

3次元不飽和浸透に関する数値解析手法の比較及び考察

Numerical Methods for Three-dimensional Unsaturated Subsurface Flow

守田 優 *

By Masaru MORITA

This paper studied finite difference numerical methods for three-dimensional unsaturated subsurface flow model. The equation is mathematically classified as a type of heat diffusion equation. Therefore three-dimensional numerical methods for heat diffusion equation can be applicable to solve the flow equations. For the numerical methods, purely explicit method, ADE methods, and ADI methods are investigated in terms of accuracy, stability, and calculation time using analytical solutions for the linearized equation by Philip. As a results of comparison among the five numerical methods, ADE method proved to be the most excellent.

Keywords: unsaturated infiltration, finite difference method, ADE, ADI,

1. はじめに

近年の都市域における雨水浸透施設の普及に伴い、雨水による3次元の浸透現象の精度の高い予測が要求されるようになった。この3次元の不飽和浸透については、計算機の容量、能力の向上とともに、有限差分法、有限要素法などが数値計算の手法として適用されてきた。ただ、近年のワークステーションの普及により、このEWSの計算能力に見合った精度良い3次元の不飽和浸透の数値計算手法が求められていると考える。本研究では、3次元不飽和浸透の数値解析の手法として、純陽解法、2種類のADE法、2種類のADI法の合計5つの有限差分法の手法をとりあげ、その数値解を解析解と比較することにより、これらの手法の精度、安定性、計算時間を比較検討した。

2. 基礎方程式と数値計算の手法

3次元の不飽和浸透の基礎方程式は、Richardsの式と等価な次式で表される¹⁾。

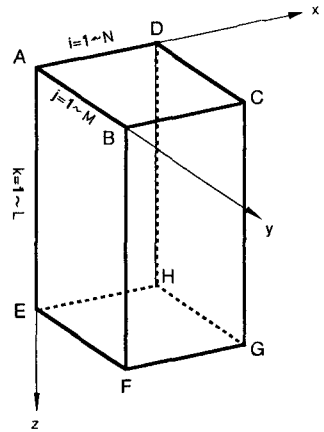
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \alpha_x(\theta) \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_y(\theta) \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_z(\theta) \frac{\partial H}{\partial z} \quad \text{where} \quad \alpha_i(\theta) = K_{si} K_r / (\partial \theta / \partial P) \quad (1)$$

ここに、 H ：ピエゾ水頭； K_{si} ： x, y, z 方向の飽和透水係数； K_r ：相対透水係数； P ：毛管圧； θ ：体積含水率。また、 $\theta = nS$ (n :空隙率, S :飽和度)。ピエゾ水頭 H と毛管圧 P は、 $H = P + Z$ の関係にある。

* 正会員 工博 芝浦工業大学助教授 工学部土木工学科
(〒174 東京都港区芝浦 3-9-14)

さて、上述の基礎方程式（１）は熱伝導方程式の形式であり、このことから数値計算の手法として熱伝導方程式のそれを適用することが可能となる。３次元の不飽和浸透のための数値計算手法を表－１に示した。ここに挙げた手法はJ.Thibault²⁾が３次元の熱伝導方程式の手法として検討したものをもとに選んだ。ただ、このJ.Thibaultの論文は、熱伝導係数を一定とした線形方程式を対象としており、数値解と解析解の比較についても線形方程式の解析解を用いている。本研究では、後述するように、飽和度によって透水係数が変化する線形化解を、比較する解析解として適用した。図－１には、３次元不飽和浸透の数値計算のグリッドを示した。

ここで、表－１の５つの手法について説明する。純陽解法はすでに知られている手法である。ADE法は、Saul'yev³⁾が開発した手法をLarkin⁴⁾が修正したものである。このADE (Alternating Direction Explicit) 法は、陽解法のスキームを用いるが、まず計算を図－１のA→Gの方向で行い、一方それと独立にG→Aの方向で計算する。こうして計算の方向を変えながら、両方向の計算結果を平均して数値解を求めるものである。この手法は、さらに Barakat & Clark⁵⁾によって改良され、そこでは、Hを直接求めるのではなく、UとVという媒介変数を用い、これらについて２つの方向で計算した結果からHを求めるという手順をとる。ADI法は、すでに２次元の地下水流動の解析手法として適用されてきたが、それを３次元に拡張したのが、純ADI法である。ただ、この３次元のADI法は、計算が不安定であることが知られており、この点を考慮してBrian⁶⁾によって改良された。本研究で挙げた手法は、純陽解法、ADE (Larkin)法、ADE (Barakat&Clark) 法、純ADI法、ADI (Brian) 法の５つである。



