

移動一般座標系による側岸侵食を伴う河道変動の数値解析

Numerical Analysis of Channel Processes with Bank Erosion
by Means of Moving Boundary Fitted Co-ordinate System

長田 信寿*・細田 尚**・村本 嘉雄***・Md Munsur Rahman****

By Nobuhisa NAGATA, Takashi HOSODA,

Yoshio MURAMOTO and Md Munsur RAHMAN

Channel processes with bank erosion in unsteady open channel flows are investigated in this paper by numerical analysis. As bank erosion and deposition occur with the lapse of time, the area of the numerical object changes with moving the boundaries. Therefore a moving boundary fitted co-ordinate system is used to analyze the channel process. The model is applied to experiments for the channel processes with bank erosion of straight and meandering channels. The model is verified for the widening process of straight channel, and modified for the meandering channel process by introducing equations of secondary flow component.

Keywords: channel processes, bank erosion, moving boundary fitted co-ordinate system

1. はじめに

河岸侵食とそれに伴う流路変動機構の解明と予測手法の確立は、我が国のように国土の高度利用が進み、河川のごく近傍においても宅地等の利用がある現況において、周辺住民の安全な生活を確保する上で、早急に取り組むべき課題と考えられる。上記のうち、側岸の侵食機構については、実験あるいは現地観測から、基礎的資料が蓄積されつつある¹⁾³⁾。しかし、予測手法については、現象の複雑さに起因する河岸侵食機構のモデル化の難しさ、および河岸侵食による河道の拡幅、蛇行の発達により、対象領域の平面形状が時間的に変化していくなど計算上の難しさ等の要因により、これらの河岸侵食を伴う流路変動を予測できる数値解析モデルは、側岸固定の河床変動計算と比較して開発が遅れている分野である。

そこで、本研究では、複雑な形状を有する境界にも適合でき、またその境界が時間的に変化する場合にも対応が可能な移動一般座標系を用いて、河道変動を伴う開水路非定常流れを取り扱い得る数値解析モデルを構築することを目的としている。また、河岸の崩落は、連続的に生じるのではなく、側岸の侵食がある程度進行したのち間欠的に生じるものであるが、この機構は長谷川⁴⁾の方法を参考としてモデル化を行った。本モデルを、直線水路および *sinc-generated curve* の蛇行水路に適用し、実験結果と比較することにより、モデルの妥当性について検討する。

* 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学科
(〒601 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

**** 学生員 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻

2. 計算方法

2.1 流れの基礎式

流れの基礎式は、平面2次元流れの連続式、及び運動方程式で構成される。移動一般座標系で表示すれば、以下の通りである。なお、(2)、(3)式においては、スタッガード・スキームの有限体積法に適合するように、反変成分表示している⁵⁾。

連続式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left((\xi_t + U)\frac{h}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left((\eta_t + V)\frac{h}{J}\right) = 0 \quad (1)$$

運動方程式

[ξ 方向]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q^\xi}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left((\xi_t + U)\frac{Q^\xi}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left((\eta_t + V)\frac{Q^\xi}{J}\right) \\ & - \frac{M}{J}\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial t} + (\xi_t + U)\frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + (\eta_t + V)\frac{\partial \xi_x}{\partial \eta}\right) - \frac{N}{J}\left(\frac{\partial \xi_y}{\partial t} + (\xi_t + U)\frac{\partial \xi_y}{\partial \xi} + (\eta_t + V)\frac{\partial \xi_y}{\partial \eta}\right) \\ & = \frac{\xi_x}{J}gh \sin \theta - gh\left(\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta}\right) - \frac{\tau_{b\xi}}{\rho J} + \frac{\xi_x^2}{J} \frac{\partial}{\partial \xi}(-\overline{u'^2}h) + \frac{\xi_x \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \eta}(-\overline{u'^2}h) \\ & + \frac{\xi_y^2}{J} \frac{\partial}{\partial \xi}(-\overline{v'^2}h) + \frac{\xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \eta}(-\overline{v'^2}h) + \frac{\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \eta}(-\overline{u'v'}h) + \frac{2\xi_x \xi_y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi}(-\overline{u'v'}h) \end{aligned} \quad (2)$$

