

貯水池密度流の潜り点の水利条件に関する解析的研究

Analytical Study on the Plunging Conditions of
the Negative Surface Buoyant Jet

有田 正光*

By Masamitsu ARITA

This paper presents the analytical study on the hydraulic conditions of the plunging point of the negative surface buoyant jet discharged on the sloping bottom. Authors already found out four flow types of plunging phenomena and different hydraulic plunging conditions of each flow type experimentally. In this paper, analysis on two flow types, namely, the Density Wedge Type and Internal Jump Type were presented and used to explain the different results of the plunging conditions. Three-dimensional classification of each flow type was also done in the $S-F_o$ plane.

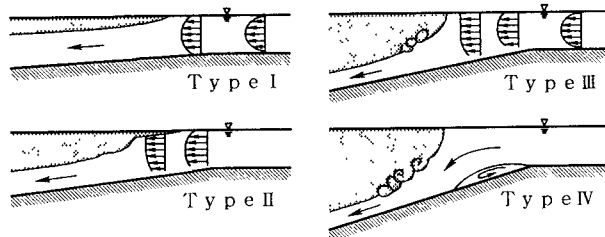
Keywords: reservoir, plunging point, buoyant jet, density flow

1. はじめに

著者等は斜面勾配: S と放出密度フルード数: F_o の値の組み合わせによって貯水池密度流の潜り点の水利条件が大きく変化する事、およびその原因は S と F_o の変化に応じて塩水楔と同様に極めて長く静穏な密度界面を持つ密度楔タイプ(Type I)から急激な密度界面位置の変化を伴う内部跳水タイプ(Type IV)へと流動形態が大きく変化する為であるとの観点に立って実験結果を整理・説明した^{1) 2)}。本報においては密度楔タイプと内部跳水タイプのそれぞれについての解析を示し、そのような観点でデータを整理する事の妥当性を詳細に検証する。また、 $S-F_o$ 平面上において各種流動形態出現領域分割図を示す。

2. 潜り点近傍の流動形態分類のレビュー

著者等^{1) 2)}は貯水池密度流の潜り点近傍の流動形態を図-1に示す様にType I~Type IVの4種に分類した。本章においてはそれぞれのタイプの特徴について本論文における考察の上で必要最小限の説明を以下に行う。



Type I: 塩水楔と同様に水表面近傍に

図-1 各種流動形態分類

* 正会員 工博 東京電機大学教授 理工学部建設工学科 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町)

動量補正係数, τ_1 = 密度界面せん断力, τ_b = 底面せん断力, τ_{w1} = 上層壁面せん断力, τ_{w2} = 下層壁面せん断力, η_s = 水表面の高さ, η_b = 底面の高さ, B = 水路幅, である。

式(1), (2)を h_1, h_2 について項別微分した上で微小項を無視する, また上層壁面せん断力は $s-j$ 層と $j-i$ 層で逆向きとなり全体として無視しうる事を考慮すると上下層についてそれぞれ次式を得る。

$$\{1 - \varepsilon \beta_1 \left(\frac{q_\ell}{q_2}\right)^2 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 F_2^2\} \frac{d h_1}{d x'} + \frac{d h_2}{d x'} = S + \frac{\tau_1}{\rho_1 g h_1} \quad \text{上層流} \quad (3)$$

$$(1 - \varepsilon) \frac{d h_1}{d x'} + (1 - \varepsilon \beta_2 F_2^2) \frac{d h_2}{d x'} = S - \frac{\tau_1}{\rho_2 g h_2} - \frac{\tau_b}{\rho_2 g h_2} - \frac{2 \tau_{w2}}{\rho_2 g h_2} \frac{h_2}{B} \quad \text{下層流} \quad (4)$$

ここに, $\varepsilon = \Delta \rho / \rho_2$, $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, $S = -\partial \eta_b / \partial x'$, $F_2^2 = q_2^2 / \varepsilon g h_2^3$, である。