図－１ 不飽和浸透の数値計算の３次元グリッド

３．数値計算手法の検証に用いる解析解

不飽和浸透においては、土壌中の浸透プロファイルと表層における浸透速度が検討の対象となる。

さて、以上の５つの手法で計算した結果を解析解と比較するが、透水係数が飽和度とともに変化する３次元の不飽和浸透についての解析解はないため、ここではPhilip⁷⁾の線形化解を採用した。このPhilipの解は１次元の浸透に関するものであるが、透水係数が飽和度に応じて変化する線形化解である。

ここで、一様な地盤で均一な初期条件のもとでの基礎方程式と境界／初期条件は以下ようになる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_* \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - k \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2)$$

上式で、 $D_* = K (dP/d\theta) = \text{constant}$, $k = dK/d\theta = (K(\theta_1) - K(\theta_0)) / (\theta_1 - \theta_0) = \text{constant}$

また、初期条件は $t = 0; z > 0, \theta = \theta_0$, 境界条件は $t \geq 0; z = 0, \theta = \theta_1$ である。

上の式の変数の定義は、式（１）と同様である。こうして、微分方程式の解⁷⁾が以下のように得られる。

$$\theta = \theta_0 + \frac{\theta_1 - \theta_0}{2} \left[\operatorname{erfc} \frac{z - kt}{2(D_* t)^{1/2}} + \exp \left(\frac{kz}{D_*} \right) \operatorname{erfc} \frac{z + kt}{2(D_* t)^{1/2}} \right] \quad (3)$$

数値解との比較では、この θ を飽和度Sに直す。また、上の解をもとに表層からの浸透速度を導くと、

$$q = -K_0 + K_0 D_* \left[\frac{(\theta_1 - \theta_0)}{(\pi D_* t)^{1/2}} \exp \left(-\frac{k^2 t}{4 D_*} \right) - \frac{(\theta_1 - \theta_0)}{2} \frac{k}{D_*} \operatorname{erfc} \left(\frac{kt^{1/2}}{2 D_*^{1/2}} \right) \right] \quad (4)$$

上述の解析解を求めるにあたっては、 $n = 0.125$; $\theta_0 = 0.025$ ($S = 0.2$) ; $\theta_1 = 0.125$ ($S = 1.0$) ; $K(\theta_0) = 1.25 \times 10^{-3}$ cm/sec ; $K(\theta_1) = 6.25 \times 10^{-3}$ cm/sec . そして、上に示した式の D^* と k は、 $D^* = 0.25$ cm²/se, $k = 0.05$ cm/secとする。また、毛管圧Pを飽和度Sに変換するため次式を用いた。

