

せん断成層流でのせん断層に着目した相互連行係数の関数形について

Mutual entrainment coefficient function at the density interface in a stratified shear flow

玉井 信行* , 菅 和利**

by Nobuyuki TAMAI and Kazutoshi KAN,

With visualization techniques it is observed that the vortex shear layer with large eddy was formed at a density interface in a stratified shear flow by progress of gravitational instability. It is also found out that large eddies entrain surrounding fluid into this layer and disperse mixed fluid intermittently toward upper and lower layer. The ensemble mean of this mixing process is defined as mutual entrainment velocity.

The instability criterion of the vortex shear layer is determined based on experiments and field observations. Dynamical property of this vortex shear layer developed in the middle of two-layer stratified flows is analyzed to derive the mutual entrainment coefficients theoretically. Dependence of the mutual entrainment coefficients on the overall Richardson number of over and under-lying layers is clarified with the influence of the Reynolds number.

Keywords: mutual entrainment, shear layer, large eddy, density interface

1. はじめに

密度界面での連行現象については多くの実験的研究がなされており、Richardson数の関数とする連行係数の実験式が提案されている。しかし、界面混合を生じさせる起因力である風波の碎波あるいはせん断力など界面に作用する要因が異なると、界面で生じる混合現象のメカニズムが異なるために、それぞれ提案された式を拡大して他の多くの自然現象に適用することができない。

前報¹⁾において、循環水槽を用いて生じさせたせん断密度流界面での混合現象の可視化と、界面に形成されるせん断層内での密度フラックス、Reynolds応力の測定値の4象限表示の時系列の追跡により、せん断層に形成される集中渦への周囲水の取り込みと放出の様子を明らかにした¹⁾。この集中渦を伴ったせん断層への周囲水の取り込みと放出により、せん断層を媒介として上層の流体が下層に、下層の流体が上層に輸送される相互の輸送現象が生じていることを示した。

この相互の連行現象での流体輸送のアンサンブル平均を図-1のように相互連行速度で記述することとする。上層を第1層、集中渦を伴うせん断層を第2層、下層を第3層として3層系で記述することとし、添え字1, 2, 3を用いてそれぞれの層の水理量を表す。集中渦を伴うせん断層への周囲水の取り込み速度を、第1層から第2層への連行速度 W_{e12} 、第3層から第2層への連行速度 W_{e32} と表す。また、

* 正会員 東京大学教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

** 正会員 芝浦工業大学助教授 工学部土木工学科 (〒108 東京都港区芝浦3-9-14)

集中渦を伴うせん断層から放出された混合流体の上層、下層への取り込み拡散速度を、第2層から第1層への連行速度 w_{e21} 、第2層から第3層への連行速度 w_{e23} と表す。

相互連行現象では、集中渦を伴うせん断層の役割が重要であり、このせん断層は周囲水の取り込みと放出を繰り返しながら継続的に安定した平衡状態を保持していると考えられる。従って、相互連行係数の関数形には集中渦を伴うせん断層の安定条件が反映されるはずである。本研究では、集中渦を伴ったせん断層の性質に着目して「せん断流型」の相互連行係数の関数形を導き、連行実験の結果との比較を行った。

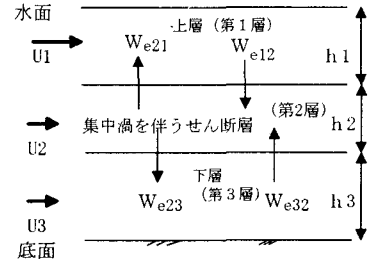


図-1 相互連行速度

2. 集中渦を伴うせん断層の安定条件

せん断密度流界面に形成されたせん断層は、重力不安定による集中渦の形成と周囲水のこの集中渦への取り込みと放出を繰り返しながら相互連行に寄与している。この集中渦を伴ったせん断層は、周囲水の取り込み量と放出量をバランスさせながら体積的な平衡状態を作り出していると考えられる。

Tamai・Kan(1994)は集中渦を伴ったせん断層では力学的に平衡状態を保持し、Richardson数が一定値になると考え、せん断層での運動方程式から出発して相互連行係数が連行層の諸量で定義したRichardson数の(-1)乗則となることを導いた²⁾。この段階ではベキ乗則に焦点を当てており、未知な定数を含んでいた。しかし、せん断層での力学的平衡状態の仮定のもとで導いた連行係数のベキ乗則(-1)乗は従来の研究（例えばMoore long²⁾、江頭³⁾）で提案された(-1)～(-3/2)乗則にほぼ対応しており、Tamai・Kan⁴⁾の考え方の妥当性を示唆している。

