

低レイノルズ数 $k-\epsilon$ モデルの管内振動流への 適用性に関する研究

The performance of low Reynolds number $k-\epsilon$ model
to analyze an oscillatory boundary layer

アーマド・サナ*・田中 仁**

By Ahmad SANA and Hitoshi TANAKA

Six different versions of low Reynolds number type $k-\epsilon$ model including the original one by Jones and Launder are utilized to predict the velocity, turbulent kinetic energy and wall shear stress in case of an oscillatory boundary layer. A quantitative comparison is made to distinguish the most efficient model by virtue of the accuracy in prediction. The comparison with the experimental data shows that the versions having correct behavior near the wall may predict the flow parameter very well.

Key Words: turbulence model, low Reynolds number $k-\epsilon$ model, oscillatory boundary layer

1. はじめに

波動境界層における乱流現象に関しては、海浜での底質の移動現象などに関連して多くの研究が行われてきた。著者らは先に低レイノルズ数 $k-\epsilon$ モデルを波動境界層に適用し、速度分布、摩擦係数、乱流遷移の予測精度を検討した¹⁾。その際に用いられたモデルは Jones and Launderによるoriginal model²⁾、Hoffman³⁾及びChienのモデル⁴⁾の3つであった。低レイノルズ数 $k-\epsilon$ モデルに関しては、その後も改良モデルが発表されており、定常流を対象としてそれらの比較検討もなされている(例えば, Patel et al.⁵⁾)。しかし、これら新たに改良された $k-\epsilon$ モデルを振動流境界層に適用し、総合的な比較検討を行った例は見当たらない。そこで、本研究では近年に提案された5種類の改良形の $k-\epsilon$ モデルとJones and Launderのモデルについて相互比較を行った。なお、最近、波動境界層を対象としてDNS(Spalart and Baldwin⁶⁾)やレイノルズ応力モデルによる計算(Hanjalic et al.⁷⁾)も試みられてはいるが、計算量と解の精度との兼ね合いを考慮すれば、振動流境界層においても $k-\epsilon$ モデルの実用性は十分に高いものと考えられる。

* 正会員 M.Eng. 東北大学助手 工学部土木工学科 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

** 正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

2. 乱流モデル

今回採用したモデルは、Jones and Launder²⁾ (以下JLと略す.)、さらにそれ以降の代表的なものとして、Lam and Bremhorst⁸⁾ (同LB), Myong and Kasagi⁹⁾ (同MK), Nagano and Tagawa¹⁰⁾ (同NT), So, Zhang and Speziale¹¹⁾ (同SZS), Speziale Abid and Anderson¹²⁾ (同SAA) である。計算対象は管内振動流であるので移流項は無視することが出来、無次元化された基礎式は以下のとおりである。

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{\partial U^*}{\partial t} + S \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ \left(\frac{S}{RE} + v_T^* \right) \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial k^*}{\partial t^*} = S \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ \left(\frac{S}{RE} + \frac{v_T^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial z^*} \right\} + S v_T^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 - S \epsilon^* - D \quad (2)$$

$$\frac{\partial \epsilon^*}{\partial t^*} = S \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ \left(\frac{S}{RE} + \frac{v_T^*}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon^*}{\partial z^*} \right\} + S C_1 f_1 v_T^* \frac{\epsilon^*}{k^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 - S C_2 f_2 \frac{\epsilon^*}{k^*} - E \quad (3)$$

ここで、* 付きの変数は次式で定義される無次元量である。

$$u^* = u/U_0, t^* = t\sigma, U^* = U/U_0, k^* = k/U_0^2, \epsilon^* = \epsilon z_h/U_0^3, z^* = z/z_h, v_T^* = C_\mu f_\mu k^*{}^2/\epsilon^* \quad (4)$$

上記の式中で、 u :水平流速、 U :境界層外縁流速、 U_0 : U の振幅、 t :時間、 k :乱れエネルギー、 ϵ :散逸率、 z :鉛直座標、 z_h :平行平板間距離の1/2、 σ :角振動数、 $RE = U_0^2/(\sigma \nu)$ 、 $S = \sigma z_h/U_0$ 、 ν :流体の動粘性係数である。式中の定数やモデル関数は提案者によって異なり、表-1に示すとおりである。図中にはモデル関数の漸近挙動についても示した。このうち、JLモデルはそれ以前のモデルで扱うことの出来なかった壁面近傍の計算を行うために提案された最初のものであるが、モデル関数は漸近挙動を満たしておらず、このため一般に壁面近傍での k の予測精度は十分ではない。LBモデルではモデル関数の改良により k についてより良い予測値を得たが、漸近挙動の問題は残されたままであった。また、モデル関数と ϵ に対する境界条件の形から、解の収束速度に難がある。MK、NTは漸近挙動を満たすモデルを提案している。SZSモデルでは ϵ 方程式中の散逸項の改良がなされ、 ϵ の計算精度が向上した。SAAモデルは k の代わりに乱れの時間スケール τ を用いた k - τ モデルとして提案されたが、本研究ではこれに等価な k - ϵ モデルを使用した。ただし、表-1に見られるように同モデルはMKにきわめて類似している。