$$P = (D_*/k) \ln S \quad (5)$$

表-1 本論文で用いる数値解析手法

Basic Equation	$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$	
Purely Explicit	$\frac{H_{i,j,k}^{t+\Delta t} - H_{i,j,k}^t}{\alpha \Delta t} = \delta_x^2 [H_{i,j,k}^t] + \delta_y^2 [H_{i,j,k}^t] + \delta_z^2 [H_{i,j,k}^t]$	
ADE Method by Larkin	$\frac{U_{i,j,k}^{t+\Delta t} - H_{i,j,k}^t}{\alpha \Delta t} = \delta_x^- [U_{i,j,k}^{t+\Delta t}] + \delta_x^+ [H_{i,j,k}^t] + \delta_y^- [U_{i,j,k}^{t+\Delta t}] + \delta_y^+ [H_{i,j,k}^t] + \delta_z^- [U_{i,j,k}^{t+\Delta t}] + \delta_z^+ [H_{i,j,k}^t]$ $\frac{V_{i,j,k}^{t+\Delta t} - H_{i,j,k}^t}{\alpha \Delta t} = \delta_x^- [V_{i,j,k}^{t+\Delta t}] + \delta_x^+ [H_{i,j,k}^t] + \delta_y^- [V_{i,j,k}^{t+\Delta t}] + \delta_y^+ [H_{i,j,k}^t] + \delta_z^- [V_{i,j,k}^{t+\Delta t}] + \delta_z^+ [H_{i,j,k}^t]$ $H_{i,j,k}^{t+\Delta t} = 0.5 [U_{i,j,k}^{t+\Delta t} + V_{i,j,k}^{t+\Delta t}]$	
ADE Method by Barakat & Clark	$\frac{U_{i,j,k}^{t+\Delta t} - U_{i,j,k}^t}{\alpha \Delta t} = \delta_x^- [U_{i,j,k}^{t+\Delta t}] + \delta_x^+ [U_{i,j,k}^t] + \delta_y^- [U_{i,j,k}^{t+\Delta t}] + \delta_y^+ [U_{i,j,k}^t] + \delta_z^- [U_{i,j,k}^{t+\Delta t}] + \delta_z^+ [U_{i,j,k}^t]$ $\frac{V_{i,j,k}^{t+\Delta t} - V_{i,j,k}^t}{\alpha \Delta t} = \delta_x^- [V_{i,j,k}^{t+\Delta t}] + \delta_x^+ [V_{i,j,k}^t] + \delta_y^- [V_{i,j,k}^{t+\Delta t}] + \delta_y^+ [V_{i,j,k}^t] + \delta_z^- [V_{i,j,k}^{t+\Delta t}] + \delta_z^+ [V_{i,j,k}^t]$ $H_{i,j,k}^{t+\Delta t} = 0.5 [U_{i,j,k}^{t+\Delta t} + V_{i,j,k}^{t+\Delta t}]$	
ADI Method	Purely ADI Method	ADI Method by Brian
	$\frac{U_{i,j,k}^{t+\Delta t} - H_{i,j,k}^t}{\alpha (\Delta v/3)} = \delta_x^2 [U_{i,j,k}^t] + \delta_y^2 [H_{i,j,k}^t] + \delta_z^2 [H_{i,j,k}^t]$ $\frac{V_{i,j,k}^{t+\Delta t} - U_{i,j,k}^t}{\alpha (\Delta v/3)} = \delta_x^2 [U_{i,j,k}^t] + \delta_y^2 [V_{i,j,k}^t] + \delta_z^2 [U_{i,j,k}^t]$ $\frac{H_{i,j,k}^{t+\Delta t} - V_{i,j,k}^t}{\alpha (\Delta v/3)} = \delta_x^2 [V_{i,j,k}^t] + \delta_y^2 [V_{i,j,k}^t] + \delta_z^2 [H_{i,j,k}^t]$	$\frac{U_{i,j,k}^{t+\Delta t} - H_{i,j,k}^t}{\alpha (\Delta v/2)} = \delta_x^2 [U_{i,j,k}^t] + \delta_y^2 [H_{i,j,k}^t] + \delta_z^2 [H_{i,j,k}^t]$ $\frac{V_{i,j,k}^{t+\Delta t} - H_{i,j,k}^t}{\alpha (\Delta v/2)} = \delta_x^2 [U_{i,j,k}^t] + \delta_y^2 [V_{i,j,k}^t] + \delta_z^2 [H_{i,j,k}^t]$ $\frac{H_{i,j,k}^{t+\Delta t} - V_{i,j,k}^t}{\alpha (\Delta v/2)} = \delta_x^2 [U_{i,j,k}^t] + \delta_y^2 [V_{i,j,k}^t] + \delta_z^2 [H_{i,j,k}^t]$

Notation: $\delta_x^2 [H_{i,j,k}] = \frac{H_{i-1,j,k} - 2H_{i,j,k} + H_{i+1,j,k}}{(\Delta x)^2}$, $\delta_x^+ [H_{i,j,k}] = \frac{H_{i+1,j,k} - H_{i,j,k}}{(\Delta x)^2}$, $\delta_x^- [H_{i,j,k}] = \frac{H_{i-1,j,k} - H_{i,j,k}}{(\Delta x)^2}$.