初期の重力不安定によって形成された集中渦を安定して保持し、継続的に相互連行現象の起因力となるためには、上下層の流速差、密度差によるせん断力が必要である。また、この集中渦を伴うせん断層は上層、下層の運動によって形成され、これら両層からの流体の取り込みと放出を生じながらせん断層を保持しているので、上下層の運動に規定されながらも新たな力学的な平衡状態を保持していることが予想される。すなわち、この集中渦を伴うせん断層では一定のRichardson数を有していると考えられる。そこで、集中渦を伴うせん断層での層平均Richardson数が一定値になることを確かめるために、

集中渦を伴うせん断層の層平均流速 u_2 とせん断層厚さ h_2 、上下層の密度差 ϵ を用いて計算したRichardson数 $R_{i2} = \epsilon g h_2 / u_2^2$ を上下層の速度差を用いて算定したせん断層の層平均Richardson数 $R_{i2\Delta u} = \epsilon g h_2 / \Delta u^2$ に対してプロットしたのが図-2である。図中○印は著者の循環水槽での実験データであり、●印は最上川での観測データ（須賀(1979)）から算定したものである。上下層の速度差を用いて定義したRichardson数 $R_{i2\Delta u}$ が小さくなりせん断層が不安定になるに従ってせん断層のRichardson数 R_{i2} は減少し、一定値をとるようになる。従って、集中渦を伴うせん断層が形成され、それが安定的に保たれるようになるとRichardson数 $R_{i2} = \epsilon g h_2 / u_2^2$ はほぼ一定値5となる。このように集中渦を伴うせん断層では、力学的平衡状態が安定的に保たれ、Tamai・Kan⁴⁾の考え方の妥当性を示している。

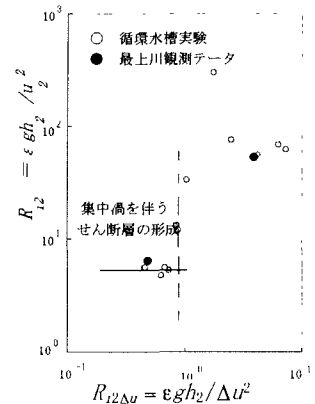


図-2 集中渦を伴うせん断層での層平均Richardson数

3. 集中渦を伴うせん断層の力学的平衡条件から導いた相互連行係数の関数形

集中渦を伴ったせん断層では、層平均Richardson数が一定値を有するように平衡状態を保つことが得られるので、これらの結果を用い集中渦を伴うせん断層内での運動量の釣り合い式を考えることによって「せん断流型」相互連行係数の関数形を求める。さらに、2重円筒水槽での連行実験データを整理し、この式の適応性について検討を行う。

3.1 せん断層についての積分型運動方程式

流速分布、密度分布の存在による分散項は考慮しないこととし、水平方向に水理量が一樣な流れを対象とし、相互連行速度を用いると、集中渦を伴うせん断層についての積分型運動方程式は次式のように記述される。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 u_2 h_2) + \rho_2 u_2 w_{e21} - \rho_1 u_1 w_{e12} - \rho_3 u_3 w_{e32} + \rho_2 u_2 w_{e32} = \tau_1 - \tau_2 \quad (1)$$

集中渦を伴うせん断層についての積分型質量、体積保存則はそれぞれ次式で表される。

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{h_2} w_{e12} + \frac{\rho_3 - \rho_2}{h_2} w_{e32} \quad (2), \quad \frac{\partial h_2}{\partial t} = w_{e12} - w_{e21} + w_{e32} - w_{e23} \quad (3)$$

これらの式は、集中渦を伴うせん断層への取り込み、放出を連行速度で記述した式である。

式(1)に式(2)、(3)を代入して整理すると次式が得られる。

$$\rho_2 h_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + w_{e12} \rho_1 (u_2 - u_1) + w_{e32} \rho_3 (u_2 - u_3) = \tau_1 - \tau_2 \quad (4)$$

