

急勾配円管内開水路流れから被圧流れへの移行について

— 下流端拘束の有無による —

Full / Partly - Full Transition of Flow through a Conduit

金 学秀*・安川 浩**・宇井正和***

By Haksu KIM and Hiroshi YASUKAWA and Masakazu UI

A numerical model for the transition from partly full to completely full flow is developed to predict flow pattern in a steep circular conduit with a bell mouth at the inlet. The boundary and initial condition of the full / partly - full interface, and its pattern of propagation downstream with the increase of flow speed are discussed in this paper, taking into consideration the two downstream end conditions, i.e. free and choked. The numerical calculation is carried out and its prediction is compared with experimental data.

keyword: interface, full / partly - full flow, unsteady flow

1. はじめに

上流から三角堰、整流水槽、ベルマウス付き急勾配水路、可動堰付き整流水路…により構成される水路系において、射流の初期流況から流量の増加に伴い上流端で発生した被圧水流区間が段波のように下流へ伝播する現象を考察する。周知の通り、非定常な被圧水流と開水路の射流が管・開水路境界を介して管路内に共存する場合、被圧水流側は常微分方程式、射流の開水路側は双曲型偏微分方程式に支配され、後者の支配断面である管・開水路境界における水深と流量が的確に算定されない限り、信頼するに足る射流側の従属変数を導くことができない。また、その射流区間が空気圧 p_0 の閉じこめられた空気により覆われている場合、射流の流れは一見、下流の影響を受けないかに見えるがその空気圧 p_0 は支配断面を通過する流量の支配方程式に大きな影響を与える。

このような移動する管・開水路境界において考慮すべき諸条件に関し、Benjamin⁽¹⁾ は同速度で移動する座標系に基づき、境界面を含む検査領域にベルヌーイの定理と運動量方程式を適用して閉じた方程式系へ導き、開水路側無次元水深 $y_2/d = 0.563$ 、相対無次元流量 $Q'/d^2\sqrt{gd} = 0.426\cdots$ など誘導できることを示しているが、標記の流れにおいては境界面前面の無次元水深は 0.68 程度にも達するため、筆者らの想定する流れに適用することは適切ではない。

この観点から、筆者らは先ず下流端解放（自由落下）の条件下で上記 0.68 程度の開水路側無次元水深を実現できる管・開水路境界の力学モデルを作成し、次いで下流側整流水路の可動堰により初期水面を管路下

* 学生会員 東京都立大学大学院 工学研究科博士後期課程 土木工学専攻

** 正会員 工博 東京都立大学教授 工学部土木工学科

(〒930-03 東京都八王子市南大沢 1-1)

*** 正会員 東京都立大学助手 工学部土木工学科

流端管頂に接するよう調節した現象（下流端拘束）に対して、閉じこめられた空気圧の算定法を提案するものである。

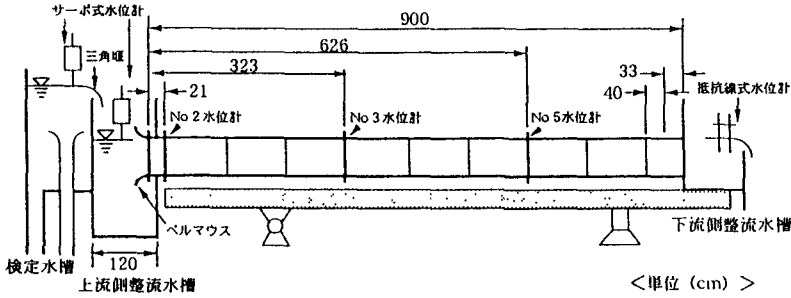


図 - 1 実験装置

2. 管・開水路境界を有する流れの定式化

2 - 1 Benjamin のモデル

Benjamin(1968)⁽¹⁾ は水平な一様断面管路の上流側満管部と自由な下流部を隔てる隔壁を除去する際に生じる流れの解法を非粘性且つ定常の仮定下で示している。境界の移動速度 D と同速度で移動する静止化座標系により観察するものとし、澱み点 O を経由して開水路へ移行する管頂を通る流線上の3点 O_1 、 O 、 O_2 にベルヌーイの定理を、また境界を挟む2支配断面間に運動量方程式と連続式を適用すれば次式が成り立つ（図 - 2）。