以上の仮定で解析解を計算するが、この仮定に相当するP-K-Sの関係を図示したものが図-2である。

4. 数値解と解析解の比較と数値計算手法の評価

ここで、数値計算の条件を述べる。図-1のグリッドにおいて、 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1 \text{ cm}$ とし、格子数は、 $N = M = 10$ 、 $L = 100$ とした。全格子数は10 000となる。数値計算は式(1)を用いて行うが、式の中の α_x 、 α_y 、 α_z は D^* に等しくなる。しかし、不飽和透水係数は式(2)の $D^* = \text{const.}$ 、 $k = \text{const.}$ の関係を満たしながら飽和度、毛管圧とともに変化する。計算の手順としては、求まった H から P を出し、この P から式(5)を用いて飽和度 S を算出する。

4.1 浸透プロファイル

こうして、まず不飽和浸透のプロファイル(飽和度)の計算結果を $t = 100 \text{ sec}$ 、 $t = 400 \text{ sec}$ について数値解と解析解を比較したのが図-3である。この結果は、ADE

(Barakat & Clark)法によって、 $\Delta t = 0.5 \text{ sec}$ の単位時間で計算したものである。解析解と数値解は良好な一致を得ている。次に、表-1の5つの手法について、数値計算の単位時間 Δt を変えながら飽和度を計算し、次式で計算結果の相対誤差を算出し、これらの手法について、精度、安定性、計算時間を比較した。

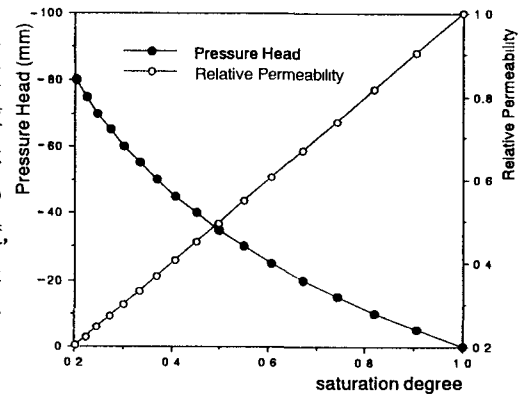


図-2 計算対象の毛管圧、飽和度、不飽和透水係数の関係

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^N (S_i - S_{i0})^2 / (N-1) / (\sum_{i=1}^N S_{i0} / N)} \quad (6)$$

ここに、 ε ：相対誤差； S_i ：数値解の飽和度； S_{i0} ：解析解の飽和度； N ：比較する解の数。この比較は、 $t = 100 \text{ sec}$ 、 $t = 400 \text{ sec}$ について行った。

まず、図-4は、 $t = 100 \text{ sec}$ における各手法の解析解との間の相対誤差 ε と単位時間 Δt の関係を示したものである。式(6)の飽和度として、図-3のプロファイルを考慮し、 $z = 1 \sim 30 \text{ cm}$ までの30個の値を用いた。計算の精度は 10^{-3} のオーダーに達している。手法では、両ADE法が優れており、両ADI法がやや精度に劣る。一般に、 Δt を小さくすると、それだけ誤差は小さくなると言われるが、この図のADI法の精度を見ると、 Δt が 0.5 sec の付近で誤差が最も小さくなっているのがわかる。相対誤差は 10^{-3} のオーダーである。また、図-5は、 $t = 400 \text{ sec}$ における同様の関係を示したものである。ここでも、 Δt が $0.05 \sim 0.1 \text{ sec}$ で誤差が最小であり、この Δt から小さい時間単位では、純陽解法、両ADE法が精度に優れており、より大きい時間単位では、ADI (Brian)が低めの誤差となっている。また、純陽解法と純ADI法は不安定であることがわかる。