集中渦を伴うせん断層の平均水理量で定義した層平均Richardson数が一定値をとることより、せん断層の平均流速の時間微分は次のように書くことができる。

$$R_{12} = \varepsilon g h_2 / u_2^2 = c \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{g(\rho_3 - \rho_1)}{2c\rho_1 u_2} (w_{e12} + w_{e32} - w_{e21} - w_{e23}) \\ &\quad + \frac{g h_2}{2c\rho_1 u_2} \frac{\rho_2 - \rho_3}{h_3} w_{e23} - \frac{g h_2}{2c\rho_1 u_2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{h_1} w_{e21} \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)を式(4)に代入し、整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\left[w_{e12} (4\rho_1 u_2 - 4\rho_1 u_1 + 2\rho_2 u_2) + w_{e21} (-2\rho_2 u_2 - \rho_2 u_2 \frac{h_2}{h_1}) - \tau_1 \right] \\ &+ \left[w_{e32} (4\rho_3 u_2 - 4\rho_3 u_3 + 2\rho_2 u_2) + w_{e23} (-2\rho_2 u_2 - \rho_2 u_2 \frac{h_2}{h_3}) + \tau_2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)の左辺の[]括弧中の量は、第1番目がせん断層の上縁、第2番目がせん断層の下縁に関する量である。さらに含まれる関数形は両者で相似であるので、せん断層の上縁、下縁で独立に釣り合いに達しているものとする。せん断層外縁に働くせん断力 τ_1 、 τ_2 を抵抗係数を用いて記述すると次のように表される。

$$\tau_1 = \frac{\rho f_i}{2} (u_2 - u_1) |u_2 - u_1|, \quad \tau_2 = \frac{\rho f_i}{2} (u_2 - u_3) |u_2 - u_3| \quad (8)$$

3.2 「せん断流型」相互連行係数の関数形

式(7)はせん断層での運動方程式である。この式とせん断層についての力学的平衡条件を用いて連行係数の関数形について検討する。

式(7)の[]括弧内第1項と第2項がそれぞれが分担する抵抗係数を $f_i = f_i' + f_i''$ で表すこととすると、 w_{e21} について次式が得られる。

$$w_{e21}(-2\rho_2 u_2 - \rho_2 u_2 \frac{h_2}{h_1}) = \frac{\rho_2 f_i}{2} (u_2 - u_1) |u_2 - u_1| \quad (9)$$

w_{e21} はせん断層から上層に放出された混合流体の連行層への取り込み速度であるので、上層の拡散強度に依存している。この拡散強度（乱れ強さ）は連行層の流速の大きさに規定されていると考えるので、 $w_{e21} = E_{21} |u_1|$ と表す。式(9)を書き直すと次式となる。

$$\frac{w_{e21}}{u_1} = \frac{\rho_2 f_i \Delta u^2}{2(2 + h_2/h_1) \rho_2 u_2} \frac{1}{u_1} \quad (10)$$

$$\Delta u = u_1 - u_2$$

さらに、式(10)を $R_{j2} = \epsilon g h_2 / U_2^2 = 5$ の関係式を用いて書き直すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{w_{e21}}{u_1} &= \frac{f_i \Delta u^2}{2(2 + h_2/h_1) \sqrt{\epsilon g h_2}} \frac{1}{u_1} \\ &= \frac{f_i}{2(2 + h_2/h_1) \sqrt{\epsilon g h_1}} \frac{\sqrt{5} u_1}{\sqrt{h_2}} \frac{\Delta u^2}{u_1^2} \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)に含まれる $\Delta u/u_1$, h_1/h_2 , f_i を平均水理量で記述することにより、新たな相互連行係数の関数形を定めることができる。

密度界面近傍での流速分布にMonin-Obukhovの相似理論を適用し、抵抗係数 f_i の関数形を定めるとする。塩水くさびでの流速分布は、せん断層内での直線分布、せん断層上部の成層乱流層での「対数+直線」分布、せん断層から離れた領域の一樣分布の三つに分割出来ることが知られている（例えば菅⁽⁵⁾、日野⁽⁶⁾）。これらの流速分布を上層について積分し、上層の平均流速を求めると、せん断層上端での摩擦速度を算定する次式を導くことができる。