[η 方向]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q^\eta}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left((\xi_t + U)\frac{Q^\eta}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left((\eta_t + V)\frac{Q^\eta}{J}\right) \\ & - \frac{M}{J}\left(\frac{\partial \eta_x}{\partial t} + (\xi_t + U)\frac{\partial \eta_x}{\partial \xi} + (\eta_t + V)\frac{\partial \eta_x}{\partial \eta}\right) - \frac{N}{J}\left(\frac{\partial \eta_y}{\partial t} + (\xi_t + U)\frac{\partial \eta_y}{\partial \xi} + (\eta_t + V)\frac{\partial \eta_y}{\partial \eta}\right) \\ & = \frac{\eta_x}{J}gh \sin \theta - gh\left(\frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\eta_x^2 + \eta_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta}\right) - \frac{\tau_{b\eta}}{\rho J} + \frac{\xi_x \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi}(-\overline{u'^2}h) + \frac{\eta_x^2}{J} \frac{\partial}{\partial \eta}(-\overline{u'^2}h) \\ & + \frac{\xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi}(-\overline{v'^2}h) + \frac{\eta_y^2}{J} \frac{\partial}{\partial \eta}(-\overline{v'^2}h) + \frac{\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi}(-\overline{u'v'}h) + \frac{2\eta_x \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \eta}(-\overline{u'v'}h) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 h ：水深、 (Q^ξ, Q^η) ：流量フラックスの反変成分、 (M, N) ： x, y 方向の流量フラックス、 z_s ：基準面からの水位、 θ ：水路勾配、 (U, V) ：流速ベクトルの反変成分、 J ：座標変換のヤコビアン、 (ξ_t, η_t) ：座標の時間微分、 $(\tau_{b\xi}, \tau_{b\eta})$ ：底面せん断応力の反変成分、 $-\overline{u'^2}, -\overline{u'v'}, -\overline{v'^2}$ ： $x-y$ 座標系の水深平均レイノルズ応力の成分である。以上のうち、反変成分およびヤコビアンの定義は以下の通りである。

$$Q^\xi = \xi_x M + \xi_y N, \quad Q^\eta = \eta_x M + \eta_y N, \quad U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \quad (4)$$

$$\tau_{b\xi} = \xi_x \tau_{bx} + \xi_y \tau_{by}, \quad \tau_{b\eta} = \eta_x \tau_{bx} + \eta_y \tau_{by}, \quad J = 1/(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)$$

上式において、 x, y 方向の底面せん断応力 τ_{bx}, τ_{by} は、マニング則より次式で算出する。

$$\tau_{bx} = \frac{\rho g n^2}{h^{1/3}} u \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \tau_{by} = \frac{\rho g n^2}{h^{1/3}} v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (5)$$

ここに、 (u, v) ： x, y 方向の水深平均流速、 n ：マニングの粗度係数である。

また、 $x-y$ 座標系の水深平均レイノルズ応力の成分は、渦動粘性係数 D 、乱れエネルギー k を、摩擦速度 u_* の関数として次式で算出する。

$$-\overline{u'^2} = 2D\left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - \frac{2}{3}k, \quad -\overline{u'v'} = D\left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta}\right), \quad -\overline{v'^2} = 2D\left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) - \frac{2}{3}k \quad (6)$$

$$D = \alpha \nu u_* \quad (\alpha = 0.3), \quad k = 2.07 u_*^2 \quad (7)$$

2.2 河床変動計算の基礎式

(a) 流砂の連続式

ここでは、通常用いられている流砂の連続式を、次式に示すように移動一般座標系に変換したものを使用

する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{z_b}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_t}{J} z_b + \frac{1}{1-\lambda} \frac{q_{B\xi}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_t}{J} z_b + \frac{1}{1-\lambda} \frac{q_{B\eta}}{J} \right) = 0 \quad (8)$$

