

# 一次元デルタ前縁部形状の定常解

## Self-preserving longitudinal profile of one-dimensional delta

泉 典洋<sup>1</sup>・池田駿介<sup>2</sup>

By Norihiro IZUMI and Syunsuke IKEDA

Self-preserving profiles have been observed in experimentally produced one-dimensional deltas. We analytically derive such a self-preserving profile from the St. Venant shallow water equations and the continuity equation of sediment, giving profiles of concave form. The theory predicts that the increasing height of the delta front decelerates the migration of the front and reduces the gradient of the longitudinal profile. The experimental results support these results.

**Keywords:** delta, self-preserving profile, St Venant shallow water equations

### 1. はじめに

標高の高い山地領域で生産された土砂は、流水の働きによってより低い領域へと輸送されていく。この流水による土砂輸送は海水準面に達するまで止むことはない(中には乱泥流のように海水準面以下に輸送される現象も存在するが・・・)。土砂の侵食・輸送現象が流水によって生じるものである限り、海水準面は、地表における土砂輸送現象を支配する下流端境界条件となっているのである。海水準面付近での土砂輸送現象を特徴づけるのは堆積基準面としての海水準面の存在であり、そこでは非常に興味深い堆積現象を見ることができる。そしてその代表的な例が河口デルタである。

デルタに関する研究は、地質学、地形学の分野のみならず、河口閉塞や貯水池への堆砂の観点から工学の分野でも古くより研究されてきた。その数学モデルに関する研究は、矢野・芦田による貯水池堆砂の流下方向一次元解析<sup>1)</sup>に始まり、近年では田中らによる河口テラス形成の平面二次元数値モデル<sup>2)</sup>に至っている。河口デルタの幾何形状は二次元的な広がりを持っており、二次元モデルの必要性については論を待たないが、澤井ら<sup>3)</sup>及び松永ら<sup>4)</sup>によって行われた実験によれば、発達したデルタ前縁部の更なる成長を司るのは一次元的な流路の首振り現象であることが知られている。従って、より精度の高い二次元モデル構築のためには海水準面近傍での一次元土砂輸送現象の基本特性を明らかにすることが必要不可欠である。本研究は、そのような試みの一環として、実験で見られた、同一の形状を維持しながら流下方向へ前進していく、いわゆる定常なデルタ前縁部近傍の縦断形状を、浅水方程式と砂の連続式を用いて解析的に導くことを試みる。

---

<sup>1</sup> 正員 PhD 東京工業大学助手 土木工学科 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)

<sup>2</sup> 正員 工博 東京工業大学教授 土木工学科 (同上)

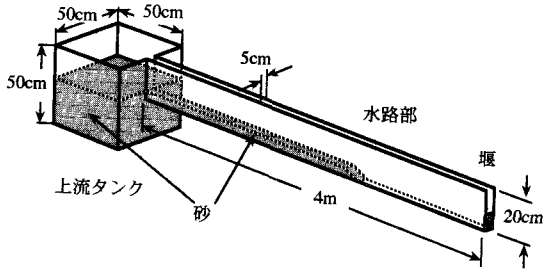


図-1 実験装置と初期河床形状

## 2. 定常な一次元デルタの縦断形状

図-1に示したような幅5cm長さ4m深さ20cmの亚克力製の水路を用いて一次元デルタの形成実験を行った。図-1のように河床を成形し水路全体をわずかに傾けて通水する。堰を越流する流れによって水路下流端付近にはほぼ水平な水面が形成されるが、これが海水準面に相当する。上流端にある50cm四方のタンクから一定量の水と砂を供給する。砂は平均粒径0.14mmの標準砂を用いた。通水後しばらく経って十分デルタが発達したことを確認してから数十分毎に河床形状及び水面形状を測定した。

実験で得られた河床縦断形状及び水面形状の時間変化を図-2に示す。時間とともにデルタ前縁部は下流方向に前進しているのがわかる。それぞれの時刻のデルタ前縁部が全て原点にくるように平行移動させて書き直したのが図-3である。図よりわかるように、デルタ前縁部及び水面の形状は時間とともに流下していくものの、その形状自体はほとんど変化していない。次節ではこの定常なデルタ前縁部近傍の縦断形状の解析解を求める。