ここに u_* は摩擦速度、 $R_{e\delta} = u_* \delta_* / \nu$ であり、 δ_* , h' , h_s は図-3に示した。なお、 L はMonin-Obukhov長さ $L = \frac{\rho u_*}{\kappa \rho g w_e}$ 、 κ はKarman定数であり、 $\frac{h}{L} = J$ とおき、 δ_* , h' をMonin-Obukhov長さ L を用いて書き直した。さらに $R_{e\delta_*} = \frac{u_* \delta_*}{\nu}$, $\Psi = \frac{\Delta u h_1}{\nu} \frac{\Delta u^2}{\epsilon g h_1} = R_{e\Delta u} R_{i\Delta u}^{-1}$ と定義する。

$$\begin{aligned} \sqrt{2} f_i^{-1/2} &= R_{e\delta_*} + \frac{1}{\kappa} (1 + R_{e\delta_*} (\Delta u/u_1)^2 \Psi^{-1} \sqrt{2} f_i^{-1/2}) \ln \left(\frac{J}{4\kappa} R_{e\delta_*}^{-1} E^{-1} \Psi f_i^2 \frac{\Delta u}{u_1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{J}{\kappa} R_i^{-1} E^{-1} \left(\frac{f_i}{2} \right)^{3/2} \left(\frac{\Delta u}{u_1} \right)^3 \right\} + \frac{1}{\kappa} R_{e\delta_*} (\Delta u/u_1)^2 \Psi^{-1} \sqrt{2} f_i^{-1/2} \\ &\quad + \frac{\beta}{\kappa} (J - R_{e\delta_*} E \Psi^{-1} f_i^{-2} \frac{\Delta u}{u_1} 4\kappa) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{J}{\kappa} E^{-1} R_i^{-1} \left(\frac{f_i}{2} \right)^{3/2} \left(\frac{\Delta u}{u_1} \right)^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} R_{e\delta_*} (\Delta u/u_1)^2 \Psi^{-1} \sqrt{2} f_i^{-1/2} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)がせん断層上端での抵抗係数を表す式である。抵抗係数には連行係数 E , $R_{e\delta_*}$, $\Delta u/u_1$, R_i などの多くのパラメータを含んでいることを示している。これらのパラメータの値を理論的に決定するのは困難であるので、流速分布の実測値から決定することとする。Log+Linearの流速分布がフィットするように u_* , β/L を決定する。Monin-Obukhov係数 β の値については日野⁽⁶⁾の研究によると0.4~1.7が報告されており、平均は約1.0である。この $\beta = 1.0$ を用いて L を算定し、 J を計算すると3~5の範囲の値であった。また、 $R_{e\delta_*}$ の値は13~18で平均15であった。次に、式(12)に含まれる $\Delta u/u_1$, h_2/h_1 の関数形について検討する。

Rayleigh型不安定がせん断層外縁で生じ、せん断層からの放出が生じていると仮定すると、この外縁での勾配型Richardson数 R_{if} はRayleigh型不安定の領域では1/4より小さい値になることがT-G方程式の固有値解より得られている。せん断層外縁での $R_{if} = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} / \left(\frac{du}{dz} \right)^2$ が、Rayleigh型不安定の限界値1/4に近い値になると考える。

この R_{if} を層平均量で近似して記述することとする。密度勾配 $-d\rho/dz$ を上層での平均密度勾配 $\Delta\rho/h_1$ で近似し、速度勾配 du/dz をせん断層での平均速度勾配で近似すること、 R_{if} は次式のように表される。

$$R'_{if} = \frac{\Delta \rho g}{\rho} \frac{1}{h_1} \left/ \left(\frac{\Delta u}{h_2} \right)^2 \right. = \frac{\varepsilon g h_1}{\Delta u^2} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \quad (13)$$

式(13)を用いて計算した R'_{if} は一定値にならなかったで、この値をせん断層についてのRichardson数 $\varepsilon g h_2 / \Delta u^2$ に対してプロットしたのが図-4である。図中の実線はデータの平均直線を表しており、

$$\left(\frac{\varepsilon g h_1}{\Delta u^2} \right) \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 = 0.3 \left(\frac{\varepsilon g h_2}{\Delta u^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

の式が得られる。また式(14)より、 $h_2/h_1 = 0.45 R_{i\Delta u}^{-\frac{1}{3}}$ の関係式が得られる。ここに、 $R_{i\Delta u} = \varepsilon g h_1 / \Delta u^2$ である。

次に実験データの整理より、 $\Delta u / u_1$ の関数形について検討を行い、層平均量で記述した次式が得られた。

$$\frac{\Delta u^2}{u_1^2} = 5 \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{\frac{1}{2}} R_{i\Delta u}^{-\frac{1}{2}} = 3.35 R_{i\Delta u}^{-\frac{2}{3}} \quad (15)$$