ここに、 λ ：河床材料の空隙率、 z_b ：河床高である。なお、流砂量の変換成分($q_{B\xi}, q_{B\eta}$)は、以下に示す手順に従って評価する。まず、流線とその直角方向すなわち(s, n)方向の流砂量(q_{Bs}, q_{Bn})から、直角座標系の流砂量(x, y)方向成分(q_{Bx}, q_{By})を求め、それを反変成分に変換して算出する。

$$q_{Bx} = q_{Bs} \cos \gamma - q_{Bn} \sin \gamma, \quad q_{By} = q_{Bs} \sin \gamma + q_{Bn} \cos \gamma, \quad q_{B\xi} = \xi_x q_{Bx} + \xi_y q_{By}, \quad q_{B\eta} = \eta_x q_{Bx} + \eta_y q_{By} \quad (9)$$

ここに、 γ ：流線と x 軸の角度である。

(b)流砂量式

(9)式における流砂量(q_{Bs}, q_{Bn})は、それぞれ次式で示される Brown 式、長谷川式で算出する。

$$\text{Brown 式: } q_{Bs} = 10 \left(\frac{u_*^2}{(\sigma/\rho - 1)gd} \right)^2 u_* d \quad (10), \quad \text{長谷川式: } q_{Bn} = q_{Bs} \left(\frac{u_{nb}}{u_{sb}} - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}} \frac{\partial z_b}{\partial n} \right) \quad (11)$$

ここに、 d ：河床材料の粒径、 ρ, σ ：水および河床材料の密度、(u_{sb}, u_{nb})：河床近傍の流速の(s, n)方向成分、 τ_{*c} ：無次元限界掃流力、 μ_s, μ_k ：河床材料の静止および動摩擦係数である。なお、 τ_{*c} は、岩垣式より算出する。

また、長谷川式における 2 次流による河床での流速 u_{nb} は、流線の曲率に比例する(12)式を用いて算出する。曲率半径 r は、流路曲率を用いるよりも流線の曲率を用いる方が、特に洗掘部において良好な結果を与える⁶⁾ ため、本計算においても流線曲率を用いて u_{nb} を算出することとする。

$$u_{nb} = -N_* \frac{h}{r} u_{sb} \quad (12)$$

ここに、 r ：流線の曲率半径、 N_* ：定数である。なお、 N_* は、芦田ら⁷⁾によれば、洗掘の進行とともに時間的に変化することが指摘されているが、ここでは一定値($N_* = 115$)を与えることとする。

2.3 数値解析法

数値解析法として、有限体積法を用いる。本研究では、河道変動を取り扱い得る基本的数値解析モデルの作成を目的としているため、移流項の離散化には、最も簡単かつ安定性の高い一次精度の上流差分を、また時間積分には、Adams-Bashforth 法を用いた。図-1 に変数の定義点を示す。

2.4 河岸崩落・堆積のモデル化

実際の現象における河岸の崩落・堆積は連続的に生じるのではなく、側岸の侵食がある程度進行した後、間欠的に生じる。長谷川⁴⁾は、崩落発生の限界幅 ΔB_c を考えることによって、(13)式の崩落条件が満たされるまで、崩落なしの条件で計算を進め、崩落条件が満たされたと同時に、 ΔB_c の幅幅が生じ、河岸が崩落・堆積するとした。

$$\int_{\eta_0}^{\eta} (\tan \beta_k (\eta - \eta_0 - \Delta B_c) + z_b(\eta)) d\eta = \frac{1}{2} \Delta B_c^2 \tan \beta_k + \Delta B_c h_f \quad (13)$$

ここに、 β_k ：水中安息角、 h_f ：側岸の水上部分の高さである。河岸崩落・堆積過程の概念図を図-2 に示す。

なお、崩落幅 ΔB_c については、藤田⁸⁾、大東ら¹⁾が、それぞれ実験あるいは現地観測により、崩落高に比例する形式で提案している。しかし、本研究で扱う河岸の崩落現象と土質条件が異なっているため、そのまま適用することは困難であると思われる。そこで、ここでは、簡単のため ΔB_c を一定値とし、後述の実験で観測された値が数 mm 程度であったことから、 $\Delta B_c = 4\text{mm}$ として計算を行った。