表-1 各モデル中の定数とモデル関数

	C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ϵ	f_μ	f_1	f_2
JL	0.09	1.55	2.0	1.0	1.3	$\exp(-2.5/(1+R_T/50))$	1.0	$1 - 0.3 \exp(-R_T^2)$
LB	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$(1 - \exp(-0.0165 R_k))^2 (1 + 20.5/R_T)$	$1 + (0.05/f_\mu)^3$	$1 - \exp(-R_T^2)$
MK	0.09	1.4	1.8	1.4	1.3	$(1 + 3.45/\sqrt{R_T})(1 - \exp(-z^+/70))$	1.0	$(1 - 2/9 \exp(R_T^2/36)(1 - \exp(-z^+/5)))^2$
NT	0.09	1.45	1.9	1.4	1.3	$(1 + 4.1/(R_T)^{0.75})(1 - \exp(-z^+/26))^2$	1.0	$(1 - 0.3 \exp((R_T/6.5)^2))(1 - \exp(-z^+/6))^2$
SZS	0.096	1.5	1.83	0.75	1.45	$(1 + 3.45/\sqrt{R_T}) \tanh(z^+/115)$	1.0	$1 + 2 f_{w,2}/C_2 - 1.5(f_{w,2}/C_2)(\epsilon^*/(\epsilon^* \epsilon^*))$
SAA	0.09	1.44	1.83	1.36	1.36	$(1 + 3.45/\sqrt{R_T}) \tanh(z^+/70)$	1.0	$(1 - 2/9 \exp(R_T^2/36))(1 - \exp(-z^+/4.9))^2$

	D	E	ϵ_w^*	$f_\mu \sim z^{-1}$	$f_2 \sim z^2$
JL	$2S^2/RE(\partial\sqrt{k^*}/\partial z^*)^2$	$2S^2/RE\nu_T^*(\partial^2 u/\partial z^{*2})^2$	0.0	x	x
LB	0.0	0.0	$S/RE(\partial^2 k^*/\partial z^{*2})$	x	x
MK	0.0	0.0	$S/RE(\partial^2 k^*/\partial z^{*2})$	o	o
NT	0.0	0.0	$S/RE(\partial^2 k^*/\partial z^{*2})$	o	o
SZS	0.0	Π	$2S/RE(\partial\sqrt{k^*}/\partial z^*)^2$	o	o
SAA	0.0	0.0	$S/RE(\partial^2 k^*/\partial z^{*2})$	o	o

$$R_T = \frac{k^{*2}}{\epsilon^*} \frac{RE}{S} \quad R_k = \sqrt{k^*} z^* \frac{RE}{S} \quad z^+ = z^* u_f^* \frac{RE}{S} \quad f_{w,2} = \exp(-(R_T/64)^2) \quad \epsilon'^* = \epsilon^* - 2 \frac{S}{RE} \frac{k^*}{z^{*2}}$$

$$\tilde{\epsilon}^* = \epsilon^* - 2 \frac{S}{RE} \left(\frac{\partial\sqrt{k^*}}{\partial z^*} \right)^2 \quad \Pi = S f_{w,2} (-2\epsilon^* \tilde{\epsilon}^*/k^* + (C_2 \epsilon^* \tilde{\epsilon}^* - 0.5) \epsilon'^*/k^*)$$

