して下流端の水深を変化させて段落ち流れの水面形を計算し、段落ち部のフルード数と下流端の水深の関係を示したものである。この図から完全越流および不完全越流のとき段落ち部で水深が限界水深以下になるので、このようなとき計算精度が低下するものと考えられる。また、段落ちの高さが高いほど段落ち部の水深が小さくなりFrが大きくなっており、高い段落ちほど水面形の計算精度が悪くなる。ただし、前述の段落ち部とその直上流部での差分式の解の特性により、差分間隔 Δx を条件に応じて小さくすれば段落ち部の水深が限界水深より小さくても段落ち部上流側水深が少なくとも等流水深以上になることは防げるが、実用上このような Δx を使うことには限度がある。

段落ち上流部が急勾配のときは、上流で跳水が起きる場合と等流で流れ込む場合がある。後者について若干検討した結果、段落ち部で等流水深以下となり緩勾配のときと同じように上流側でせき上げ背水が見られた。しかし、この現象は緩勾配のときと異なり Δx を小さくすることでは解消できなかった。

4.3 堆砂計算

図-8, 9のような堆砂過程では、いわゆる不完全越流のような流れの状況になっており、4.2で示したようにデルタ前面近くの流れの計算精度がわるく、そのため堆砂計算の途中で発散に至る。これを防ぐためには Δx を小さくすることと流れに対する人工粘性係数 K_v だけでなく河床変動の計算にも人工粘性係数 K_z を加えることが考えられる。

そこで先のCaseT-1, T-2について、表-2のよう

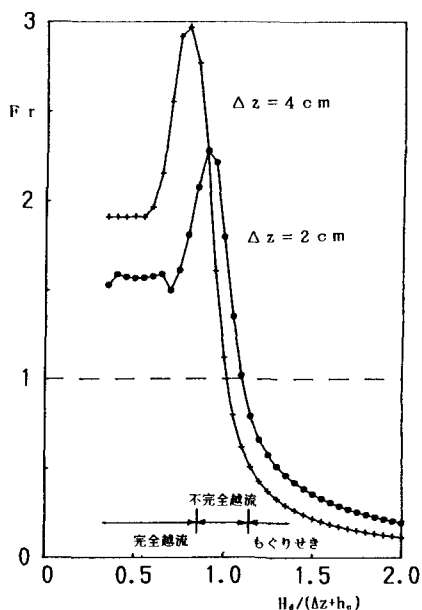


図-13 段落ち部におけるFrの値

表-2 Δx , K_z によるCaseT-1, T-2のダムからデルタのフロントまでの距離

K_z	0	0	0.1	0.1
Δx (m)	0.225	0.113	0.225	0.113
CaseT-1	4.50m	4.16m	0.90m	0 m
CaseT-2	4.28m	4.28m	3.83m	3.60m

に Δx を0.225mと0.113m, K_z を0と0.1の2種類設定して堆砂計算を行った。 K_v は3.2から得られた値5を用いた。表-2はそれぞれの場合において、計算が発散したときのダムからデルタのフロントまでの距離を示したもので、0mは満砂を表す。CaseT-1はデルタ前面付近で緩勾配になっており、 Δx を小さくすることによって計算の安定性が増すとともに、 K_z を考慮することで満砂まで計算が実行されている。この場合、 K_z は K_v より1オーダー小さい値でよく、これより大きくすると堆砂形状が鈍った。CaseT-2は、デルタ前面が急勾配であり、 Δx を小さくし K_z を考慮することで解の改善は見られるがまだ十分安定な計算になっておらず満砂までに発散した。CaseT-1では満砂まで計算できたが、4.2の結果から推察すると、デルタの高さがさらに高くなるときにはこの計算条件で計算が安定するかは保証されていない。今後この点について検討していく必要がある。

5. あとがき

マッコーマック法によって砂防ダム上流部の流れと堆砂の計算をする場合の人工粘性係数やデルタ前面の流れや河床変動計算の安定性について検討した。主な結果は次の通りである。

- (1)マッコーマック法を射流から常流に移移する流れに適用する場合、跳水・上流の数値振動は、跳水の起こる位置と配置された格子点との位置関係、フルード数および $\Delta x/L$ によって異なる。
- (2)流れに対する拡散型の人工粘性係数 K_v を、跳水点がどこにあっても平均的に数値振動が抑えられ、しかも跳水の形の鈍りの少ない計算結果となるように求めた。その結果、最適な人工粘性係数は計算間隔と跳水長の比 $\Delta x/L$ およびフルード数をパラメータとして図-7から求められることが分かった。また、これらは従来経験的に決められた値には近いものである。
- (3)堆砂の計算においてデルタ前面が緩勾配となる場合、不完全越流または完全越流の条件下のとき上流側の計算精度が悪くなり、このため堆砂計算の不安定性を引き起こすものと考えられる。この不安定性はデルタの高さが高いほど顕著であるが、計算の距離間隔 Δx を小さくしたり、適当な K_v , K_z を用いることで不安定性を小さくすることができる。
- (4)デルタ前面が急勾配の場合についても、 Δx を小さくしたり適当な K_v , K_z を用いることで不安定性を小さくすることはできるが、詳細な検討は今後の課題である。

参考文献

- 1) Garcia R. and Kahawita R.: Numerical Solution of the St. Venant Equations with the MacCormack Finite-difference Scheme, International Journal for Numerical method in Fluids, Vol.6, pp.259-274, 1986
- 2) 潮田智道・河村三郎・中谷剛：保存則系差分法のスキームの特性に関する考察，土木学会第45回年講，p.438-439, 1990
- 3) 崇田徳彦・清水康行・北条紘次：MacCormack法を用いた不定流計算，土木学会第45回年講，pp.432-433, 1990
- 4) 岡部健士・天羽誠二・石垣昌邦：常流・射流の遷移を伴う不等流の数値計算法について，水工学論文集，第36巻，pp337-342, 1992
- 5) 河村三郎・中谷剛：TVD-MacCormack法による常・射流混在流の数値計算法，水工学論文集，第37巻，pp763-768, 1993
- 6) 岡部健士・高橋邦治・穴瀬康雄：MC法を用いた1次元開水路流れの数値計算法，徳大工学部研究報告，pp.25-33, 1993
- 7) V.T. Chow・石原藤次郎訳：開水路の水理学Ⅱ，丸善，pp.395-396, 1962