

鉛直パイプ内の不飽和流に関する基礎的研究

Fundamental Study on the Unsaturated Flow in the Vertical Pipe

鷲見哲也* 松林宇一郎** 高柳俊伸*** 高木不折****

By Tetsuya SUMI, Uichiro MATSUBAYASHI, Toshinobu TAKAYANAGI, Fusetsu TAKAGI

In order to make clear the physical explanation of the fast flow in macropores or soil-pipes, as a first step, a series of saturated and unsaturated flow experiments were carried out in vertical smooth cylindrical pipes. The objective of this study was to see the relationship between the degree of saturation and the flow rate inside the pipe. The pipes were of the order of mm. The equation for turbulent flow in pipes was modified. The following results were obtained from the experiments conducted: (a) several flow patterns occur depending on the degree of saturation, (b) flow rate for laminar film flow was affected by varying its thickness around the pipewall, and (c) proposed equations for turbulent flow can describe a highly saturated flow approximately.

Keywords: film flow, pipe flow, unsaturated flow, turbulent flow

1. はじめに

水理学の分野においてこれまで、層流・乱流状態における管路内の流れに関する研究が古くから行われ、優れた知見が提供されてきた。Hagen-Poiseuilleの円管内の層流理論や、Reynoldsらの乱流に対する理論は、管路の流れを考えると常に殆ど用いられている。一方、土壌内の流れを扱うとき、従来Darcy則に代表される媒体内流れを考えてきたが、山腹斜面などの現地表層土壌においては、Soil-PipeやMacroporeのような粗空隙内の速い流れが、浸透や流出に寄与していると考えられるようになってきた。また、地表付近の粗空隙内の流れは不飽和になることも考えられるがその物理法則は明確に見い出されているとは言えない。そこで、この研究では、純粋な水理学的なアプローチから、また、上記のような土壌粗空隙内の流れの素過程として、mmオーダーでの空隙内の水の不飽和流を取り上げ、その最も単純なケースである滑らかなパイプ内の鉛直不飽和流に関する理論展開と実験を行い、その流れの観察と考察を試みた。

ここで取り扱う管内の不飽和流は、相変化を伴わない気液二相流であり、ボイラー水循環に関する研究を始め、機械工学の分野を中心に他分野で進展してきた¹⁾。しかし、これらの研究では気相流量が制御されており、本研究では上に示した目的から、大気圧下の自由水面からの流入という条件下において、流動様式の変化や液相流量の定量的特性を調べることにした。

* 学生員 工修 名古屋大学大学院工学研究科地圏環境工学専攻 日本学術振興会特別研究員
** 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)
*** 名古屋大学工学部土木工学科
**** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

2. 鉛直パイプ内の不飽和流の理論

パイプ内の不飽和流は管の傾きや屈曲、拡大・縮小、内径などによりその流動様式は変わると思われるが、ここでは単純な鉛直に立てられた滑らかな円管内の流れを考える。ここでまず、層流と乱流の二つの状態について、環状流（壁面に沿ったシートフロー）を形成した場合を仮定し、その流速・流量と飽和の度合いとの関係を理論的に考える。

2.1 層流状態の環状流

壁面と同心円の環状流を形成したと仮定し（図-1上図）、それが層流であった場合については、Beven and Germann(1981)²⁾がその流量 Q_L を次のように表している。

$$Q_L = \frac{\pi g}{8\nu} \left\{ (r^2 - f^2)(r^2 - 3f^2) - 4f^2 \ln \frac{f}{r} \right\} \quad (1)$$

ここに、 r は管内の半径、 f は空気柱の半径、 ν は動粘性係数、 g は重力加速度である。この導出は、満管のHagen-Poiseuilleの式の場合に同じである。

2.2 乱流理論の再考と環状流への拡張

仮に、環状流を形成したまま乱流状態に移った場合について考えてみる。この場合も、Prandtl-Karmanの対数分布則を拡張して用いる方法が考えられるが、ここでは、その理論での大胆な仮定を用いない、以下のような取り扱いをする。