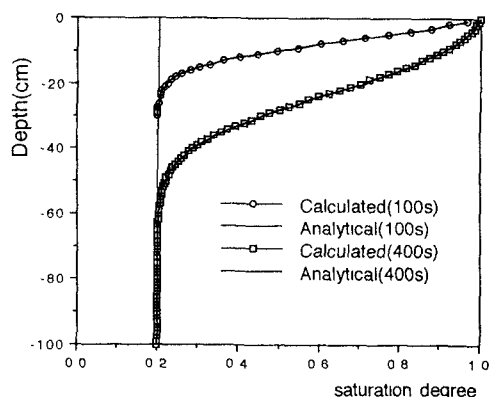


図-3 数値解と解析解の浸透プロファイルの比較

さらに、図-6は、各手法の相対誤差と計算時間を示したものである。ここで、計算時間の単位 u は使用したワークステーション (SUN Spark Station 2) に固有のものであり、 $1 u$ がほぼ1秒に相当する。一般に、精度を上げれば計算時間が長くなるが、この図から $6000u$ より長く計算しても精度は上らず、逆に誤差が大きくなることわかる。数値計算の手法としては、小さい計算時間、小さい誤差がより優秀な手法ということになるが、この点から各手法を見ると、ADI (Brian) 法が他の手法よりやや優れているが、両ADE法に比べて大きな差はない。また純陽解法も安定性において問題があるものの少し長く ($120u$ 程度) 計算時間をとることができれば、ADI (Brian) 法より

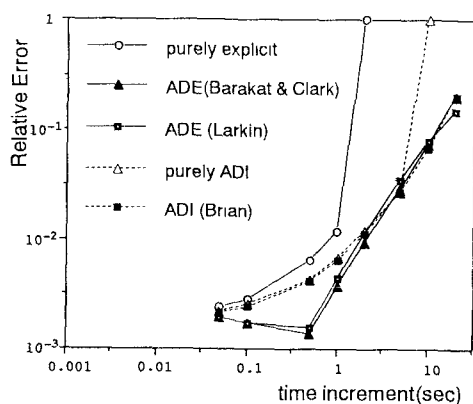


図-4 相対誤差と計算単位時間の関係

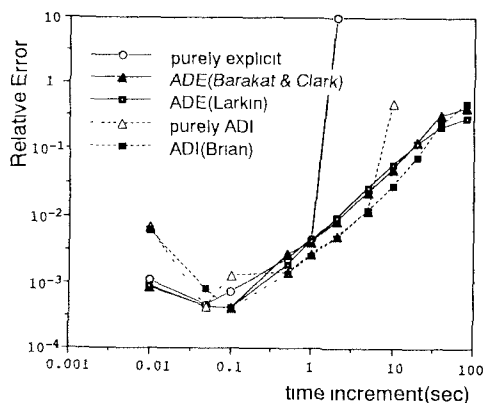


図-5 相対誤差と計算単位時間の関係

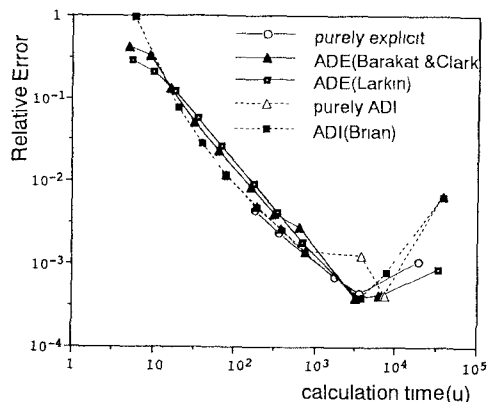


図-6 相対誤差と計算時間の関係

精度が良いことがわかる。

4. 2 浸透速度

数値計算において浸透速度は以下の式によって計算した。
$$q = -(1/2) (K_s + K'_1) (H'_1 - H_0) / (\Delta z) \quad (7)$$

ここに、 q ：表層浸透速度； K_s ：飽和透水係数； K'_1 ：1番目のグリッドの時間 t の不飽和透水係数； H'_1 ：1番目のグリッドの時間 t のピエゾ水頭； H_0 ：地表面のピエゾ水頭。
 Δz は深さ方向格子間隔。

ここで、図-7は、浸透速度の時間変化の数値解と式(4)の解析解と比較した1例である。数値解は、Barakat & ClarkのADE法によって $\Delta t = 1\text{sec}$ で計算したものである。図-7からわかるように、最初の5秒ほどの間、数値解と解析解にわずかに誤差があるが、全体として良好に一致している。浸透プロファイルの場合と同様に、浸透速度についても、各手法について、 Δt と相対誤差、計算時間と相対誤差の関係について図-8、図-9に示した。相対誤差については浸透開始から50秒について1秒ごとの浸透速度の計算値を用いて式(6)と同じ式によって算出した。図-8の Δt と相対誤差の関係を見ると、両ADE法が際立って優れており、ADI(Brian)法、純ADI法、純陽解法と続いている。また、図-9においても同様の傾向である。