## 3. 定常解の理論的導出

### 3.1 支配方程式

図-4に示したような定常なデルタ前縁部形状を考える。流下方向の運動方程式及び連続方程式として、次の浅水流方程式を採用する。

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} - C_f \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{h}}, \quad \frac{\partial \tilde{u} \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad (1, 2)$$

ここで $\tilde{x}$ は流下方向の座標であり、 $\tilde{u}$ は $\tilde{x}$ 方向の水深平均流速である。また $g$ は重力加速度、 $\tilde{h}$ は水深、 $\tilde{\eta}$ は河床の標高である。 $C_f$ は河床の抵抗係数であり、ここでは定数とみなす。本研究では掃流砂のみを考慮しているため、砂の連続式より河床形状の時間変化は次のように表せる。

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{1-\lambda_p} \frac{\partial \tilde{q}_s}{\partial \tilde{x}} \quad (3)$$

ここで $\tilde{t}$ は時間、 $\lambda_p$ は空隙率、 $\tilde{q}_s$ は掃流砂量である。掃流砂量は次のMeyer-Peter & Müller公式を用いる。

$$\tilde{q}_s = 8(\tau^* - \tau_{*c}^*)^{3/2} (R_s g D_s)^{1/2} D_s \quad (4)$$

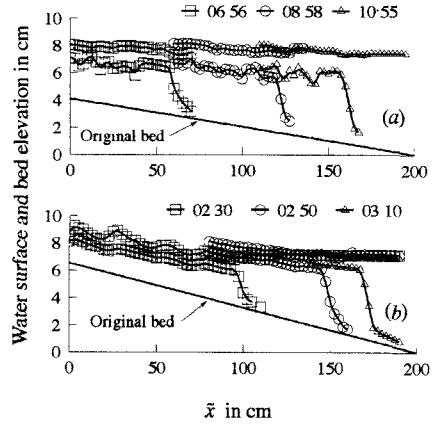


図-2 デルタ前縁部形状及び水面形状の経時変化；(a) 流量0.190 l/s, 元河床勾配 0.02, (b) 流量0.124 l/s, 元河床勾配 0.03 (凡例の数字は計測した時刻を示している)

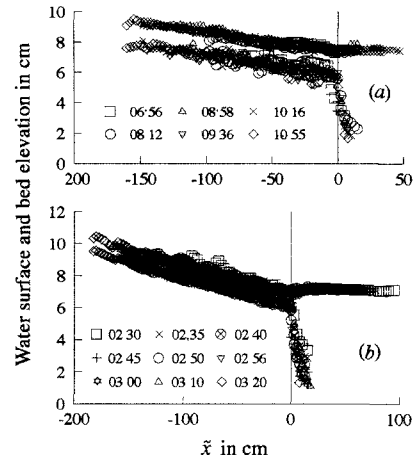


図-3 定常なデルタ前縁部形状及び水面形状(デルタフロントの位置を原点にとって描かれている)

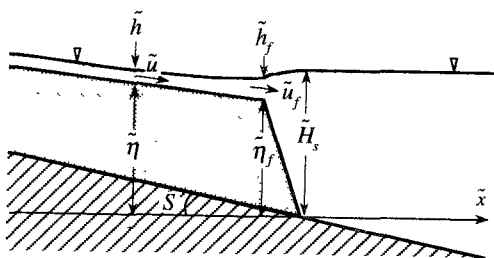


図-4 デルタ前縁部近傍の概念図と変数の定義

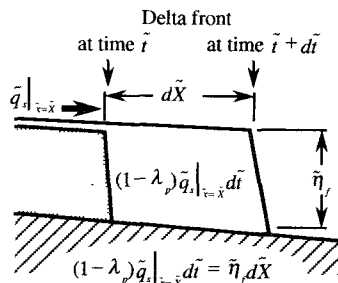


図-5 デルタフロントの前進機構の概念図

ここで  $\tau^*$  はシールズストレスであり、 $\tau^* / (\rho R_s g D_s)$  である。また  $\tau^*$  は底面剪断力、 $\tau_{th}^*$  は限界シールズストレス、 $R_s$  は砂粒子の水中比重、 $D_s$  は砂粒子の粒径である。掃流が活発に行われている本実験の範囲内では底面剪断力は十分大きくシールズストレスは限界シールズストレスより十分大きい。従って簡便な次の式で十分近似できる。

$$\tilde{q}_s = Q_s \tilde{u}^3; \quad Q_s = 8C_f^{3/2} (R_s g D_s)^{-1} D_s \quad (5a, b)$$