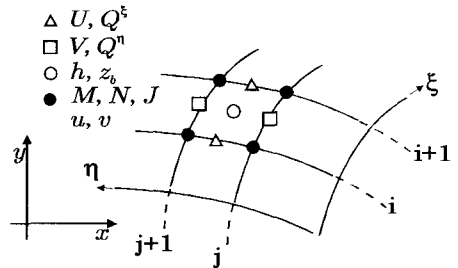


図-1 変数の定義点

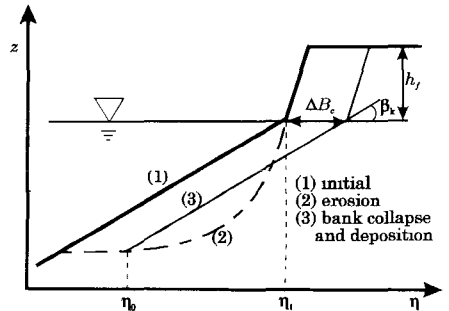


図-2 河岸の崩落・堆積過程の概念図

3 計算条件

対象とした流路は、表-1の諸元をもつ直線流路および sine-generated curve の蛇行流路である。横断形状はどちらも台形断面（ただし、直線流路については半幅）である。なお、これらの計算条件は、直線流路については池田⁹⁾による実験、蛇行流路は後述の実験と合わせている。

表-1 計算条件

	水路長	水路幅	振幅	河岸高	河床勾配	河岸勾配	n	λ	d_m	流量
直線流路	1500cm	23.5cm	—	7cm	1/466	30°	0.015	0.35	0.13cm	4130cm ³ /s
蛇行流路	200cm	30cm	34.8cm	4cm	1/100	27°	0.016	0.42	0.14cm	620cm ³ /s

境界条件は、上流端と下流端については、周期境界条件とする。水際については、水深の基準値 h_c を設定し、あるメッシュの水深 h が h_c ($=0.1\text{cm}$) 以下の場合には、そのメッシュの流速および流量フラックスの計算を行わないこととする。

4 結果および考察

(a) 直線流路

以上の手法を用いて、直線流路の河岸侵食による拡幅の計算を行った結果について述べる。図-3は、横断形状の時間変化を、池田⁹⁾の実験結果 (run17, $x=11\text{m}$) と比較したものである。計算結果の方が、横断方向にゆるやかな河床高分布形状となる傾向があるが、河岸の侵食速度等は良好に再現されており、直線流路については、本計算方法の妥当性を示していると言える。

(b) 蛇行流路

次に、蛇行流路について計算を行った結果について示す。なお、比較の対象とした実験は、長さ 10m、幅 1m の水路を用いて行い、上流端から下流端までに表-1に示した諸元をもつ sine-generated curve が 4 波長存在する。ここで示す実験結果は、上流から 2 波長目の測定結果である。

図-4、図-5は、河床高および流速分布の計算結果である。流速については、蛇行部の外岸から次の外岸へ向かう流れが再現されており、また、河床高も内岸側での堆積が生じているなど、蛇行流路の一般的な特性は表現されている。

図-6は、流路の平面形状および横断形状の時間変化を、実験結果と比較して示したものである。侵食速度は実験結果の方が大きい、時間の経過とともに、水衝部となる外岸での河岸侵食の進行が、再現されている。また、その平面形状は、実験結果が蛇行曲頂部下流部で侵食が著しいのに対し、計算結果は若干その傾向があるものの、それほど顕著ではない。蛇行曲頂部での横断形状については、外岸での深掘れが再現されていない等の問題があるものの、2時間後の河岸侵食量については、ほぼ実験結果と合致している。以上のうち、