また, 以下の取り扱いにおいて $\eta_r = h_2 / h_p$, $x_r = x' / h_p$, $q_r = q_\ell / q_2$, $B_r = B / h_p$ の無次元諸量を導入するとともに, τ_i , τ_b , τ_{w2} を次式で定義する。

$$\tau_i = \rho_2 \lambda_i \left(\frac{q_2}{h_2}\right)^2, \quad \tau_b = \rho_2 \lambda_b \left(\frac{q_2}{h_2}\right)^2, \quad \tau_{w2} = \rho_2 \lambda_{w2} \left(\frac{q_2}{h_2}\right)^2 \quad (5)$$

ここに, λ_i = 密度界面抵抗係数, λ_b = 底面抵抗係数, λ_{w2} = 下層壁面抵抗係数, である。

下層流に一樣流を仮定して $\beta_2 = 1$ とおいた上で式(5)を考慮すると式(3), (4)より密度界面形状を求める為の基本式: $d \eta_r / d x_r$ として次式を得る。

$$\frac{d \eta_r}{d x_r} = -\frac{F_p^2}{\Delta^*} \left\{ \frac{\lambda_i (1 + S x_r)}{\eta_r^3 (1 + S x_r - \eta_r)} + \frac{\lambda_b}{\eta_r^3} + \frac{2 \lambda_{w2}}{\eta_r^2 B_r} + S \beta_1 \frac{q_r^2}{(1 + S x_r - \eta_r)^3} \right\} \quad (6)$$

ここに, $\Delta^* = 1 - (F_p^2 / \eta_r^3) \{1 + \beta_1 q_r^2 \eta_r^3 / (1 + S x_r - \eta_r)^3\}$, F_p = 潜り点における密度フルード数 = $q_p / (\varepsilon g h_p^3)^{1/2}$ である。

一方, 下層($j-b$ 層)についての連続の条件より次式を得る。

$$\frac{d q_r}{d x_r} = \frac{\alpha_j}{\eta_r} \quad (7)$$

ここに, α_j = 零流速面における連行係数, である。

密度界面形状の予測は $x_r = x' / h_p = 0$ で $\eta_r = 1$, $q_r = 0$ の境界条件の基に式(6), (7)を連立させて下流方向へ数値積分する事によって可能となる。

なお, 解析中の各種パラメータの値についてはArita-Jirkaの塩水楔に関する研究³⁾で使用された値を準用して以下に示す理論計算を実施した。

3-2 解析結果と実験結果の比較

本節においては前節に示した解析の妥当性を密度楔タイプの潜り現象であると見なせるケースの実験結果との比較により検証する。

図-3は実験結果の一例より得られた密度界面の位置と理論計算との比較を示すものである。計算は上述のように式(6), (7)を連立させて潜り点より下流に向かって進めるが計算の初期条件は図中下段に示されている。なお, 潜り点の位置: ℓ は計算上必要ない。比較の結果が良好である事から前節に示した理論は密度楔タイプの流れの潜り点近傍の密度界面形状の予測計算に妥当なものである事