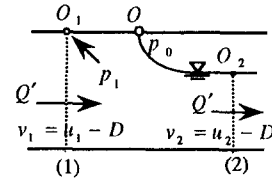


図 - 2 管・開水路境界

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = 0 = \frac{v_2^2}{2g} + y_2 - y_1 \quad (2 - 1 - a)$$

$$\rho Q' (v_2 - v_1) = P_1 + A_1 p_1 - P_2 \quad (2 - 1 - b)$$

$$Q' = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (2 - 1 - c)$$

但し、 $v_1 = u_1 - D$ 、 $v_2 = u_2 - D$ 、 p_1 は断面(1)の管頂部圧力、 u は静止している観察者による粒子速度、 P_i 及び A_i はそれぞれ断面(i)における水深 y_i に対応する水圧による推力及び流水断面積を表すものとする。

式(2-1-a) 及び式 (2-1-b) より p_1 を消去し v_2 につき解けば式(2-1-d) が得られ、それに基づき関連する諸量が式(2-1-e) へ数値的に導かれる。

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{(P_1 - P_2)}{\rho g A_2 \left(2 - \frac{A_2}{A_1} \right)} = y_1 - y_2 \quad (2 - 1 - d)$$

$$y_2/d = 0.563 \quad , \quad v_2/\sqrt{gd} = 0.935 \quad , \quad v_1/\sqrt{gd} = 0.543 \quad (2 - 1 - e)$$

2 - 2 Benjamin モデルに対する修正

Benjamin モデルは静止した満水域へ開水路部が侵入する場合には見事に現象を再現するが(安川ら⁽²⁾)、はじめに述べた通り筆者らの想定する現象には適用できない。筆者らの場合、Benjamin モデルにおける下

流側支配断面 (2) は非定常な下流側射流域における上流端でもあるから、瀬み点と断面(2)の間のベルヌーイ条件式の代わりに、移動する座標系から見た限界水深条件式を適用してはいいかが…というのが筆者らの提案である。

水面が標準大気圧状態にあると想定されている Benjamin モデルに対し、閉じこめられて p_0 の値の空気にさらされているものとすれば、静止化された座標系による式(2-1-a)、式(2-1-b) に対する管径 d 、速度 $\sqrt{gd}$ により無次元化された修正モデルは次式で表される (中田⁽⁹⁾)。尚、式中の B_2 は支配断面(2) における開水路水面幅とする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = 0 = \frac{v_2^2}{2g} + y_2 - y_1 \\ \frac{Q'^2 B_2}{A_2^3} = 1 \end{aligned} \right\} \tag{2-2-a}$$

$$Q'(v_2 - v_1) = P_1 - A_1(p_1 - p_0) - P_2 \tag{2-2-b}$$

式(2-2-a) の第一式と式(2-2-b) から $(p_1 - p_0)$ を、また連続式 (2-1-c) を考慮して Q' を消去すれば、開水路側無次元水深 y_2 に関する条件式として式 (2-3-a) が導かれ (中田(1993)⁽³⁾)、数値的に式 (2-3-b) が導かれる。尚、本論文ではエネルギー及び運動量分配係数はいずれも 1.0 に等しいと想定している。

$$\left(\frac{1}{B_2} \right) \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{A_2}{A_1} \right) \right\} = \left(\frac{P_1}{A_1^2} \right) \left(1 - \frac{P_2}{P_1} \right) \tag{2-3-a}$$

$$y_2 = 0.681, \quad A_2 = 0.570, \quad P_2 = 0.171, \quad Q' = 0.446 \tag{2-3-b}$$