図-1のような円管内の鉛直環状流を考える。円管の壁面からの距離 ζ における剪断応力 τ は、力の釣合から、

$$\tau(\zeta) = \rho g \frac{(r - \zeta)^2 - f^2}{2(r - \zeta)} \quad (2)$$

と表される。次に、壁面のごく近傍では粘性底層（厚み δ_L ）があり層流状態であるから、剪断応力は、

$$\tau = \rho \nu \frac{du}{d\zeta} \quad (0 \leq \zeta \leq \delta_L) \quad (3)$$

で表され、式(2)、(3)から流速分布は、

$$u = \frac{g}{2\nu} \left(\frac{r^2 - (r - \zeta)^2}{2} + f^2 \ln \frac{r - \zeta}{r} \right) \quad (0 \leq \zeta \leq \delta_L) \quad (4)$$

となる。ここに、 u は流速である。それより中心側は乱流となる。この渦動粘性係数 ε はPrandtlの輸送理論により $\varepsilon = l^2 |du/d\zeta|$ であるが、混合距離 l は壁面乱流におけるPrandtlの仮定 $l = \kappa y$ （ y ：仮想壁面からの距離、 κ ：Karman定数で、ここでは0.4）を適用し、剪断応力 τ は最終的に、

$$\tau = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{d\zeta} \right)^2 \quad (5)$$

と表される。粘性底層との境界では、流速と剪断応力が接続されるが、ここで y を便宜上壁面からではなく、粘性底層境界から外側に y_0 だけ離れた位置からとる。この y_0 は粘性底層が無かった場合の流速0を与える位置（ $y=0$ ）を決めている。 y_0 は、粘性底層との境界 $\zeta = \delta_L$ における式(2)の τ と式(5)から、

$$y_0 = \frac{\nu}{\kappa} \sqrt{\frac{2(r - \delta_L)}{g \left\{ (r - \delta_L)^2 - f^2 \right\}}} \quad (6)$$

となる。これにより、 $y = (\zeta - \delta_L + y_0)$ が与えられる。ここまでは満管における従来の扱いと類似している

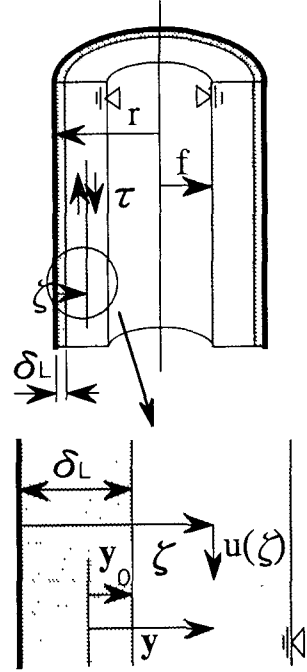


図-1 乱流の理論

が、次式のPrandtl-Karmanの対数分布則は、剪断応力を ζ に拘らず $\tau = \tau_0 = \tau(\zeta = 0)$ と仮定して得られている。

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (7)$$

u_* : 摩擦速度 $(= (\tau / \rho_0)^{1/2})$

つまり、満管の場合において ζ/r を1に対して無視しているが、これはかなり無理な仮定である。ここでは、剪断応力としてそのまま式(2)を用いて解く。流速 u の微分方程式は、 $y = (\zeta - \delta + y_0)$ も考慮すると、

$$\frac{du}{d\zeta} = \sqrt{\left(\frac{g}{2\kappa^2}\right) \frac{(r-\zeta)^2 - f^2}{(r-\zeta)(\zeta - \delta_L + y_0)}} \quad (8)$$

となる。以上により、 $\zeta = \delta_L$ における流速との接続を考慮して式(8)を数值的に積分すると、乱流領域での流速分布 $u(\zeta)$ が得られる。満管の場合($f = 0$)は、積分が実行され、

$$u = \frac{2\nu}{\kappa} \sqrt{\frac{2}{g(R - \delta_L)}} \left\{ \alpha - \gamma + \beta \ln \frac{(\beta + \alpha)(\beta + \gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} \right\} + \frac{\sqrt{2g}}{\kappa} \left\{ r^2 - (r - \delta_L)^2 \right\} \quad (9)$$

$$\alpha = \sqrt{r}, \beta = \sqrt{r - \delta_L + y_0}, \gamma = \sqrt{r - \delta}$$