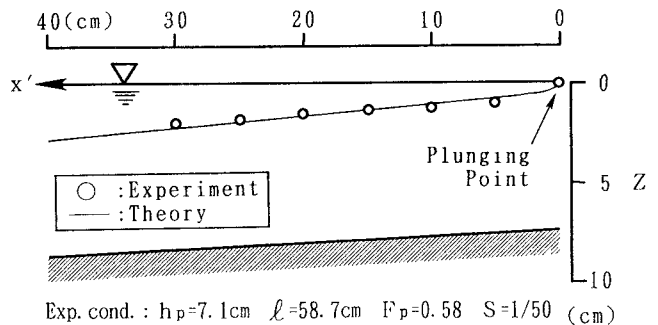


図-3 塩水楔タイプに属する実験データと理論値計算の比較

が分かる。なお、図-3に示す比較のみならず数多くの実験データと予測モデルの予測結果が比較され、予測モデルの妥当性が検証されている事を付記する。

4. 内部跳水タイプ(Type IV)の解析と実験結果との比較

4-1 内部跳水タイプの解析

本節においては密度界面の高さが急激に変化する内部跳水タイプの潜り現象についての解析を示す。

図-1を念頭において放出口地点(O点)と潜り点(P点)の間で立てられた運動比力： $M(x)$ の保存式は次式で与えられる。

$$M(x) = \frac{q_o^2}{h_o} + \frac{1}{2} \frac{P_o}{q_o} h_o^2 = \frac{q_p^2}{h_p} + \frac{1}{2} \frac{P_p}{q_p} h_p^2 + \frac{f}{\rho_o} \quad (8)$$

ここに、 $P_o = \text{欠損密度流束} = q_o g (\rho_o - \rho_1) / \rho_1 = P_p$, $f = \int_0^{\ell} \tau_b \cos \theta \, dx = \text{底面摩擦による } x \text{ 方向の運動量の減少量}$, $\theta = \text{斜面の角度}$, である。

式(8)を内部跳水水深： $h_r = h_p / h_o$ について整理すると次式を得る。

$$h_r^3 - C h_r + D = 0 \quad (9)$$

ここに、 $C = \{(1+2F_o^2) - 2F_o^2 f_r\} (q_p/q_o)$, $D = 2(q_p/q_o)^3 F_o^2$, $F_o^2 = q_o^2 / \varepsilon g h_o^3$, $f_r = f / (\rho_o q_o^2 / h_o)$, である。

式(9)は h_r に関する三次方程式でありその解は次式で与えられる。

$$h_r = A \cos B \quad (10-a)$$

$$h_r = -A \cos(B - \pi/3) \quad (10-b)$$

$$h_r = -A \cos(B + \pi/3) \quad (10-c)$$

ここに、 $A = 2(C/3)^{1/2}$, $B = \cos^{-1}\{-(D/2)/(C^3/27)^{1/2}\}/3$, である。

上式の解の中で、式(10-b)は負解であり、物理的意味のない解である。また、式(10-a)は内部跳水後の水深を示し、式(10-c)は内部跳水始点の水深を示している。

ところで、上式中の f_r は式(5)の定義を使用した上で若干の計算の後、次式の様に書き直す事ができる。

$$f_r = \frac{f}{(\rho_o q_o^2 / h_o)} = \cos \theta \int_0^{\ell} \tau_b \, dx = \frac{\lambda_b (\ell / h_o)}{\{\cos \theta + (\ell / h_o) \tan \theta\}} \quad (11)$$

式(11)を式(10-a)に代入する事によって底面摩擦を考慮した内部跳水タイプの潜り点の無次元水深： h_r が計算できる。なお、 h_r の計算においては放出口と潜り点の間では混合は生じないと考える事が妥当であるので式(9)のC、D中の q_p/q_o の値は $q_p/q_o = 1$ とにおいて計算を実施する事となる。

ところで具体的な計算の為に式(11)中の ℓ/h_o の値を与える必要がある。 ℓ/h_o の値は著者等の実験的検討によれば $S = \tan \theta$ と F_o の値によって大きく変化するものであり、その挙動を知る事は工学的に極めて重要である。今回実施した実験結果より得られる知見については補章において詳細に示すが、本節においてはその結論のみを引用して式(11)の計算を実施し、その結果の定性的挙動について論ずる事とする。補章の図-Bによれば $F_o \geq 3.0$, $S \leq 1/10$ の領域(若干の誤差を許せば $F_o \geq 2.0$, $S \leq 1/10$)においては $\ell/h_o = 0.2\{(2F_o^2+1)/(2F_o^2)^{1/3}\} S^{-1}$ の関係式が成立する事が明らかである。同領域は今回実施した実験条件の範囲の主要な領域を占めるものであり、かつ内部跳水が存在し得るほぼすべての領域を含むものである事から本節においては同関係式を使用して議論を進める事とする。なお、式(11)中の λ_b の値は実験装置がアクリル製であることを念頭においてマンニングの粗度係数を推定した上で定めた。具体的には $\lambda_b = 0.01$ としたがここでは底面摩擦の定性的効果について議論しているのみであり、より詳細な底面摩擦の効果については機会を改めて発表する予定である。