### 3.2 無次元化

次のような無次元化を導入する。

$$\tilde{u} = \tilde{u}_c u, \quad (\tilde{h}, \tilde{\eta}) = \tilde{h}_c (h, \eta), \quad \tilde{x} = \frac{\tilde{h}_c}{C_f} x, \quad \tilde{t} = \frac{(1 - \lambda_p) \tilde{q}^{1/3}}{Q_s C_f g^{5/3}} t \quad (6a, b, c, d)$$

ここで  $\tilde{u}_c$ 、 $\tilde{h}_c$  はそれぞれ与えられた流量  $\tilde{q}$  に対してフルード数 1 の限界状態が実現する限界流速及び限界水深であり、流量  $\tilde{q}$  を用いて次のように表せる。

$$\tilde{u}_c = \tilde{q}^{1/3} g^{1/3}, \quad \tilde{h}_c = \tilde{q}^{2/3} g^{-1/3} \quad (7a, b)$$

式(6)を(1)～(3)に代入すると無次元支配方程式として次の方程式が得られる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{u^2}{h}, \quad \frac{\partial u h}{\partial x} = 0, \quad (8, 9)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial u^3}{\partial x} \quad (10)$$

### 3.3 移動座標系の導入

実験で見られた定常解を求めるために、デルタフロントとともに前進する次の移動座標系を導入する。

$$t' = t, \quad x' = x - X(t) \quad (11, 12)$$

ここで  $X(t)$  はデルタフロントの位置の  $x$  座標である。この時、次の微分関係が成立し、

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{dX}{dt} \frac{\partial}{\partial x'}, \quad (13a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad (13b)$$

簡単のためにプライムを省略すると、支配方程式は次の様に書き換えられる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{u^2}{h}, \quad \frac{\partial u h}{\partial x} = 0, \quad (14, 15)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{dX}{dt} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial u^3}{\partial x} \quad (16)$$

### 3.4 デルタフロントの前進速度

掃流砂の堆積によるデルタフロント前進の最も簡単なモデルとして矢野・芦田の研究<sup>9)</sup>に倣い図-5のようなプロセスを考える。デルタ上を掃流されてきた砂はデルタフロントを越えるとデルタ前縁斜面上に堆積する。従ってデルタ前縁斜面は水中安息角を維持しながら、デルタフロントを通過して運搬された砂の堆積分

だけ下流方向に移動することになる。このとき次の関係がある。

$$\frac{d\tilde{X}}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{q}_s|_{\tilde{x}=\tilde{X}}}{(1-\lambda_p)\tilde{\eta}_f} = \frac{Q_s\tilde{u}_f^3}{(1-\lambda_p)\tilde{\eta}_f} \quad (17)$$

ここで $\tilde{X}$ はデルタフロントの $\tilde{x}$ 座標、添字 $f$ はそこでの諸量を表している。無次元表示は次のようになる。

$$\frac{dX}{dt} = \frac{u_f^3}{\eta_f} \quad (18)$$

図-4に示した様に、デルタ前縁部直下流では急激な水面の上昇が生じている。この時、比力の保存から次の関係が導かれる。

$$\frac{1}{h_f} - \frac{1}{H_s} = \frac{1}{2} \left[ H_s^2 - (h_f + \eta_f)^2 \right] \quad (19)$$

上式は $h_f$ と $\eta_f$ の関係を与えるものであり、連続の式から導かれる $u_f h_f = 1$ の関係と組み合わせると $u_f, h_f, \eta_f$ の三つのパラメータの間の関係が得られる。