連続式 (2-1-c) より、静止座標系に基づく管・開水路境界の移動速度 D と上式における相対無次元流量 Q' は次式 (2-3-c) 及び (2-3-d) で与えられるから、境界の上流側、即ち満管部流量 Q_1 の値が判明すれば開水路側流量 Q_2 と移動速度 D も確定し、それにより非定常射流部上流端である開水路側支配断面(2) の上流端からの距離 l と射流部への境界条件でもある水深 y_2 と流量 Q_2 が確定できる。

$$D = \frac{dl}{dt} = \frac{(Q_1 - Q_2)}{(A_1 - A_2)} = \frac{(Q_1 - Q')}{A_1} \tag{2-3-c}$$

$$Q' = \frac{A_1 A_2}{(A_1 - A_2)} \left(\frac{Q_2}{A_2} - \frac{Q_1}{A_1} \right) \tag{2-3-d}$$

Q_1 に関しては、管路上流端の新たな支配断面(3)と、管・開水路境界の下流側支配断面(2)間に運動量方程式を適用し、満管側流量 Q_1 の時間的変化率 dQ_1/dt につき整理すれば、式(2-4-a)が得られる。

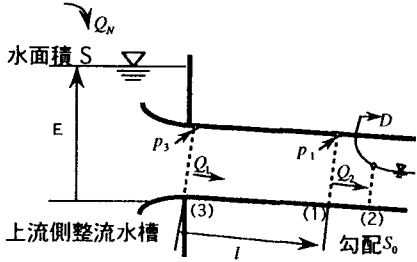


図 - 3 概念図

$$\frac{dQ_1}{dt} = \left[(S_0 - S_1) \cdot l - \left\{ \frac{(P_1 - P_2)}{A_1} + (p_3 - p_0) - \frac{Q'^2}{A_1} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right) \right\} \right] \frac{A_1}{l} \tag{2-4-a}$$

但し、 l は支配断面 (3) (2)間の距離、 S_0 及び S_f はそれぞれ水路床及びエネルギー勾配で、 $S_f = (gn^2/d^{1/3})Q_1^2/(A_1^2 R_1^{4/3})$ 、 $p_3 = E - 1 - u_1^2/2$ 、 n はマニング粗度係数、また、 E 及び l は次式を満足する。

$$\frac{dE}{dt} = \frac{(Q_N - Q_1)}{S} \quad (2-4-b)$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{(Q_1 - Q')}{A_1} \quad (2-4-c)$$

それ故、管・開水路境界が押し出す局面では3元連立常微分方程式(2-4-a～c)を適当な初期条件の下に数値的に解ければよく、それが押し出す以前の局面では、管路上流端の限界水深断面の流量 Q_c に基づき、 $dE/dt = (Q_N - Q_c)/S$ 、但し S は上流側整流水面積水槽、により同様に E が数値的に算定され、ベルヌーイの定理と、限界水深条件より新たな y_c と Q_c が算出される。

3. 管・開水路境界の発生条件、解析方法並びに結果

3-1 解析方法

前節で見た通り、開水路射流部へ満管が押し出す局面の流れは連立常微分方程式 (2-4-a ～c) を数値的に解くことに帰着する。

下流端解放の条件下では水面の空気圧 p_0 を考慮する必要はなく、実測の三角堰水位曲線に基づく Q_N に関する入力ハイドログラフと式(2-5-a ～c) により、 E 、 Q_1 、 l が数値的に算定され、それから決定される開水路側流量 Q_2 と水深 $y_2 = 0.682$ はその下流の射流域を完全に支配するであろう。それ故、本モデルの適用性は Q_1 の精度を反映する E の時間曲線の実験との比較、及び管路内水位計記録に示される管・開水路境界到達直前の前面無次元水深 y_2 を 0.682 と比較することにより確認できる。

下流端拘束の条件下では、閉じこめられた空気圧 p_0 は dQ_1/dt に重大な影響を与えうから、本報告では下流側整流水路内水位計記録を用いて、管路下流側の管頂から上方に測った水面までの距離により空気圧の水頭を近似することを試みる。それにより下流端解放の場合と全く同じ手順で E の時間的な変化を追跡することができる。