図-4は底面摩擦が潜り点の水利条件に及ぼす効果の定性的挙動に関する計算例を示すものである。同図に示す様に斜面勾配が小さくなると底面摩擦の効果は急激に強くなる事、また底面摩擦の効果によって h_r の値が小さくなるとともに F_p の値は大きくなる事が分かる。また同図より内部跳水が発生する為の θ の最小値の存在が明らかである。

ところで式(9)において底面摩擦の効果を見捨ると次式の完全内部跳水の基本式となる。

$$h_r^3 - (1 + 2Fo^2)h_r + 2Fo^2 = 0 \tag{12}$$

上式は3つの解を持つがそれらの中で完全内部跳水後の水深に対応する解は周知の様に、 $h_r = h_{rj} = h_p/h_o = (1/2) \cdot \{(1+8Fo^2)^{1/2} - 1\}$ 、で与えられ、またその場合の潜り点における密度フルード数を F_{pj} と表すと F_{pj} の値は放出口と潜り点の間で混合を見捨て $F_{pj} = Fo/h_{rj}^{3/2}$ となる。図-4中には完全内部跳水のケースの h_r および F_p の値である h_{rj} 、 F_{pj} の値の位置をそれぞれ破線で示している。

4-2 解析結果と実験結果の比較

図-5は著者等の実験結果²⁾の整理によって得られた $S-F_o$ 平面上における無次元潜り水深： h_r の三次元的挙動を示すものである。同図中に完全内部跳水の解の与える平面の位置を示している。同図に示す様に実験データは S および F_o が極めて小さい領域を除き h_r の値が完全内部跳水の解： h_{rj} より小さい事、 S が大きい領域($S \sim 1/3$)ではほぼ完全内部跳水の解に一致する事が認められる。これは $S \sim 1/3$ では F_o の値によらず潜り現象は完全内部跳水である事を示している。また同図より S が $S \sim 1/3$ より小さくなると h_r の値は h_{rj} より小さくなるが、そのかい離は F_o が大きい程大きい事が明らかである。これは底面摩擦の効果は F_o が大きい程強い事を示している。なお、以上に議論した図-5の S が $S \sim 1/3$ より小さくなる場合の h_r の値の変化は図-4に定性的に示す底面摩擦の効果とその特徴が一致するものであり、また、 S の広範囲な領域に渡って内部跳水タイプが出現する事を意味している。

