

放水路ピット内での自由液面の自励振動解析

Numerical Analysis of Self-Excited Free Surface Sloshing in an Outlet Pit

* **
田中伸和, 福原華一

By Nobukazu TANAKA and Kaichi FUKUHARA

Although self-excited sloshing phenomena of free surface are sometimes observed in an outlet pit of electric power plants, the onset mechanisms are not clearly understood. Numerical analysis based on two dimensional geometry was conducted to evaluate such phenomena using moving grid transformation method. In the analyses, third order finite difference scheme is used for discretization of convective terms in momentum equations describing flow behavior, while boundary conditions at moving free surface are completely modeled considering surface tension and shear forces. Finally, it was shown that the analysis can simulate the self-excited phenomena due to internal flow depending on Froude and Reynolds numbers.

Keywords : Incompressible viscous flow , Self-excited sloshing,
Free-surface, Numerical analysis, Moving grid transformation

1. はじめに

発電所などの水路構造物では、圧力水路（トンネル）に保守・点検用ピットが設けられ、部分的に自由液面が存在する。この場合に、開口部の長さ、被り水深、流速等の条件によっては液面が制御不能の自励振動を生じることがある。この振動は流れに仕切壁を挿入するなどにより防止可能であるが、発生メカニズムについては十分には解明されていないため、事前に予測することは極めて難しい。自由液面が緩やかに自励する流れは、海岸や河川、その他の水路工作物、或いは模型試験¹⁾などでもしばしば見かけるものであるし、液面変動や碎波など自由液面特有の現象は水理学的にも興味深いものである。しかしながら、自由液面は自由に形状が変化するため、大変形を伴う現象はこれまで数値計算ではあまり取り扱われていない。最近になってV.O.F.法や曲線座標系などを用いた計算により、大変形や液面揺動が解析され始めてきた^{2), 3)}。

ここでは、はじめに述べた液面の自励振動の発生と発達について、自由液面形状と液面での応力条件を厳密に模擬した移動曲線座標系で解析することを試みた。なお、流れが2次元であるので、解析は2次元場とした。また、著者の知る限りでは液面での乱流モデルには確立されたものがないので、乱流モデルは用いず渦動粘性係数により乱流を考慮した。

* 正会員 工博 (財)電力中央研究所 我孫子研究所 水理部 次長
(270-11 千葉県我孫子市我孫子1646)

** 正会員 (財)電力中央研究所 我孫子研究所 水理部 構造水理グループ 主任研究員
(同上)

2. 移動曲線座標系での基礎方程式

2.1 座標変換

座標変換を行う場合、一般に変換メトリックが用いられるが、これらを離散化する時に誤差が生じるため、ここでは、もとの物理座標系(t,x,y)から、新しい座標系(T,X,Y)への座標変換を水位(h)のみを用いて、次のように行った。(図-1)

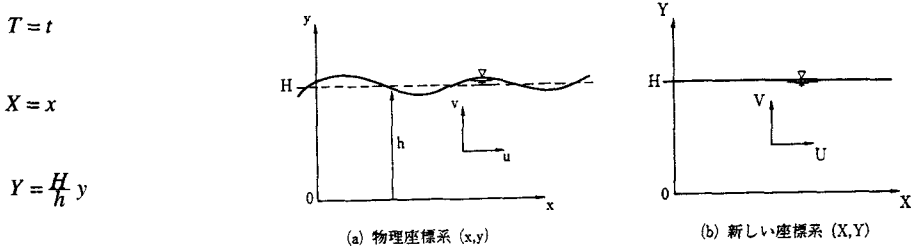


図-1 水位による座標変換の概略

ここで、Hは平均水位で一定、 $h \equiv h(t, x)$ である。
また、もとの物理座標系での流速成分(u, v)を新しい座標系での(U, V)に次のように変換する。(図-2)

$$U = u, \quad V = v - \frac{Y}{H} \frac{\partial h}{\partial x} u$$

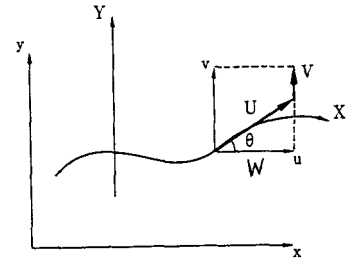


図-2 流速成分の変換

2.2 基礎方程式

前節の座標変換を行うと、流速成分(U, V)、圧力P、水位hについての基礎式は、以下のようになる。なお、運動方程式は、解析上非保存型としたため、かなり複雑な式となった。