3. 検証データと計算法

検証に用いるデータはJensen^{1,3)}による Test 8 である。Jensen の実験はU字管振動流装置により行われた。Test 8 の実験条件は、周期 $T=9.72$ 秒、 $U_0=1.02$ m/sec、 $RE=1.6 \times 10^6$ である。Jensen はレーザー流速計により平均流速及び乱れの計測を行い、さらにホットフィルム平面センサーにより壁面せん断応力の直接測定も行っている。ただし、乱れ成分については2成分のみの測定を行っているので、次式によりトータルの乱れエネルギー k に変換した^{1,4)}。

$$k = \frac{1.3}{2}(u'^2 + w'^2) \tag{5}$$

計算はクランク・ニコルソンの陰形式差分法を用いて行い、壁面近くでは格子サイズを減じて計算精度を向上させた。全空間格子数は100であり、一周期を6000分割して計算を行った。適当な初期条件から計算を始め、定常解が得られるまで計算を繰り返した。その他、数値計算の詳細は前報¹⁾と同様である。なお、実測流速の位相変化を調べたところ、境界層外縁で正弦波からのずれが見られた。そこで、本研究では正弦的な圧力勾配を入力する代わりに、実測の境界層外縁流速から加速度を求め、これを圧力勾配として与えた。

4. 計算結果

4.1 速度分布

平均速度分布の半周期内の変化を図-1に示した。図中には計算で得られる摩擦速度から評価された粘性底層厚さ δ_v も示した。いずれのモデルも実験値との対応は全般的に良好である。特に、最大流速時に $z=20$ mm $\sim$ 30mmに見られる速度のover-shootや底面近傍での速度の先走り現象についても良い一致を示している。粘性底層内では対数則から直線型の速度分布に移行する様子が見られる。

モデルによる計算精度のより定量的な評価のために、次式で表される指標 Δu を計算した。

$$\Delta u = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|u_c(i) - u_m(i)|}{U_0} \tag{6}$$

ここで、 N ：空間格子の分割数、 u ：速度であり、添字 c, m はそれぞれ計算値及び実験値を表し、 i は空間格子点のインデックスである。図-2は式(2)の指標について半周期内の変化を示したものである。これによれば、MKモデルによる計算値は他に比べて誤差が少ないことが判る。

4.2 乱れ強度

図-3は乱れ強度について実験値と計算値の比較を行ったものである。加速期初期や減速期末期については良い一致を示すが、最大流速が現れる 90° を挟む位相付近で差が大きい。ここで、先の式(2)と同様に乱れについても誤差 Δk を定義し、その一周期内的変化を図-4に示した。ただし、右辺分母を U_0 の代わりに U_0^2 として無次元化している。図-3においていずれもモデルもはば過大評価になっており、そのなか