式(15)の関係式を用いると h_2/h_1 の関数形を次式のように書き直すことができる。

$$\frac{h_2}{h_1} = 1.5 R_{i1}^{-1} \quad (16)$$

次に、式(15)、(16)の関係式を用いて式(12)の内部抵抗係数 f_i について検討する。式(12)に式(15)、(16)の関係式を代入し、Reynolds数 $R_{e\Delta u}$ をパラメータとして f_i を式(12)から算定し、岩崎数 Ψ に対して示したのが図-5である。式(12)には連行係数 E が含まれているが、従来の連行係数について

の関数形 $E = 2 \times 10^{-3} R_i^{-1}$ を用いて計算を行った。図中実線は $R_{e\Delta u} = 10,000$ 、 $R_{e\Delta u} = 50,000$ の場合での計算結果である。内部抵抗係数 f_i が岩崎数 Ψ とReynolds数 $R_{e\Delta u}$ の関数であることを示している。しかし、Reynolds数への依存度は小さく、式(11)を用いてせん断流型の相互連行係数の関数形を求める際には、内部抵抗係数として図-6の点線で示す平均値を表す関数を便宜的に用いることとする。この図-5の点線の関数形は次式で表せる。

$$f_i = 0.02 \Psi^{-\frac{1}{3}} = 9.68 \times 10^{-3} R_{e\Delta u}^{-\frac{1}{3}} R_i^{\frac{2}{3}} \quad (17)$$

なお、図-5の●は流速分布の実測から求めた内部抵抗係数を示したものである。式(15)、(16)、(17)の結果を用いて式(11)を書き直すと、次式の相互連行係数の関数形を求めることができる。

$$\frac{W_{e21}}{u_1} = \frac{\alpha R_{e\Delta u}^{-\frac{1}{3}} \times 0.363}{2(2 + 1.5 R_{i1}^{-1})} R_{i1}^{-\frac{2}{3}} \quad (18)$$

なお、式(18)は連行のプロセスに対応した f_i の関数形ではないので、便宜的に $f_i = \alpha f_i$ とした。

式(18)によると、「せん断流型」の相互連行係数は連行層の層平均Richardson数とReynolds数の関数であることを示している。式(18)で α を0.5とし、Reynolds数をパラメータとして相互連行係数の計算結果を示したのが図-6である。図中実線はReynolds数 $R_{e\Delta u} = 10,000$ と50,000での計算結果である。

Christodoulou⁷⁾は多くの実験データを整理し、 $R_{i\Delta u}$ の領域によってべき乗が0、-1/2、-1、-3/2になることを示した。図-7に示した式(18)の計算結果はこのような傾向を表しており、従来の単純なべき乗則に比べて現象を忠実に反映していると思われる。

せん断層を含んだ3層系での相互連行速度を2重円筒水槽での連行実験データより算定し、集中渦を伴うせん断層を被連行層とする場合の連行係数 E_{21} 、 E_{23} をそれぞれ連行層での層平均Richardson数 R_{i1} 、

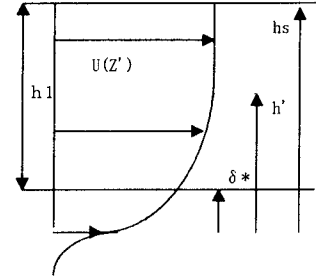


図-3 上層の流速分布

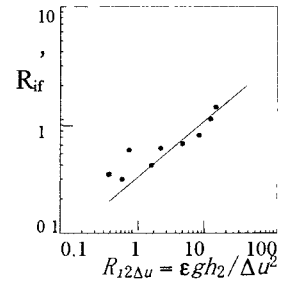


図-4 勾配型Richardson数 R'_{if} と $\varepsilon g h_2 / \Delta u^2$ の関係

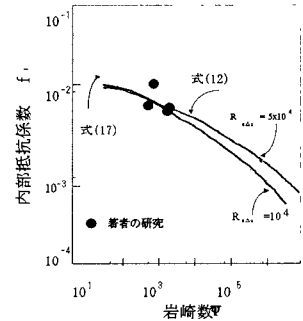


図-5 内部抵抗係数と岩崎数

R_{13} に対して整理したのが図-6の●, ○印である. 図中●印は E_{21} を, ○印は E_{23} をそれぞれ表す, なお, 実験でのReynolds数は3,000~8,000 の範囲の値である. ●印のデータが式(18)に対応している. Reynolds数をパラメータとした式(18)の計算結果と実験データは, 多少の差異はあるが, 良好な適応性を示している. なお, $R_{11} = \varepsilon g h_1 / u_1^2$, $R_{13} = \varepsilon g h_3 / u_3^2$ である. また, 図-6から分かるように, 下層を連行層とする○印のデータと上層を連行層とする●印のデータとはそれぞれの層平均Richardson数に対してほぼ同じ傾向を示しており, ●印のデータと同様に○印のデータも式(18)の周りに分布している. 従って, E_{23} についても式(18)中の R_{11} を R_{13} で書き換えることによって相互連行係数の関数形を与えることができる.