- (1) 連続方程式 (2) 水面保持式

$$\frac{\partial}{\partial X}(hU) + \frac{\partial}{\partial Y}(hV) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial T} = v_s$$

- (3) 運動方程式

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = v_1 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + U_2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + U_3 \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \right] + U_4 - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{Y}{h} \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial P}{\partial Y}$$

ここで、

$$U_1 = \frac{H}{h} \left(v - \frac{Y}{h} v_s \right) + v_1 \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} - \frac{2}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right\}, \quad U_2 = \left(\frac{H}{h} \right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{Y}{h} \frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right\},$$

$$U_3 = -2 \frac{Y}{h} \frac{\partial h}{\partial X}, \quad U_4 = -g \frac{\partial h}{\partial X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial S}{\partial X}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = v_1 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + V_2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + V_3 \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} \right] + V_4 + \frac{Y}{h} \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{H}{h} \left(1 + \left(\frac{Y}{h} \frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right) \frac{\partial P}{\partial Y}$$

ここで、

$$v_1 = \frac{H}{h} \left(v - \frac{Y}{H} v_s \right) + \nu_t \frac{Y}{h} \left\{ 3 \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} - \frac{4}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right\}, \quad v_2 = \left(\frac{H}{h} \right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{Y}{H} \frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right\}, \quad v_3 = -2 \frac{Y}{h} \frac{\partial h}{\partial X},$$

$$v_4 = g \frac{Y}{H} \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{Y}{H} \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial S}{\partial X} + 2 \frac{Y}{h} \frac{\partial h}{\partial X} \left\{ \frac{H}{h} + \frac{Y^2}{Hh} \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 - \frac{Y^2}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} \right\}$$

$$- \left[\frac{Y}{H} \left(\frac{\partial v_s}{\partial X} + \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} U \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial X} \left(v - v_s \frac{Y}{H} \right) - \nu_t \frac{Y}{H} \left\{ \frac{\partial^3 h}{\partial X^3} - \frac{5}{h} \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + \frac{4}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^3 \right\} \right] U$$

ただし、 g は重力、 ρ は流体密度、 ν_t は渦動粘性係数でここでは簡単のため一定値と考えた。
また、 S は後述する表面張力、 V_s は水面での V の値を表す。

2.3 液面境界条件

液面での接線方向及び法線方向の応力の釣り合い式及び連続方程式を座標変換したものを整理すると、液面では以下の式が成り立つことになる。

$$\frac{\partial u}{\partial X} = -\frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial X} + S_1 + T_1, \quad \frac{\partial v}{\partial Y} = S_2 + T_2, \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = -\frac{h}{H} \frac{\partial v}{\partial Y} + S_3 + T_3$$

ここで、

$$S_1 = \frac{S}{2\rho\nu_t} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right\}, \quad T_1 = \frac{\frac{\partial h}{\partial X} \left\{ 1 - \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right\}}{2 \frac{\tau}{\rho\nu_t} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right\}}, \quad S_2 = \frac{h}{H} \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 - 1}{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right\}^2}, \quad S_1, T_2 = \frac{h}{H} \frac{\tau}{\rho\nu_t} \frac{\frac{\partial h}{\partial X}}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2},$$

$$S_3 = \frac{h}{H} \frac{\frac{\partial h}{\partial X} \left\{ 3 + \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right\}}{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right\}^2}, \quad T_3 = \frac{h}{H} \frac{\tau}{\rho\nu_t \left\{ 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right\}}, \quad S = -\gamma \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial X^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^2 \right\}^{3/2}}$$

ただし、 τ は接線方向剪断力であり、また、 S は法線方向の表面張力、 γ はその係数である。
これらの式を液面での運動方程式に代入することにより、液面での流速成分に対する式が得られる。また、液面では、大気圧は一定 (0) とした。

3. 数値解析法

以上の基礎方程式を与えられ境界条件のもとで解析する場合には、

- ① $\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}, \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y}$ のような粘性項中のクロス偏微分式の離散化法
- ② 水面保持式、連続方程式、および運動方程式の補正法
- ③ 数値粘性を低減するための移流項などの高次離散化法