ところで、5つの手法で数値計算を進めながら気がついたことは、ADE法が、浸透プロファイルにおいて浅い部分で誤差が小さいこと。また、浸透の初期において誤差が小さいことである。このことが、浸透初期における誤差が大きく影響する<浸透速度>の計算においてADE法が良好な結果を

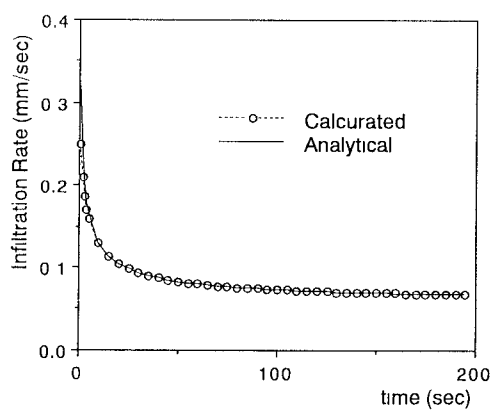


図-7 数値解と解析解の浸透速度の時間変化の比較

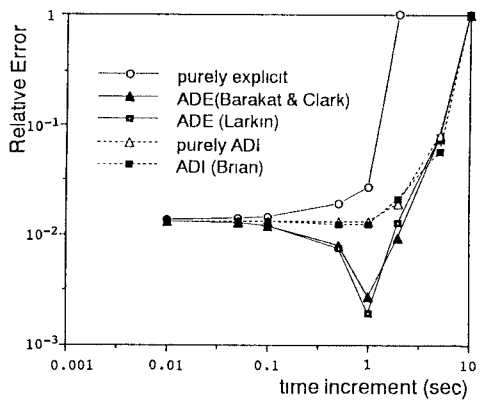


図-8 相対誤差と計算時間単位の関係
($t = \sim 50 \text{ sec}$)

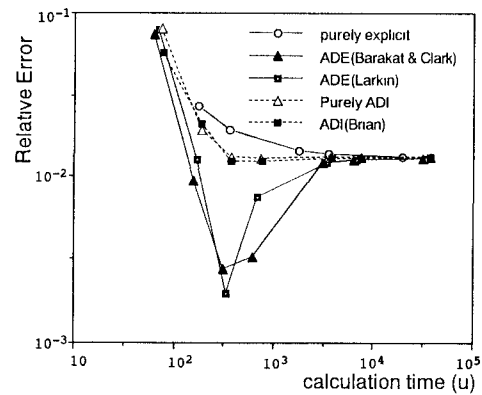


図-9 相対誤差と計算時間の関係 (浸透速度)

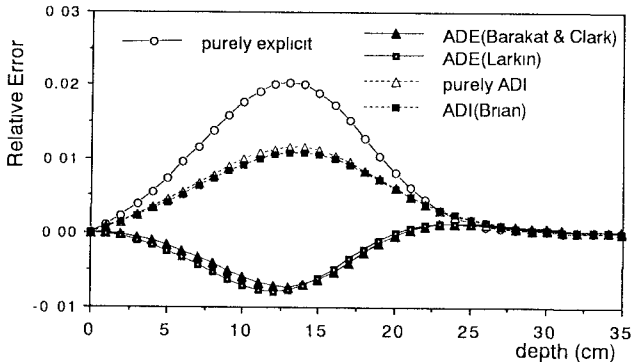


図-10 各手法の相対誤差の深度分布 (浸透プロファイル)

出したこと、並びに図-5より浸透の湿润前線の浅い図-4の例においてADE法が優秀であることと関連していると思われる。そこで5つの手法について浸透プロファイルにおける相対誤差の深度分布と浸透速度における相対誤差の時間分布を示したものが図-10、図-11である。ここでの相対誤差は、式(6)とは異なり、 $(\text{数値解} - \text{解析解}) / (\text{解析解})$ として計算したものである。まず、図-10を見ると、ADE法の2