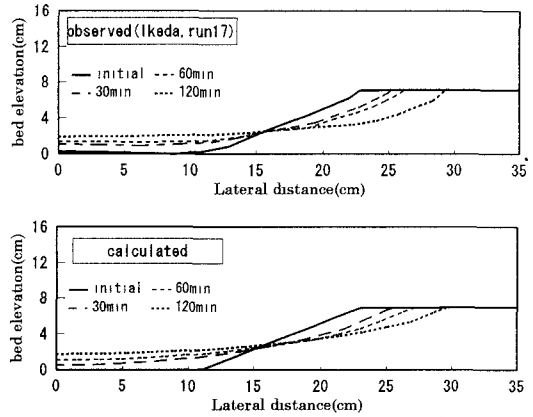


図-3 直線流路横断形状の時間変化

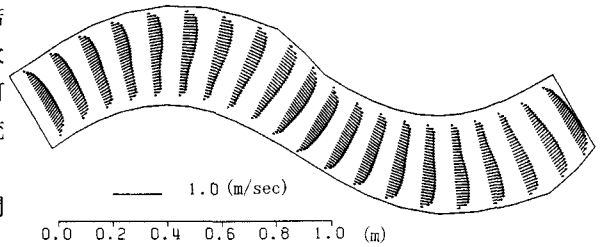


図-4 流速ベクトル分布図(計算結果・2時間後)

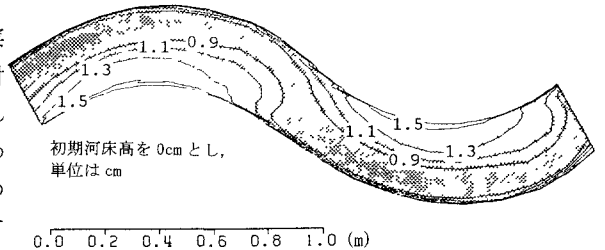


図-5 河床等高線図(計算結果・2時間後)

特に蛇行曲頂部下流部で侵食量が異なるのは，平面 2 次元の流れの基礎方程式において，2 次流の効果を考慮していないことが原因の一つであると考え，次章で移動一般座標系の基礎式に 2 次流の項の導入を図る。

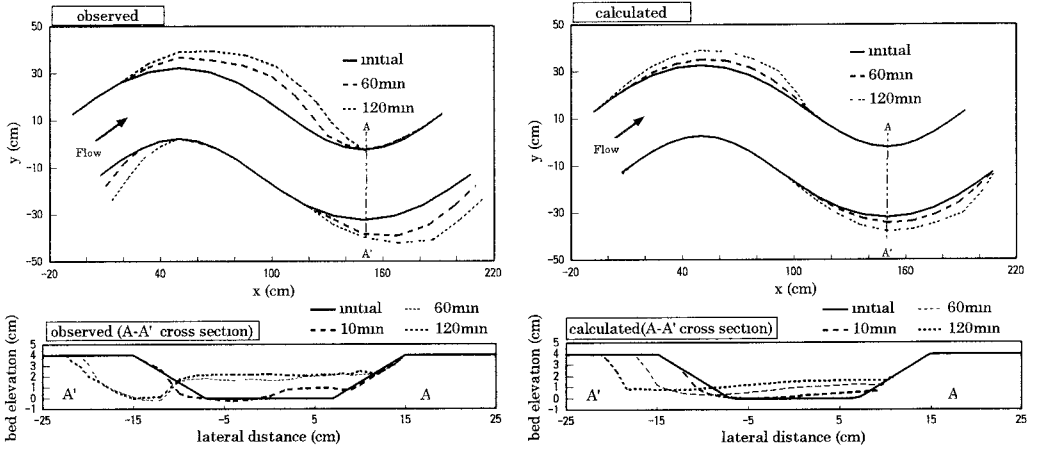


図-6 蛇行流路河岸侵食の計算結果と実験結果の比較

5. 流れの基礎式への 2 次流の導入

4. で述べた問題に対応するため，平面 2 次元流れの運動方程式に 2 次流の影響を取り入れることを考える。直交曲線座標系で表示された運動方程式に 2 次流の影響を取り入れる方法は，清水ら¹⁰⁾によって提示されているが，ここでは，前述の移動一般座標系で表示された平面 2 次元流れの基礎式，(2)式および(3)式に 2 次流の影響を取り入れる。まず，de Vriendら¹¹⁾と同様に，流線および流線と直角方向の流速(\tilde{u}_s, \tilde{u}_n)を，次式のように仮定する。