3-2 管・開水路境界の発生条件

常微分方程式を Runge・Kutta・Gill 法で解くにあたり、初期値に関心が持たれる。移動開始の条件として dQ_1/dt に関する式(2-4-a)を誘導した運動量方程式において満管区間の長さ $l = 0$ を用いれば次式が得られる。

$$p_3 - p_0 = \frac{Q'^2}{A_1 A_2} \left\{ 1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right\} - \frac{1}{A_1} (P_1 - P_2) \quad (3-1)$$

式(3-1)の右辺は $Q'^2 = 0.446$ 、 $A_1 = \pi/4$ 、 $A_2 = 0.570$ 、 $P_1 = \pi/8$ 、 $P_2 = 0.171$ と全て既知量であり、これから $p_3 - p_0 = -0.072$ が導かれる。

3-3 数値解析結果の実験値との比較

3-3-1 管・開水路境界 開水路側水深 y_2/d

図-1の水路内各水位計記録によれば、下流端解放(図-4)及び拘束(図-5)のいずれの場合でも、管・開水路境界前面の開水路側水深(図中の $A2, C2, D2$ の各点に対応)は無次元水深 0.681 により十分に近似されている。

3-3-2 管・開水路境界の発生条件

図-4及び5において、前項3-2で誘導された式(3-1)との関連で見れば、管・開水路境界の始動(図中のA4に対応)に先立つ準備期間(A2~A4)の存在が読みとれる。これにより、管路上流端にあった開水路の支配断面は、流入水面の上昇に伴う管頂への接触後やや下流へ移り、よどみ点直上流の支配断面内管頂圧である p_3 の或る限界値に達した時、始動するものと想定される。

3-3-3 上流側整流水槽水位E

前節2-2微分方程式(2-4-a~c)の積分では、三角堰の水位曲線を予め一定時間間隔で読みとり内挿することにより、 Q_N を既知の外部関数として与えた。また下流端拘束の条件下では、閉じこめられた空気圧値 p_0 として、下流端管頂に合わせた下流側整流水路の初期水位からの増加量を、三角堰の水位同様に外部関数として扱った。No.2水位計記録におけるA1~A4の区間では、連続式である式(2-4-b)に、 E に対応する限界水深 y_c から算定される流量 Q_c を Q_1 の代わりに用い、A4に達した以後、3元連立に切り替えている。計算結果は図-6及び7にそれぞれ示すが、A2~A4の区間を含め、まずまずの再現性といえるであろう。