とくにデルタフロント直下流の水深 $H_s$ とデルタフロントの高さ $\eta_f$ がデルタフロント上での水深 $h_f$ より十分大きいときには上式の左辺は右辺に比べて無視しう程小さくなり、簡単化されて次のようになる。

$$H_s = h_f + \eta_f \quad (20)$$

これは、デルタフロント上とその直下流との間の水面の連続性を示す関係に他ならない。通常十分発達したデルタの場合、デルタフロントの高さはデルタフロント上の水深に比べ十分に大きく、(20)はよい近似となっている。このときデルタフロントの前進速度は

$$\frac{dX}{dt} = \frac{h_f^3}{H_s - h_f} \quad (21)$$

と表せる。以下の解析ではこの近似を用いている。

実験の結果によればフロントの前進によって $h_f$ はほとんど変化しないが、元河床が勾配を有する場合には $H_s$ は明らかに変化する。このときフロントの前進速度は時間とともに変化する。厳密には定常解は存在しない。ここでは元河床勾配 $S$ が十分小さく $H_s$ が十分大きいとき準定常解が存在し得ることを示す。一様勾配 $S$ を有する元河床の場合、 $H_s$ は次のように書き表される。

$$H_s = H_{sr} + S_c X(t) \quad (22)$$

ここで $H_{sr}$ は基準点での $H_s$ 、 $S_c$ は $S/C_f$ である。通常元河床の勾配 $S$ は非常に小さく、河床の抵抗係数 $C_f$ ( $\approx 0.01$ )とせいぜい同じオーダーである。従って $S_c$ は1のオーダーである。一方 $H_{sr}$ は十分に大きい値となる。そのとき $dX/dt$ は次のように展開できる。

$$\frac{dX}{dt} = \frac{u_f^3}{\eta_f} = \frac{u_f^3}{\eta_{fr} + S_c X(t)} = \frac{u_f^3}{\eta_{fr}} \left[ 1 - \eta_{fr}^{-1} S_c X(t) + O(\eta_{fr}^{-2}) \right] \quad (23)$$

ここで $\eta_{fr} = H_{sr} - h_f$ であり $h_f$ が1のオーダーであるとき $\eta_{fr}$ も十分大きい値となる。上式は $X(t)$ の変化が1程度の範囲内では $dX/dt$ の時間変化は $\eta_{fr}^{-1}$ のオーダーであり、第一近似として時間的に変化しないとみなしてよいことを意味している。以下では $H_s$ の時間変化は無視するが、 $H_s$ 自体の値は各時刻の値を用いるいわゆる準定常の取り扱いをする。

### 3.5 定常解

定常な解では(16)の左辺第1項の時間微分項がゼロとなり、容易に積分できて次のようになる。

$$\eta = \frac{\eta_f}{3} u^3 \quad (24)$$

ここでは境界条件として次の関係が用いられている。

$$u = u_f = h_f^{-1}, \quad h = h_f, \quad \eta = \eta_f = H_s - h_f \quad \text{at } x = 0 \quad (25)$$