となる。流量 Q_T は次式

$$Q_T = 2\pi \int_0^{r-f} (r - \zeta) u(\zeta) d\zeta \quad (10)$$

から得られるが、これも満管の場合は積分が実行されて、式(4)と(9)から流量は次式となる。

$$Q_{Tfull} = \frac{\pi}{\kappa} \sqrt{\frac{g}{2}} \left\{ -\frac{5}{12} \gamma (3\gamma^4 + 5\beta^2\gamma^2 + 15\beta^4) + \beta^5 \ln \frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma} \right\} + \frac{\pi g}{8\nu} (r^4 - \gamma^8) \quad (11)$$

不飽和時の流量は、もう一度数値積分して得られる。

ここまで、粘性底層の厚みが与えられていない。そこで、満管の場合について考えると、Nikuradseらの円管内の乱流の流速分布を測定した実験結果(図-2)と比較して、適合するような粘性底層厚さ δ_L の無次元量 $\delta_L^* = (\delta_L u_* / \nu)$ を求めたところおよそ $\delta_L^* = 8.0$ となった。ここで、対数分布則と層流の理論曲線との交点 $\delta_L^* = 11.6$ と異なる事に注意する。また、一般的には純粘性底層は $\delta_L^* = 5.0$ であるとされているが、この理論では $\delta_L^* = 8.0$ 程度まではそうであると考えてもよいであろう。また、 $5 < (\zeta u_* / \nu) < 70$ では層流・乱流の遷移領域とされているが、この理論では8.0以上で乱流として扱っている。 $\delta_L^* = 8.0$ の時のこの理論での流速分布を図-2に示す。この理論により、mmオーダーの細いパイプにおいて影響するであろう粘性底層を無視する事なく流速分布を表現できる。

そこで、次の実験を行ってこの理論を不飽和流に対する適用を試みると同時に、環状流になるのかどうか、現象の観察も行った。

3. 鉛直パイプ内不飽和流の実験

この実験では、鉛直不飽和流の状態の観察し、管内の流量とそのときの管内の貯留量との関係を調べるとともに、上に述べた理論との比較を行った。

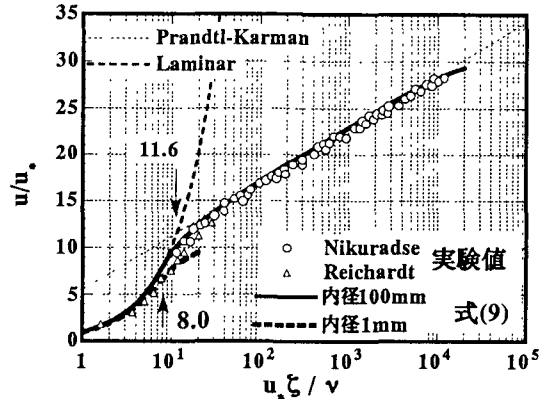


図-2 Nikuradseらの実験結果²⁾と理論曲線

3.1 実験装置と実験方法

実験には、内径4mmのガラス管及び内径6, 8, 10mmの透明な塩化ビニール管を用い、いずれも長さは2mとした。各パイプは図-3のように鉛直に配置し、上端には自由水面を作るための容器を付けた。その容器内にポンプから給水するが、水面を安定させるためのスポンジを入れて、同心円状に管内に流入するよう配慮した。ポンプの流量を変える毎に、管内貯留量、流量、容器内のパイプ上端からの水位、水温（粘性が変化しないように留意）を測定した。管内貯留量は、パイプの上下端を同時に封鎖した後に管内の水を採取して測定し、これを各流量に対し数回ずつ行って得た。これらの測定終了後、水の動粘性係数を粘度計で測定した。