が問題となる。

①については、粘性項全体をクロス偏微分を消去するように座標変換して、クロス偏微分の無い楕円型方程式にして、それを中央差分することで安定な離散化式とした。また、②については、SIMPLE法⁴⁾に基づき、連続方程式を満足させる圧力補正量を用いて、水位、液面での流速成分、流体中の流速成分をすべて満足するようにして行った。最後に、③については、移流項は

3次風上差分（ユートピア法あるいは河村法⁵⁾）、全体をクランク・ニコルソン法で離散化して（ Δt^2 、 ΔX^3 ）の精度とし、できるだけ数値粘性を低減させるようにつとめた。さらに、水面勾配などの $\frac{\partial h}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$ もまた、3次スプライン関数により高次精度で求めた。なお、変数配置は、スタッガード配置とした。

4. 解析条件と結果

4.1 解析条件

図-3に示すように、長さ7 m、高さ6 m、幅4.2 mの発電所放水路立坑（ピット）内で、トンネル天端からの平均水位2.8 mで放水路内の流速が約3 m/secの場合（ポンプ全開運転時）に、周期約3秒でモード1次の液面振動が観察され、液面振動は徐々に発達し、最終的には高さ6 mのピットから飛沫が飛び出したとのことである。一方、ポンプの部分運転時で流速が約2 m/secや1 m/secの場合には液面振動は観察されなかった。なお、放水路は $4.8 \times 4.8 \text{ m}^2$ の矩形管である。

そのため、計算は図-4に示すような2次元形状に対して、 $D=4.8 \text{ m}$ 、 $H=7.6 \text{ m}$ 、 $L=7.0 \text{ m}$

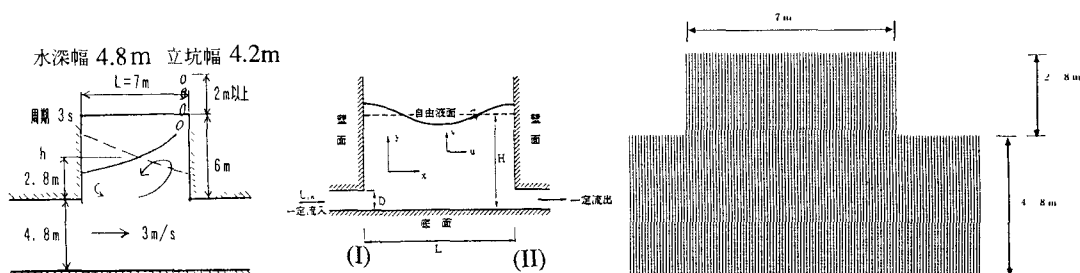


図-3 放水路ピット内での液面の自励振動事例

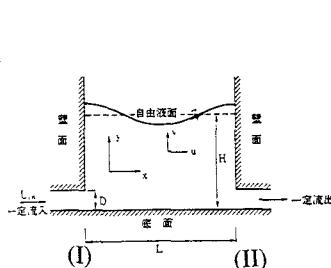


図-4 計算に用いた境界条件の概要

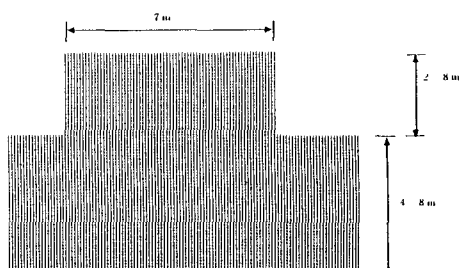


図-5 計算に用いたメッシュ分割

として行った。解析に用いた格子は、図-5に示すように流入部、流出部、ピット内を $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ の格子で分割した。なお、計算は液面での剪断応力は無視し、また壁面をフリースリップ条件の壁とし、流入部高さ D （4.8 m）と流入流速 U_{in} で定義したフルード数（ Fr ）、レイノルズ数（ Re ）、ウェーバー数（ We ）をパラメータとして実施した。また、流入端では上下一様の流速分布とし、流速を0から数10秒間で一定に達するように増加させ、その後は一定とした。流出部端では、流入流量と等しくなるように $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ とした。なお、両端での圧力境界条件も $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ とした。