式(24)、(15)を用いて(14)を整理すると次の微分方程式が得られる。

$$\frac{du}{dx} = - \frac{u^3}{u - u^{-2} + 3h_f^3(H_s - h_f)u^2} \quad (26)$$

再び(25)を用いて上式を積分すると次の解が得られる。

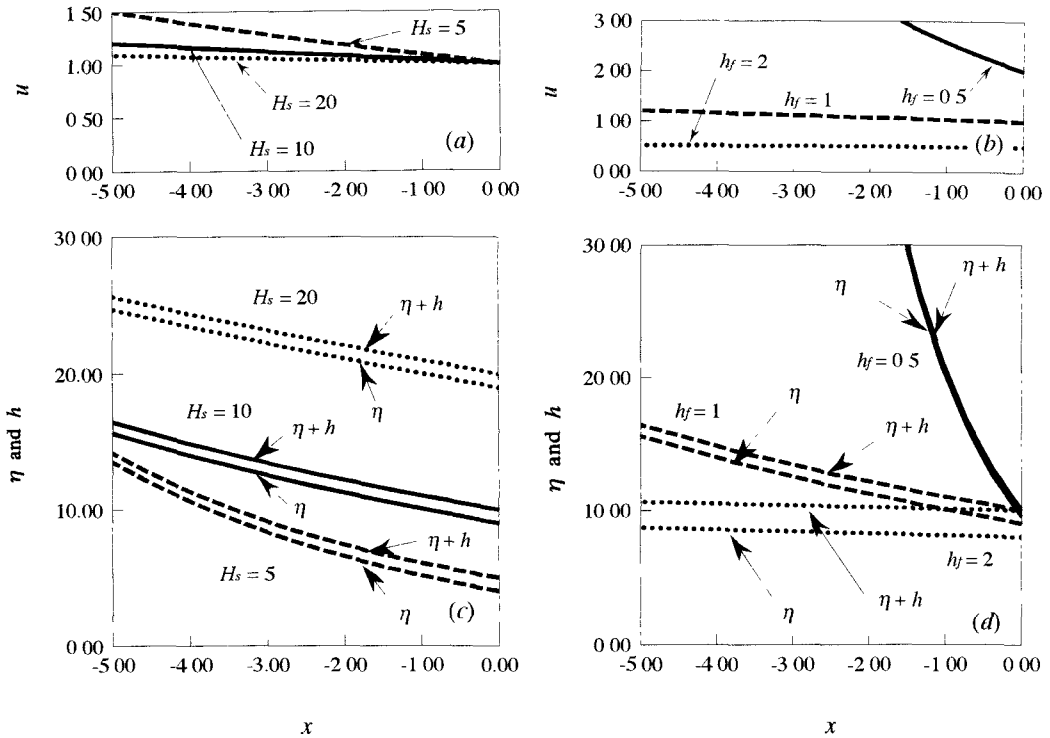


図-6 式(27),(24)から導かれる $u, \eta, h$ の形状 ; (a)(c)  $h_f = 1$ , (b)(d)  $H_s = 10$

$$-u^{-1} + \frac{u^{-4}}{4} + 3h_f^3(H_s - h_f)\ln u = -x - h_f + \frac{h_f^4}{4} - 3h_f^3(H_s - h_f)\ln h_f \quad (27)$$

解(27)には二つのパラメータ  $H_s$  と  $h_f$  が含まれている。そこでこれら  $H_s$  と  $h_f$  の値をパラメータとして  $u, \eta$  及び  $h$  の分布形状を求めたのが図-6である。いずれの場合も  $u$  と  $\eta$  は上流に行くほど勾配が急になる下に凸の曲線となることがわかる。(a)と(c)は  $h_f = 1$  の時の  $H_s$  の違いによる形状の変化を表している。また(b)と(d)は  $H_s = 10$  の時の  $h_f$  の違いによる形状の変化を示している。これらの図によるとデルタフロントの高さ  $H_s$  が小さいほど、そしてデルタフロント上の水深  $h_f$  が小さいほど、 $u$  及び  $\eta$  の形状は勾配が急になることがわかる。 $H_s$  及び  $h_f$  が小さいことはデルタフロントの前進速度が大きいことを意味している。すなわちこのことから定常形状を維持しながら急速に発達する前縁部の形状は大きな勾配を有していることが推測される。

#### 4. 実験結果との比較及び考察

図-7に実験結果と解析解の比較を示す。デルタフロント上の水深  $h_f$  としては実測値を用いた。それらの値は(a)で  $h_f = 1.2$ , (b)で  $h_f = 1.0$  である。また(a), (b)ともにデューンが発生したため、底面の抵抗係数  $C_f$  はそれぞれ0.010と0.012を用いた。デューン存在下での抵抗係数としては妥当な値であると思われる。図によればどちらも良好な一致を示しているのがわかる。実験では元河床の勾配がゼロでないためデルタフロントの前進に伴って  $H_s$  も徐々に大きくなっていく。前節で述べたようにこの  $H_s$  の時間変化を無視し、 $H_s$  は単なるパラメータであるとみなしてそれぞれの時刻での  $H_s$  に対応する理論解を求めてある。時間が経過し  $H_s$  が大きくなっていくにつれてデルタフロントの前進速度は減少し、定常縦断形状は全体的により緩やかな勾配となる。特に(b)では、2:30での実験値(□)を見ると水深が深くなった他の時刻の河床形状と比べて上流に向