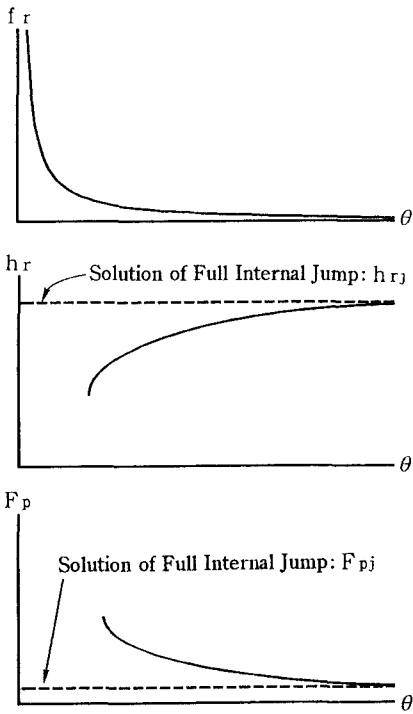


図-4 底面摩擦による潜り点条件の変化

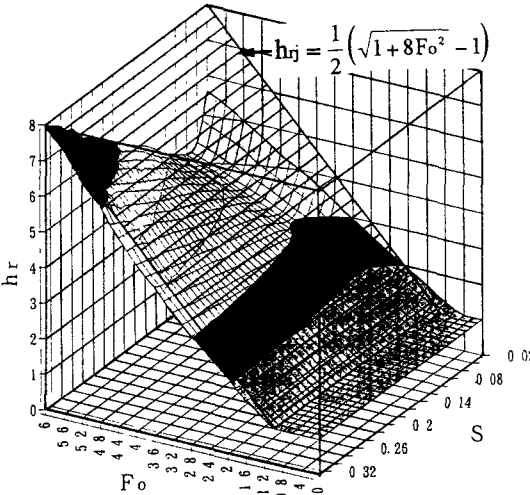


図-5 $S-F_o$ 平面上の h_{rj} の値の三次元的挙動

5. 潜り点の水利条件の評価法

本章においては前章迄の解析的検討および解析結果と実験結果との比較によって得られた知見を念頭において各種流動形態の出現領域分割の為の考察を以下に箇条書きにして示す。

(a) 斜面勾配が十分大きい場合($S \sim 1/3$)の潜り水深： h_r は図-5に示す様に完全内部跳水の理論式とよく一致する。従って斜面勾配が十分大きい場合の潜り現象は内部跳水タイプ(Type IV)である。

(b)完全内部跳水が発生し、 h_r の値が h_{rj} と一致するのは上述の様に S が大きく水表面と底面の間の空間が十分であり、底面摩擦の効果が無視し得る場合である。それより S が小さくなると底面摩擦の効果によって、 h_r の値が h_{rj} より小さな値を持つ内部跳水が発生するとともに F_p の値は大きくなる。この事は内部跳水タイプ(Type IV)は S の広範囲な領域に及ぶ事を示している。

(c)斜面勾配が十分に小さい場合は密度流に対する接近流速が水表面付近で欠損部を持つ²⁾に流動形態は密度楔タイプ(Type I)となる。密度楔タイプの密度界面形状は式(6)で表現できるが、同タイプにおける斜面勾配 S の効果の定性的挙動を明らかにする為に底面および壁面摩擦および上層循環の効果を無視した次式を基に考察を進める。

$$\frac{d\eta_r}{dx_r} = \lambda_i \frac{F_p^2}{F_p^2 - \eta_r^3} \frac{1 + Sx_r}{1 + Sx_r - \eta_r} = \frac{F_p^2}{F_p^2 - \eta_r^3} \frac{\lambda_i}{1 - \eta_r/(1 + Sx_r)} \quad (13)$$

式(13)は S が大きくなると $d\eta_r/dx_r$ の値が小さくなる事を示している。この事は S が大きくなると密度楔がより上流側へ侵入可能な事を示している。また、この事は式(6)、(7)を使用した斜面勾配の効果に関する詳細な理論計算によっても裏付けられ、結果として密度楔タイプでは S が大きくなると h_r が小さくなるとともに F_p が大きくなるという結論を得ている。つまり、図-5で S が極めて小さい領域において S が大きくなると h_r の値が小さくなる領域が存在するのは同領域がType Iの密度楔領域である事を示しているものである。

また、同図中で $0 \leq F_o \leq 1$ の領域において極めて広範囲な S の値に対して $h_r=1$ となっている事が認められるが、これは放出口水路内に上層水が楔を形成して侵入する領域であり、潜り現象のタイプとしては密度楔領域に属するものである。

(d)密度楔+密度カレントタイプ(Type II)は水理条件が密度楔タイプから密度カレントタイプへ遷移する過程、もしくは密度カレントが発生しない程 F_o が小さい領域においては密度楔タイプから内部跳水タイプへ水理条件が遷移する過程で生ずる事となる。

(e)密度カレントタイプ(Type III)の潜り現象は水理条件が密度楔+密度カレントタイプ(Type II)から内部跳水タイプへ遷移していく過程において発生し、その場合の F_p の値はBenjamin⁵⁾の理論値と一致する $F_p \sim 0.5$ の領域であると考ええる。ただし、同タイプは F_o が小さい領域では発生しない。