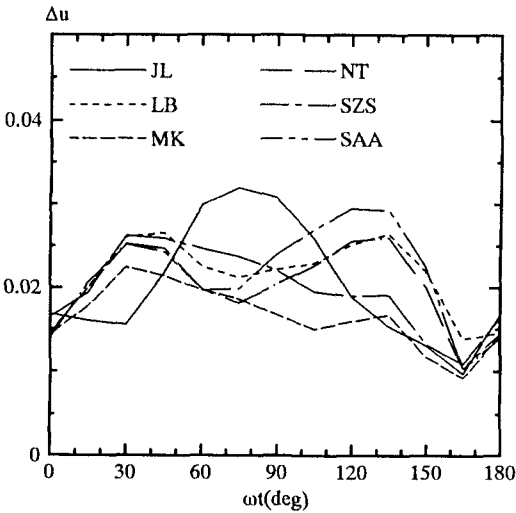


図-2 速度誤差の一周期内的変化

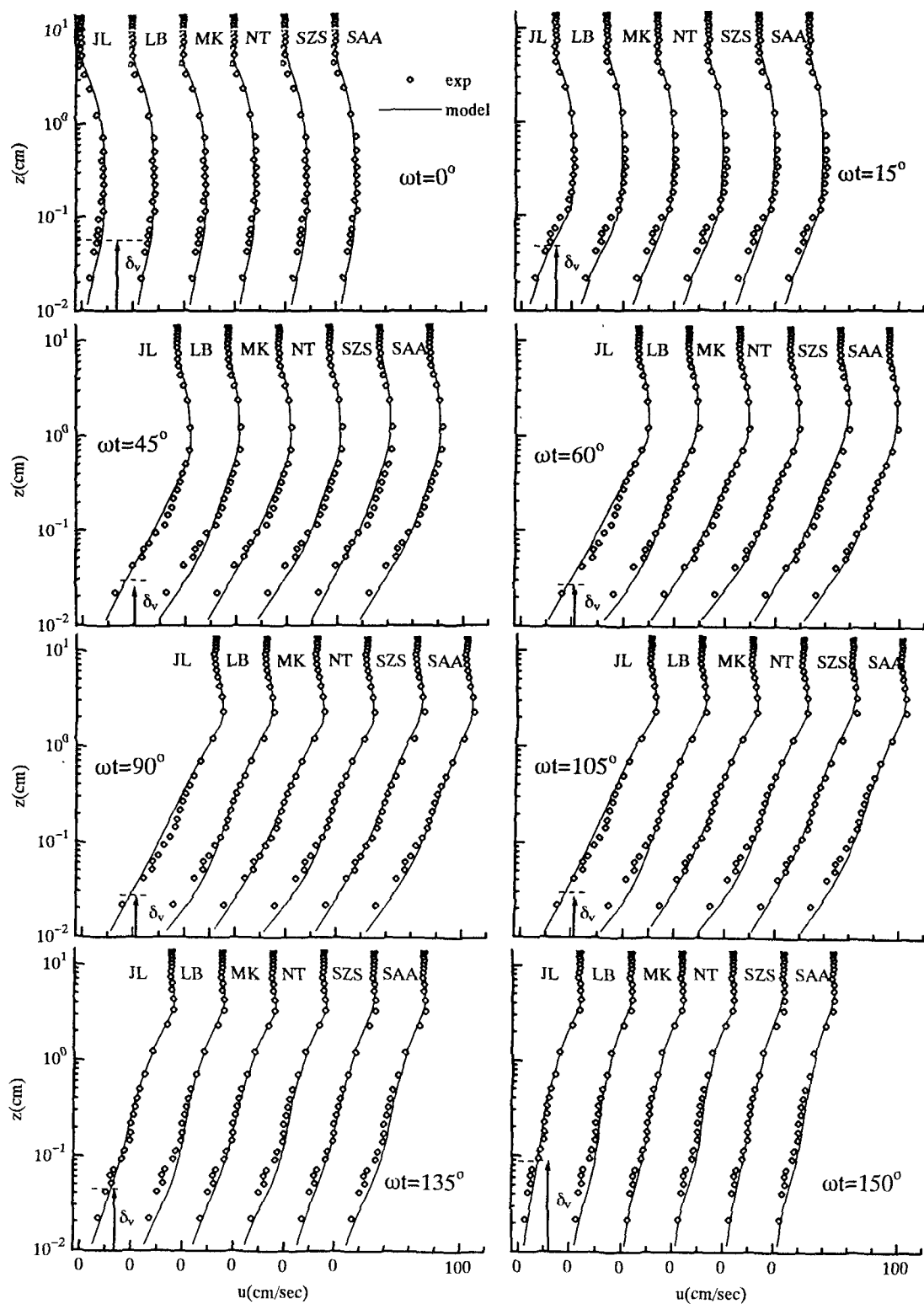


图-1 速度分布

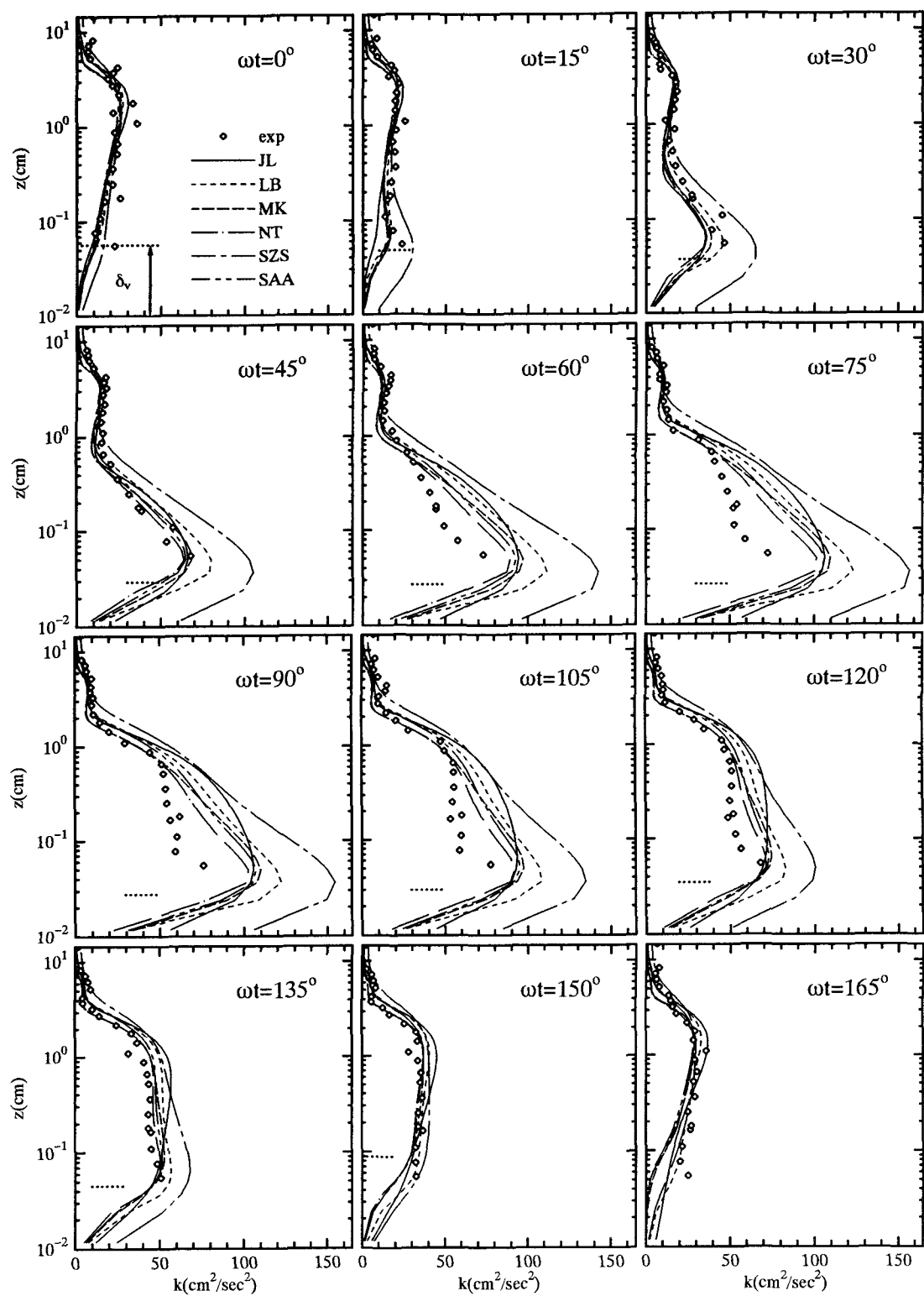


図-3 乱れ強度

でNTモデルがもっとも小さい値を与える．そのために図－4では同モデルによる誤差が一番小さい．

4.3 せん断応力

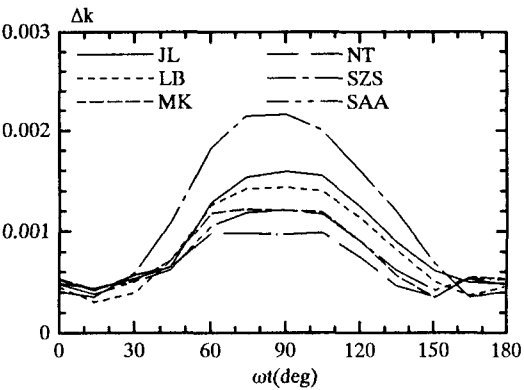