$$\tilde{u}_s = u_s f_s \left(\frac{z}{h} \right), \quad \tilde{u}_n = A_n f_n \left(\frac{z}{h} \right), \quad A_n = \frac{u_s h}{r} \quad (14)$$

ここに， u_s は， s 方向の平均流速， $f_s(z/h), f_n(z/h)$ は，それぞれ(s, n) 方向流速の水深方向の流速分布を表す関数である¹²⁾。 (s, n) 座標系で表示された運動方程式の移流項において現れる $\tilde{u}_s^2, \tilde{u}_s \tilde{u}_n$ に上式を代入し，河床から水面まで水深方向に積分すると，これらの項は平均流速を用いて次式のように表される。なお， \tilde{u}_n^2 に関しては微少項と考慮して無視する。

$$\overline{\tilde{u}_s^2} = u_s^2 \overline{f_s^2}, \quad \overline{\tilde{u}_s \tilde{u}_n} = A_n u_s \overline{f_s f_n} \quad (15)$$

上式において， $\overline{f_s^2}, \overline{f_s f_n}$ は，次式のように近似される¹¹⁾。

$$\overline{f_s^2} = 1, \quad \overline{f_s f_n} = k_{sn} = 5 \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} - 15.6 \left(\frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \right)^2 + 37.5 \left(\frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \right)^3 \quad (16)$$

ここに， κ : カルマン定数， C : シェジューの係数($C = h^{1/6}/n$)である。

一般座標系への変換に際しては，上式を取り入れた(s, n)座標系の平面 2 次元の基礎式を，直角座標系に変換したのち，一般座標系へ変換するという手順をとる。最終的に 2 次流を考慮した平面 2 次元移動一般座標系の運動方程式は，(2)式，(3)式の左辺にそれぞれ次式を付加したものとなる。

(2) 式左辺への付加項

$$\begin{aligned} & -k_{sn} \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} \left\{ \xi_x (u_s A_n h \sin 2\alpha) - \xi_y (u_s A_n h \cos 2\alpha) \right\} \right] - k_{sn} \xi_x \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} \left\{ \eta_x (u_s A_n h \sin 2\alpha) - \eta_y (u_s A_n h \cos 2\alpha) \right\} \right] \\ & + k_{sn} \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} \left\{ \xi_x (u_s A_n h \cos 2\alpha) + \xi_y (u_s A_n h \sin 2\alpha) \right\} \right] + k_{sn} \xi_y \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} \left\{ \eta_x (u_s A_n h \cos 2\alpha) + \eta_y (u_s A_n h \sin 2\alpha) \right\} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

(3) 式左辺への付加項

$$\begin{aligned} & -k_{sn} \eta_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} \left\{ \xi_x (u_s A_n h \sin 2\alpha) - \xi_y (u_s A_n h \cos 2\alpha) \right\} \right] - k_{sn} \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} \left\{ \eta_x (u_s A_n h \sin 2\alpha) - \eta_y (u_s A_n h \cos 2\alpha) \right\} \right] \\ & + k_{sn} \eta_y \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} \left\{ \xi_x (u_s A_n h \cos 2\alpha) + \xi_y (u_s A_n h \sin 2\alpha) \right\} \right] + k_{sn} \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} \left\{ \eta_x (u_s A_n h \cos 2\alpha) + \eta_y (u_s A_n h \sin 2\alpha) \right\} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