つの手法が、他の3つの手法より、特に0～5 cmの浅い深度で誤差の小さいことがわかる。これは $\Delta t = 1.0 \text{ sec}$, $t = 100 \text{ sec}$ のときの計算結果であるが、同じ Δt で $t = 400 \text{ sec}$ のときの計算結果においても同様の傾向であった。図-11も $\Delta t = 1.0 \text{ sec}$ の計算結果であるが、これは、図-8の $\Delta t = 1.0 \text{ sec}$ の計算に相当している。この図では、両ADI法及び純陽解法に浸透初期の $t = 2 \text{ sec}$ のところに大きな誤差が生じており、このことが図-8における両ADE法と他の3つの手法との精度の違いとなっている。ただ、この $t = 2 \text{ sec}$ における突起状の誤差は、より小さい Δt で計算すると認められなくなる。

5. まとめ

3次元の不飽和浸透の数値計算手法として、純陽解法、ADE法、ADI法を取り上げ、解析解と比較し、その精度、安定性、計算時間を検討してきた。結論として、以下のことが言える。

(1) 5つの手法のいずれにおいても、与えられた空間格子間隔において適正な時間格子間隔をとることにより、数値解は解析解と 10^{-3} のオーダーの相対誤差で一致を見ることができた。

(2) ADE法は、浸透プロファイル、浸透速度のいずれの計算においても、精度、計算時間、安定性の観点から優れた手法である。また、ADI (Brian) 法は、浸透プロファイルの計算において比較的良好な結果を出しているが、浸透速度の計算においてはADE法より精度が低い。純ADI法は、ADI (Brian) 法と精度などはほぼ同じであるが、安定性において問題がある。

(3) 純陽解法は、安定性において問題があるものの、計算が安定な範囲内においては精度も高く、また計算のアルゴリズムも簡単であることから、計算時間の制限が緩ければ適用可能な手法である。

最後に、本研究は、著者が、米国イリノイ州立大学土木工学科に在籍中に行った研究の一部である。適切な助言をいただいたBen Chie Yen教授に謝意を表します。

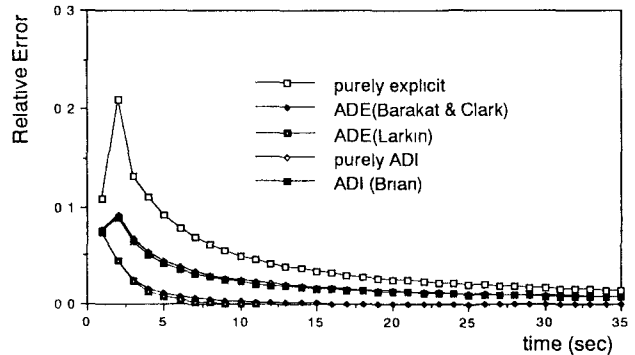


図-11 各手法の相対誤差の時間分布 (浸透速度)

参考文献

- 1) Eagleson, P. S., "Dynamic Hydrology", MacGraw-Hill Book Co. Inc., New York, N. Y., 1970.
- 2) Tibault, J., "Comparison of Nine Three-Dimensional Numerical Methods for the Solution of the Heat Diffusion Equation," Numerical Heat Transfer, Vol. 8, 1985.
- 3) Saul'yev, V. K., "Integration of Equation of Parabolic Type by the Method of Nets", Macmillan, New York, 1964.
- 4) Larkin, B. K., "Some Stable Explicit Difference Approximation to the Diffusion Equation," Mathematics of Computer, Vol. 18, 1964.
- 5) Barakat, H. Z. and Clark, J. A., "On the Solution of the Diffusion Equation by Numerical Methods," Journal of Heat Transfer, Vol. 88, Nov., 1966.
- 6) Brian, P. L. T., "A Finite-Difference Method of High-Order Accuracy for the Solution of Three-Dimensional Transient Heat Conduction Problems", A. I. Ch. E. J., Vol. 7, No. 3, 1961.
- 7) Philip, J. R., "Theory of Infiltration," Advances in Hydrosience, V. T. Chow ed., Academic Press, New York, 1969.