半周期間の摩擦速度の変化を図－5に示した．図には運動量方程式の数値積分により得られる摩擦速度も図示した．時間軸の原点は境界層外縁流速がゼロになる時刻である．従って，実験値には流速に対する位相の進みが顕著に現れている．いずれのモデルもこの特徴を良好に再現している．ホットフィルムセンサーによる実験値と計算値との差の絶対値について一周期平均を求めた結果を表－1に示した．これによれば，MKモデル及びSAAモデルによる誤差が最小となっていることが判る．

表－1 摩擦速度の一周期平均誤差

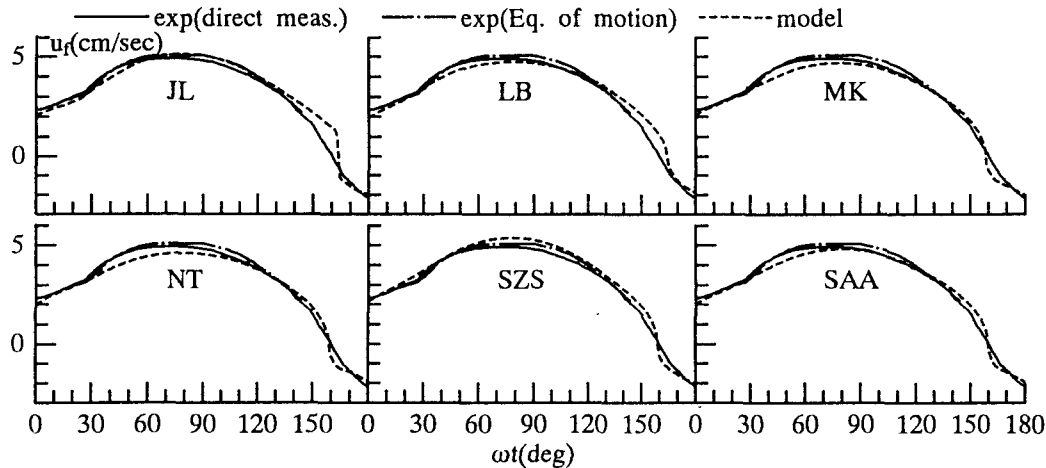
Model	JL	LB	MK	NT	SZS	SAA
平均誤差 (cm/scc)	0.374	0.322	0.247	0.277	0.291	0.229