6. 2次流を考慮した計算結果と考察

図-7に、流速の横断分布について、2次流を考慮したケースと考慮していないケースの比較を行った結果を示す。上図が蛇行曲頂部、下図が曲頂部より1/10波長下流の断面であり、どちらの断面においても2次流を考慮したことにより、最大流速の位置が外岸にシフトしている。実験において流速の測定を行っていないため、どの程度改善されたか判断が難しいが、2次流を考慮した方が、蛇行曲頂部下流断面の凹岸での侵食量がやや大きくなっており、4.で述べた問題点を改善する方向となっている。しかし、その侵食量は実験結果と比較して過小評価となっていて、さらにモデルの改良が必要と思われる。

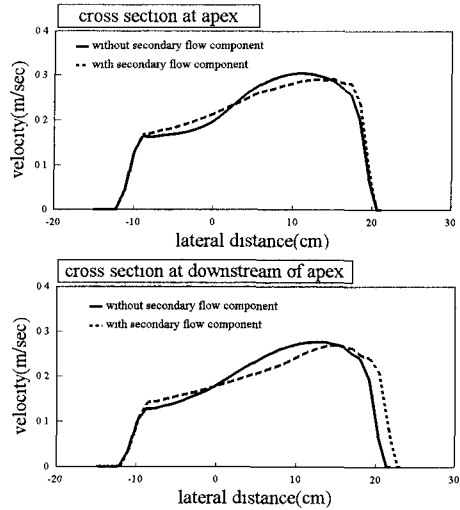


図-7 流速の横断分布の比較(2時間後)

7 おわりに

本研究では、河岸侵食を伴う流路変動を取り扱い得る、移動一般座標系を用いた平面2次元の数値解析モデルを提案した。解析結果と実験結果を比較することによって、直線流路についてはほぼ実現象を再現でき、蛇行流路についても定性的には再現が可能であることが示された。今後は、流速分布および流砂量分布の検証を踏まえて、河岸侵食量の定量的な把握を図りたい。

参考文献

- 1) 大東道郎・福岡捷二・横坂利雄・堀内輝亮：河岸崩壊に関する現地実験と解析，土木学会第49回年次学術講演会概要集第2部(A)，pp.492-493，1994.
- 2) 藤田裕一郎・八尋 裕・村本嘉雄：淀川水系宇治川の低水路における河岸侵食過程，水工学論文集，第37巻，pp.649-656，1993.
- 3) 青木章浩・江頭進治・大槻英樹・松田哲裕：湾曲部における河岸侵食機構に関する研究，土木学会第50回年次学術講演会概要集第2部(A)，pp.464-465，1995.
- 4) 長谷川和義：沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究，北海道大学学位論文，1983.
- 5) 長田信寿・細田 尚・村本嘉雄：移動一般座標による開水路非定常流の数値解析，土木学会第50回年次学術講演会概要集第2部(A)，pp.334-335，1995.
- 6) 西本直史・清水康行・青木敬三：流線の曲率を考慮した蛇行水路の河床変動計算，土木学会論文集，No.456/II-21，pp.11-20，1992.
- 7) 芦田和男・江頭進治・足立幸郎：蛇行水路における河床変動に関する研究，京都大学防災研究所年報，第31号，B-2，pp.443-459，1988.
- 8) 藤田裕一郎：沖積河川の流路変動に関する基礎的研究，京都大学学位論文，1980.
- 9) Ikeda, S: Self-Formed Straight Channels in Sandy Beds, Proc. ASCE, Vol07, HY, Part1, pp.389-406, 1981.
- 10) 清水康行・渡辺康玄・鳥谷部寿人：直線および蛇行河川の安定河床形状に関する研究，土木学会論文集，No.509/II-30，pp.67-78，1995.
- 11) Kalwijk, J. P. Th.・de Vriend, H. J. : Computation of the Flow in Shallow River Bends, J. Hydraulic Research 18 No. 4, pp.327-342, 1980.
- 12) de Vriend, H. J. : A Mathematical Model of Steady Flow in Curved Shallow Channels, J. Hydraulic Research 15 No. 1, pp.37-54, 1977.