4.2 解析結果

(1) 流入流速が約2 m/secの場合

Fr を0.3、 Re を500.0、 We を5.0として、静水条件から流入流速を徐々に増加させ、約2 m/secとした計算を行った。その結果を図-6に示す。図はピット内左端（ h_1 ）、右端（ h_2 ）での水位の時間変化である。図より、液面は初期流入による変動後、約3.2秒の固有周期で振動を繰り返すが徐々に振幅を減衰し、一定の水面形に落ち着くことがわかる。

(2) 流入流速が約2.5 m/secの場合

上記の条件で、 Fr のみを0.35とした場合の結果を図-7に示す。図より(1)の場合と大きく異なり、初期の変動後、(1)と同じ固有周期の振動であるが、左右端で逆位相を示しながら増幅する液面の自励振動が発生していることがわかる。

(3) 流入流速が約3.0m/secの場合

同様に、 Fr を0.45とした場合の結果も液面振動の増幅がみられたが、液面振幅が大きくなった時点で図-8に示すように、液面より計算が発散した。この時の液面形状とメッシュ変形を図-9に示す。図より、流速が発散したところでは、液面の局所的なくぼみがみられる。また、液面に最近接するメッシュ内の圧力が負圧となっており、碎波的な現象を示したものと思われる。そこで、 Re を50.0, 100.0, 250.0と変えた場合の計算を行ったところ、図-10に示すように、50.0, 100.0の Re では液面振動は減衰し、250.0では増幅した。

(4) その他の場合

図-10には、それ以外の計算の結果を示す。図より、 Fr 、 Re ともに大きな値の場合に、液面振動は増幅し、あまり大きくなると、計算は発散した。また、その逆では振動は減衰し、一定の液面形状となり、図に示す領域が存在することが示された。

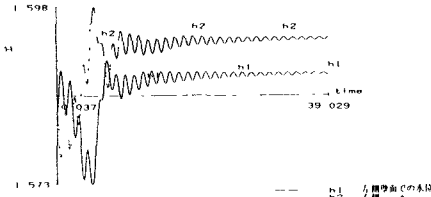


図-6 $Fr=0.3, Re=500.0, We=5.0$ での液位の時間変化

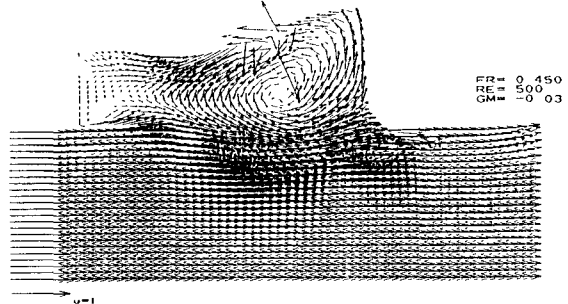


図-8 液位から計算発散時の流速ベクトル図

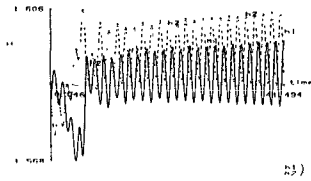


図-7 $Fr=0.35, Re=500.0, We=5.0$ での時間変化

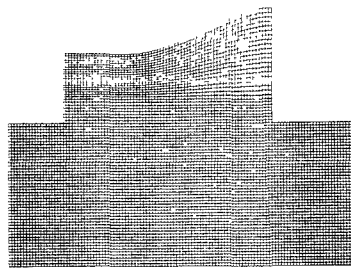


図-9 計算発散時のメッシュの変形

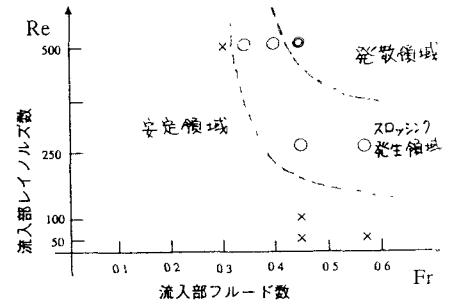


図-10 液面の自励振動の発生範囲

5. 考察と今後の課題

5.1 考察

流速成分 (u , v) と x , y 軸方向の運動方程式の内積をとり、それを図-4のピット内で積分すると、ピット内の運動エネルギーと位置エネルギーに対する以下の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^L \left\{ \int_0^h E \, dy + \frac{1}{2} g h^2 \right\} dx \right] = \int_0^D \left\{ \left(E + p + gh \right)_I u_I - \left(E + p + gh \right)_{II} u_{II} \right\} dy$$

$$+ V_f \int_0^L \left[\int_0^h \left\{ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} dy \right] dx - \int_0^L \frac{S}{\rho} \left(v_s - u_s \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx \quad (\text{ただし、} E = \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2)$$