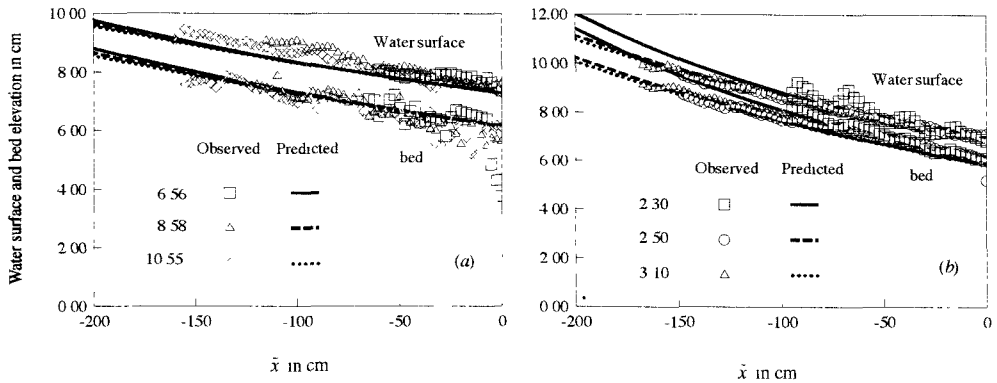


図-7 実験結果と解析解の比較；(a) 流量 0.190 l/s, (b) 流量 0.124 l/s

かって顕著に急になっている様子がわかるが、理論値(一)もその傾向を示している。

本研究では  $H_s$  と  $h_f$  の両方をパラメータとして扱った。  $H_s$  は実際海水準面の位置や河床、海岸底面の状況によって与えられるパラメータであるが、  $h_f$  の値は上流側の条件によって自ずから決定されと考えられる。但し、ここで注意しなければならないのは実験で与えられた上流側の条件は給砂量一定という条件であり、これは定常解の存在条件とはなっていないということである。デルタフロントとともに前進する移動座標系から元の座標系に戻って考えてみると、定常解が存在するためには上流側のある点で上昇率が時間とともに増加するような河床上昇が起きなければならない。また給砂量も時間とともに増加させることが必要となる。このような条件を満たしていないにもかかわらずデルタ前縁部近傍で定常解が実現する理由については現在までのところ不明である。或いは  $h_f$  は下流端のみの条件によって決定され、上流域の条件に関わらず定常解が実現している可能性も考えられる。これらの問題はデルタの成長、発達だけでなく、さらに大規模なスケールの河道の縦断形状の変動に関わる問題となる。今後の課題である。

## 5. 結論

掃流砂のみを考慮した一次元デルタの定常縦断形状に関する本研究の成果は次の通りである。

- 1) 上流域での砂の供給が十分であるとき、形状を変化させることなく前縁部の前進速度で下流方向に移動する定常解が存在することが実験によって明らかとなった。
- 2) 定常解を浅水流方程式及び流れと流砂の連続式を用いた理論から解析的に導くことに成功した。理論によれば定常な縦断面形状は上流に向かって緩やかに勾配が上昇する下に凸な曲線となることがわかった。また、形状を決定するパラメータはデルタフロント直下流の無次元水深  $H_s$  とデルタフロント上での水深  $h_f$  であり、これらの値が小さいと前進速度は大きくなり定常縦断形状は全体的に急勾配となる。
- 3) 解析解を実験値と比較すると良好な一致が見られた。

## 参考文献

- 1) 矢野勝正・芦田和男・定道成美：ダム背砂に関する研究(1)，京都大学防災研究所年報，第6号，1963。
- 2) 田中仁・秦恵敏：出水時における河口全面でのテラス形成過程の計算，海岸工学論文集，第40巻，pp. 476-479，1993。
- 3) 澤井健二・芦田和男・謝正倫：河口部における河川流出土砂による三角洲の発達機構に関する研究，第32回水理講演会論文集，pp. 221-226，1988。
- 4) 松永考司・泉典洋・池田駿介：掃流砂による河口デルタの形成実験，第50回年講概要集，pp. 480-481，1995。