図-6は上述の議論を念頭において S - F_o 平面上における F_p の値の三次元的挙動を示すグラフ上で各種流動形態の出現領域の分割を実施したものである。ただし、図中に示す領域分割は現象が S および F_o に対してなだらかに変化するものである事を念頭に置けば一定の目安と考えられるべきものである。従って、より高精度の領域分割の為にさらには高精度の実験と解析的研究が必要となる事を付記する。

6. 総括

本報は貯水池密度流の潜り点近傍の水理条件が放出密度フルード数： F_o と斜面勾配： S によって大きく変化し4種の流動形態に分類できるとの実験結果^{1), 2)}に基づいて、その原因をより詳細に明らかにする為

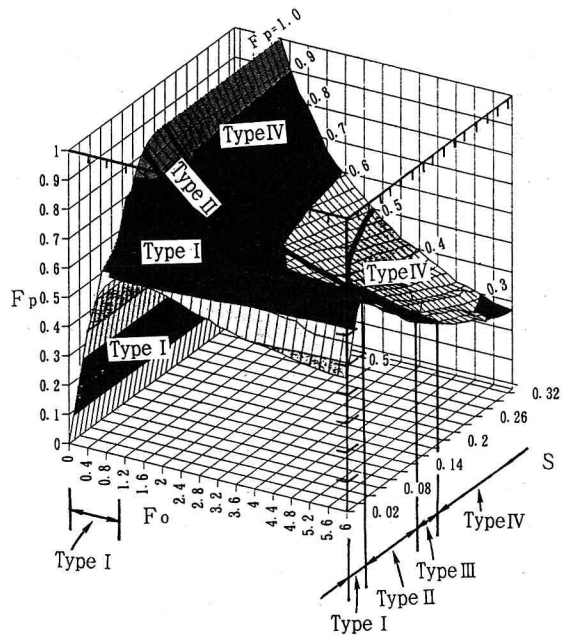


図-6 S - F_o 平面上における各種流動形態出現領域分割図

に実施した解析結果とそれに基づいた実験結果の考察を示すものである。解析的に検討されたのは密度楔タイプ(Type I)と内部跳水タイプ(Type IV)の2ケースである。

密度楔タイプの解析によって密度界面形状の予測モデルが示され、密度楔が形成されるケースの実験結果と比較されて予測モデルの妥当性が検証された。また予測モデルより密度楔タイプの潜り現象における斜面勾配の潜り点の水理条件に及ぼす効果の定性的挙動が検討された。

内部跳水タイプの解析においては底面摩擦の効果を考慮した解析解を示した。解析結果より斜面勾配が小さくなると底面摩擦の効果は大きくなり、その結果として、潜り水深 h_p は小さくなるとともに潜り点の密度フルード数: F_p は大きくなる事が明らかになった。

最終的に種々の知見を総合して $S \cdot F_o$ 平面上の F_p の値を示す三次元グラフ上で各種流動形態の出現領域の分割を示した。

参考文献

- 1) Arita, M., Soga, M. and Tsukahara, C.: Study on the negative buoyant surface jet discharged on the sloping bottom, Proc. of China-Japan Bilateral Sympo. on Fluid Mech., pp.88-95, 1994.
- 2) 有田正光・塚原千明・貯水池密度流の潜り点に関する実験的研究 水工学論文集, 第40巻, pp.1-6, 1996, 掲載拒否(本論文が必要な場合は申出により送ります)。
- 3) Arita, M. and Jirka, G.H.: Two-Layer model of saline wedge: Part I and II, Jour. of Hy. Div., ASCE, pp.1229-1248, 1987.
- 4) Arita, M., Jirka, G.H. and Tamai, N.: Classification and mixing of two-dimensional buoyant surface discharges, Jour. of Hy. Res., Vol.24, No.5, pp.333-345, 1986.
- 5) Benjamin, T.B. : Gravity currents and related phenomena, J.F.M., Vol.31, Part2, pp.209-248, 1968.