すなわち、上式の左辺はピット内の全エネルギーの時間変化を表し、右辺は流入・出によるエネルギー増加、ならびに渦動粘性と表面張力で消散するエネルギーを表す。そのため、右辺が正

の場合には、ピット内の全エネルギーは時間的に増加し、負の場合には減少することになる。

そこで、 $Fr=0.58$, $Re=250.0$, $We=5.0$ の場合の流入・出エネルギーの、時間変化を図-11に示す。図より、実線で示す一周あたりのエネルギーのうち流入量の方が大きいことがわかる。また、この場合の液位変化、圧力分布を、それぞれ、図-12, 13に示す。

以上のことより、自由液面を考慮した解析で適切な渦動粘性係数を評価できれば、液面の自励振動現象も解析可能であることがわかった。今回のピット内計算では、壁面をフリースリップ条件としたが、 $Re=250.0$ 以上で実際に観測された液面揺動が計算できた。このことより、放水路ピット内での渦動粘性係数として $\nu_t \cong 0.05 \text{ m}^2/\text{sec} = 500 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 程度の値を用いれば良いことがわかる。

また、流入・出エネルギーのバランスより、自励振動を抑制するためには、流入・出エネルギーの増加を少なくするか、仕切壁の挿入などで粘性散逸を増加させることが有効であると思われる。

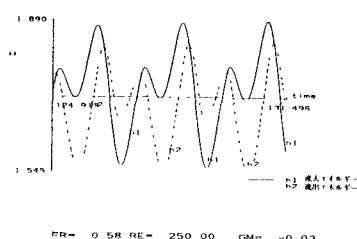


図-11 流入・出エネルギーの
時間変化

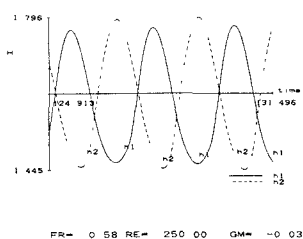


図-12 ピット内液位の
時間変化

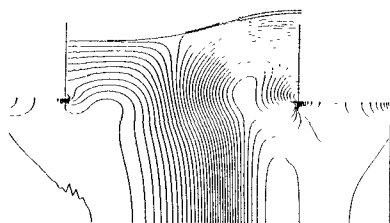


図-13 ピット内の圧力分布

5.2 今後の課題

本文中には結果を示さなかったが、基礎式の離散化を1次オーダーの差分で行った場合には、どのような条件でも自励振動の発生は計算できなかった。また、高次精度にしても、初期流入を極めてゆっくりするとか、一度一定に収束した計算結果を初期条件として流入流速を徐々に増加させた計算では、振動の増幅は顕著ではないか、あるいは振動の増幅は生じなかった。そのため、今後、自励振動を発生させる原因は何なのかやその原因と液面の固有振動数との関係などを検討して行きたい。また、流入流速が早くなったり、液面に急峻なくぼみが生じた場合には、碎波や気泡巻込み的な現象が発生したので、液面近傍での圧力分布、液面形状を詳細に検討して、それらとの関係を把握したいと考えている。さらに、この手法を3次元に拡張して多液面のマノメータ振動についても検討したいし、現在、ほとんど研究されていない自由液面での乱流モデルの確立にも努めて行きたい。

参考文献

- 1) 岡本孝司、班目春樹、萩原剛：“流れによる容器内液面の自励振動（第2報、振動モデル）”、日本機械学会論文集(C編)、57巻、537号、pp654～660、論文No.90-0721A、1991年3月
- 2) Nichols,B.,C.Hirt and R.Hotchkiss: “SOLA-VOF;A Solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple Free Surface” ,LA-8355,1980.
- 3) Takizawa,A.: “Analysis of In-vessel Circulated Free Surface Flow using Physical Component Boundary Fitted Coordinate Method” ,東京大学・工学部・博士論文、1992、June.
- 4) Patankar,S.V.: “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow” ,Hemisphere,New York,1980.
- 5) 大野豊・磯田和男 監修:”新版数値計算ハンドブック” , pp.340～342, 1990.