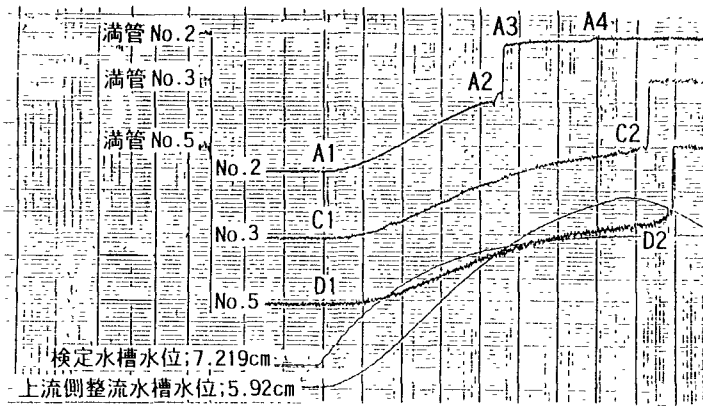


図-4 下流端解放の実験記録

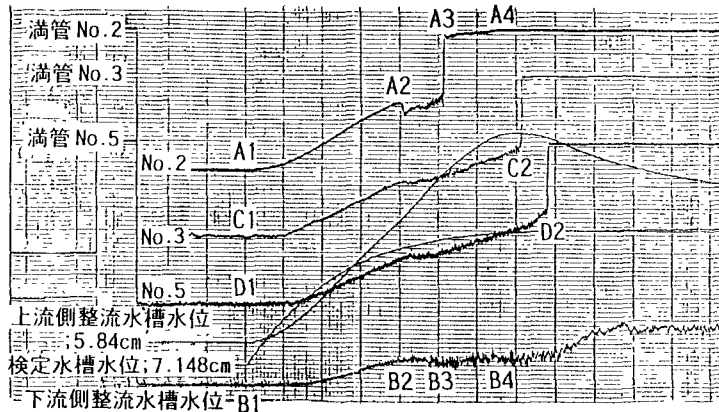


図-5 下流端拘束の実験記録

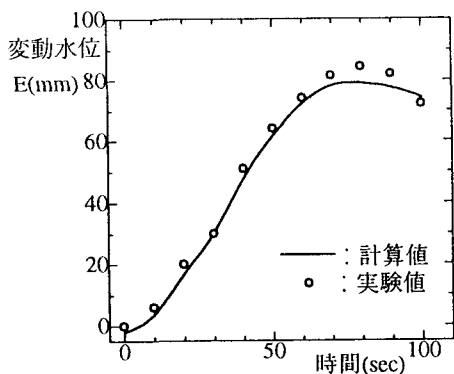


図 - 6 下流端解放の $E-t$ 曲線

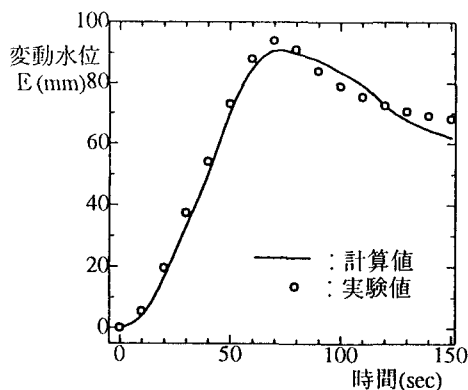


図 - 7 流端拘束の $E-t$ 曲線

4. 結論

水路床勾配 1/50 の円管内開水路流れ（射流）から流量の増加に伴い上流端に先ず発生し、やがてその下流への伝播により管路流れへ移行する管・開水路境界に付随する現象のモデル化を試み、以下の結論を得た。

- (1) 管・開水路境界を挟む満管側及び開水路側支配断面間に、境界と同速度の静止化された座標系に基づく運動量方程式と2つのベルヌーイ条件式を適用する Benjamin のモデルは、開水路側無次元水深 $y_2 = 0.563$ を与えるが、筆者らの現象へ適用するには過小である。
- (2) 管頂を通る流線が漩渦点を経由して開水路側へ移行する際、漩渦点と開水路側支配断面間のベルヌーイ条件に替えて限界水深条件を採用した筆者らのモデルは開水路側無次元水深 $y_2 = 0.681$ を与え、下流端解放及び拘束の2条件下で実験結果と十分よく一致する。
- (3) 本モデルにおいて中心的役割を果たす満管部の非定常流量 Q_1 は上流側整流水槽水位 E 、満管区間長 l と共に3元連立常微分方程式を構成し、下流端拘束の条件下では閉じこめられた非定常空気圧 p_0 の導入を要するが、下流側整流水路水面から管路端管頂までの水深を用いて近似した結果、下流端解放の場合と同程度の精度で実験値と対応している。
- (4) 本解析では管・開水路境界の始動時刻を No.2 水位計の実測時刻に依ったほか、 p_0 値の導入に実測の下流側整流水路水位を与えたが、外部関数としての Q_N のみにより再現できるよう今後の課題としたい。

謝辞

本報告で扱われる資料は都立大学の歴代卒業生諸氏の労によるものであり、本論文作成に際し快く資料と支援を提供してくれた中田達彦氏（静岡県庁）並びに研究室員諸氏にも深く謝意を表したい。

参考文献

- (1) Benjamin, T. B., Gravity current and related phenomena, Journal of Fluid Mechanics, Vol.31, 1968.
- (2) 安川 浩、宇井 正和: 隔壁の瞬間的除去に伴う gravity current に関する基礎的研究 第28回水理講演会論文集, pp.839-844 1984.
- (3) 中田 達彦: 管・開水路混成流に関する基礎的研究、東京都立大学工学研究科修士論文、1993