次に集中渦を伴うせん断層を連行層とする場合の連行実験データを整理したのが図-7である. この場合には集中渦を伴うせん断層の不安定性を考慮して層平均Richardson数を次式のように定義した.

$$R_{112} = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)h_2}{\rho_1(U_1 - U_2)^2}, \quad R_{132} = \frac{g(\rho_3 - \rho_2)h_2}{\rho_3(U_2 - U_3)^2} \quad (19)$$

図中●印, ○印は E_{12} , E_{32} をそれぞれ表す. 図-7と同様 E_{12} , E_{32} はほぼ同じ分布をしており, 式(18)によく対応している.

従って, 式(18)で層平均Richardson数として式(19)を用い, せん断層を連行層とする場合の相互連行係数の関数形を与えることができる.

4. 結論

せん断層への周囲水の取り込み, 放出を繰り返しながら安定的に保持されている集中渦を伴うせん断層の力学的平衡条件, せん断層についての運動量の釣り合いを考へることにより相互連行係数の関数形を導いた. また, せん断層での運動量の釣

り合いから出発して導いた相互連行係数の式は, 連行実験の結果と良好な一致を示した. なお, 新しく導いた相互連行係数の関数形は, 層平均Richardson数に対するべき乗が $-1/2$, -1 , $-3/2$ になる三つの領域を示しており, 従来の単純なべき乗則に比べて現象を忠実に反映していると思われる. さらに, 新しい相互連行係数の式には, 従来の式で陽に評価されていなかったReynolds数の効果を含んでいる.

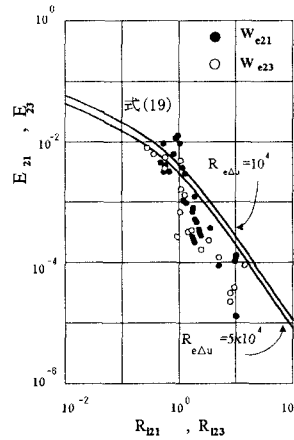


図-6 連行係数の関数形 (せん断層を被連行層)

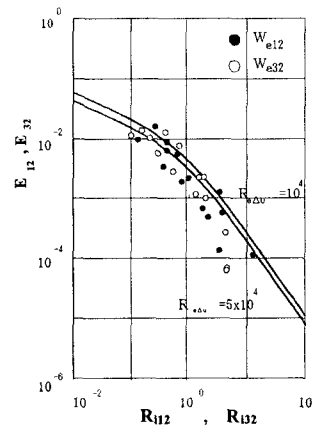


図-7 連行係数の関数形 (せん断層を連行層)

<参考文献>

- 1)菅 和利・玉井信行・須賀龍太郎: 土木学会水工学論文集, 第38巻, pp.313-318, 1994
- 2)Moore, M.J. and Long, R.R.: J. Fluid Mech., vol.49, part4, pp.635-655, 1971.
- 3)江頭進治: 密度成層場での流れと混合機構に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1980.
- 4)Tamai, N and Kan, K.: Proc. of China-Japan Bilateral Symposium on Fluid Mechanics and Management Tools of Environment, pp.15-22, 1994
- 5)菅 和利・玉井信行・藤井良治: 第39回土木学会年次学術講演会概要集Ⅱ, pp.503-504, 1984
- 6)日野幹雄・Nguen Son Hung・中村健一: 第28回海岸工学講演会論文集, pp.515-519, 1981
- 7)Cristodoulou, G.C.: J. Hydraulic Research, 24(2), pp. 77-92, 1986.
- 8)Deardorff, J.W. and Wills, G.E.: J. Fluid Mech., pp.123-149, 1982.
- 9)Thorpe, S.A.: J. Fluid Mech., Vol.46, pp.299-319, 1971.
- 10)浦 勝・椿東一郎・松永信博・並川 正: 第29回水理講演会論文集, pp.401-406, 1985.
- 11)吉田静男: 密度界面における混合機構の研究, 土木学会論文報告集, 第273号, pp.59-68, 1978.