5. おわりに

本研究では，Jones and Launder による低レイノルズ数モデルとそれ以降に提案されたモデル，合計6つを管内振動流境界層に適用して，その精度を比較検討した．その結果，速度についてはMKモデル，乱れ強度についてはNTモデルの精度が最良であった．せん断応力の経時変化についてはMKモデル及びSAAモデルが良好な予測値を与える．ただし，乱れ強度については実験値の評価式に不確実性が残されている点に留意しなければならない．全般的に，壁面での漸近挙動が合理的なモデルの予測値が良好であった．今後，他の実験データや他の乱流特性につ



図－4 乱れ強度誤差の一周期内的変化



図－5 せん断応力

いても詳細な検討を行う必要がある。その際、精度の高いデータベースの整備が肝要であり、LDVによる乱流計測データやDNSによるシミュレーションデータの蓄積も望まれる。これにより、エネルギー収支等の比較を通じて乱流構造のより精密な検討が可能になる。

謝辞：本論文の公表に際して小川基金の補助を受けた。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 田中 仁・アーマド・サナ: 低レイノルズ数 $k-\varepsilon$ モデルによる波動境界層の計算, 水工学論文集, 第38巻, pp.481-486, 1994.
- 2) Jones, W.P. and Launder, B.E.: The prediction of relaminarization with a two-equation model of turbulence, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.15, pp.301-314, 1972.
- 3) Hoffman, G.H.: Improved form of the low Reynolds number $k-\varepsilon$ turbulence model, *The Physics of Fluid*, Vol.18, No.3, pp.309-312, 1975.
- 4) Chien, K.Y.: Prediction of channel and boundary layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model, *AIJA Journal*, Vol.20, No.1, pp.33-38, 1982.
- 5) Patel, V.C., Rodi, W. and Scheuerer, G.: Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows, *AIJA Journal*, Vol.23, No.9, pp.1308-1319, 1984.
- 6) Spalart, P.R. and Baldwin, B.S.: Direct simulation of a turbulent oscillating boundary layer, *Turbulent Shear Flows* 6, pp.417-440, 1989.
- 7) Hanjalic, K., Jakirlic, S. and Hadzic, I: Computation of oscillating turbulent flows at transitional Re-Numbers, *Turbulent Shear Flows* 9, pp.323-342, 1995.
- 8) Lam, C.K.G. and Bremhorst, K.: A modified form of the $k-\varepsilon$ model for predicting wall turbulence, *Journal of Fluid Engineering*, Vol.103, pp.456-460, 1981.
- 9) Myong, H.K. and Kasagi, N.: A new approach to the improvement of $k-\varepsilon$ model for wall-bounded shear flow, *JSME International Journal*, Series II, Vol.33, No.1, pp.63-72, 1990.
- 10) Nagano, Y. and Tagawa, M.: An improved $k-\varepsilon$ model for boundary layer flows, *Journal of Fluid Engineering*, Vol.112, pp.33-39, 1990.
- 11) So, R.M.C., Zhang, H.S. and Speziale, C.G.: Near-wall modeling of the dissipation rate equation, *AIJA Journal*, Vol.29, No.12, pp.2069-2076, 1991.
- 12) Speziale, C.G., Abid, R. and Anderson, E.C.: Critical evaluation of two-equation models for near-wall turbulence, *AIJA Journal*, Vol.30, No.2, pp.324-331, 1992.
- 13) Jensen, B.L.: Experimental investigation of turbulent oscillatory boundary layer, *Series Paper 45, Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark*, 157p., 1988.
- 14) Justesen, P.: A note on turbulence calculations in the wave boundary layer, *Journal of Hydraulic Research*, Vol.29, No.5, pp.699-711, 1991.