補章. 潜り点位置: ℓ に関する実験結果の整理

本論文は潜り点の水理条件を明らかにする為の検討を主眼として実施したものであるが、著者等の一連の研究においては潜り点の位置(放出口から潜り点までの距離: ℓ)についても詳細な実験的検討を併せて実施している。その結果の一部は4-1節で使用したが、潜り点の位置を知る事は工学的に極めて重要であるので本補章において実験結果を整理して示す事とする。

図-Aは潜り点の位置に関する実験結果をプロットしたものである。同図中の ℓ^* は運動比力と欠損密度流束の保存式より導かれる長さのスケール: ℓ_m を使用して次式で定義される。

$$\ell^* = \ell / \ell_m \tag{A}$$

ここに、 $\ell_m = h_o F_o^{4/3} (1 + 0.5 F_o^{-2}) = (2 F_o^2 + 1) / (2 F_o^{2/3})$, である。なお、 ℓ_m の物理的意味およびその効果の詳細については著者等⁴⁾が既に明らかにしている事を付記する。

図-Aより $F_o \geq 3.0$ の領域においては ℓ^* は与えられた S に対して、 $\ell^* \sim \text{const.}$ の関係式が近似的に成立する事が分かる。また、図-Bは図-Aより $F_o = 3$ の場合の ℓ^* と S の関係を求めプロットしたものである。同図より F_o が比較的大きく S が比較的小

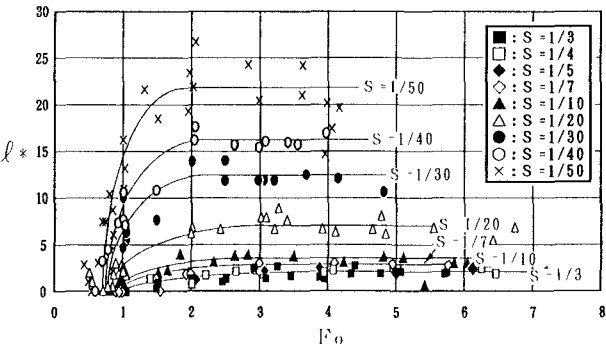


図-A 潜り点の位置($F_o - \ell^*$ 図)

さい場合の ℓ^* と S の関係式として次式を得る。

$$\ell^* = 0.2 S^{-1/2} \qquad S \leq 1/10, \quad Fo \leq 3.0 \tag{B}$$

なお、若干の誤差を許せば式(B)の適用範囲を $S \leq 1/10$, $Fo \geq 2.0$ とする事は可能である。また、データが不十分でその精度に若干問題があるが図-Bより S が大きくなると $\ell^* = 2$ に漸近していくことが認められる。ところで、図-Bは Fo の範囲を限定した上で ℓ^* の挙動について大まかな議論をしているものである。図-B中に $Fo \geq 3.0$ の範囲の概略の流動形態分類を示す事は可能であるが、厳密には流動形態は既述の様に S のみならず Fo の影響も受けるものであり、それについては図-6を参照されたい。

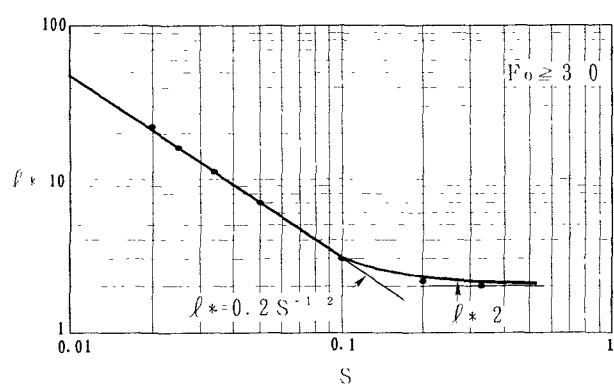


図-B 潜り点の位置 ($S-\ell^*$ 図)