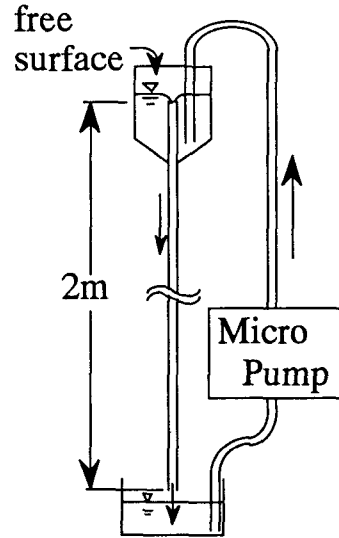


図-3 実験装置

3.2 流れの状態の観察と実験結果及びその考察

まず、実験結果について示す。図-4は、管内飽和度 θ （管内貯留量／管内体積）と流量 Q との関係である。この様に、いずれの管径においても一度折れ曲がった曲線となり、簡単な式では表せない。これを各管径について無次元表示したグラフが図-5である。 v は平均実流速に対応し、流量を流水断面積（管内面積 $\times$ 管内飽和度）で除したものである。 u_* は摩擦速度 $(g r \theta / 2)^{1/2}$ である。この図の様子から、飽和度全体を三つの領域（〈a〉～〈c〉）に分割し、それぞれについて流動形式と合わせて後に議論する。また、結果をMoody線図にプロットしたものが、図-6である。ただし、摩擦損失係数 f は、 $8/(v/u_*)^2$ であり、Reynolds数は $Re = v(4R)/\nu$ 、 $R = r \theta / 2$ （水理径深）である。これを見ると、流量の少ない領域は共通の直線に載っており、そこから管径毎に異なるReynolds数でジャンプして、再び共通の曲線に収束する事がわかる。これらの定量的な情報と観察された流動形式との対応についてこれ以降議論する。

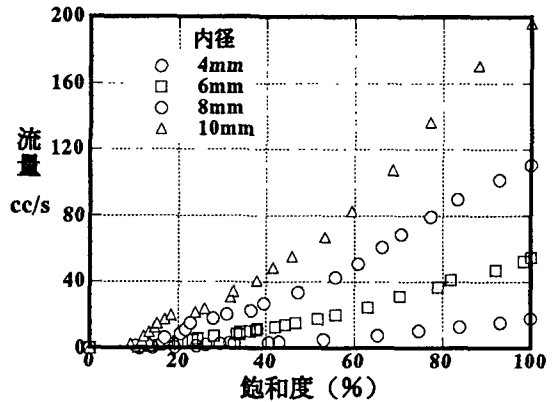


図-4 流量と飽和度

3.2.1 環状流領域（状態〈a〉）

図-5での〈領域a〉における流動様式は、主に環状

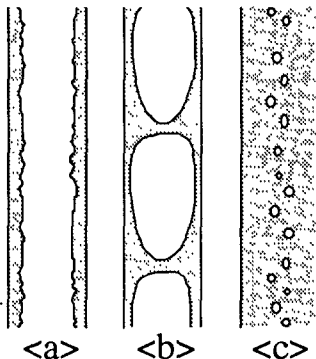


図-7 流動形式

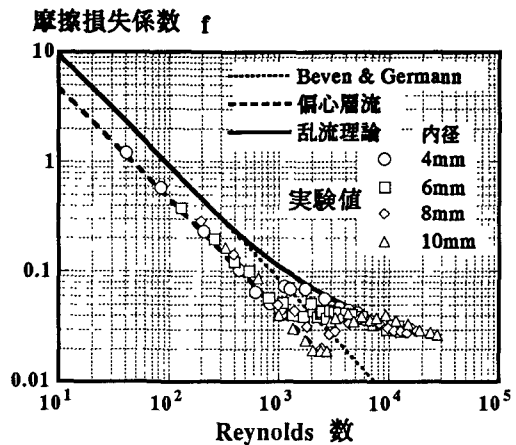


図-6 Moody線図

流であり（図-7<a>）、観察された流れの状態や、Moody線図からみて、層流である。ただし、流量が大きい、状態との境界付近では、上端の入口が不安定になり、その擾乱の発達によって空気柱が途中で閉塞されるようになってくる。層流状態での環状流であることから、この領域<a>ではBeven and Germannの式に一致する事が期待されたが、図-5から、同一の飽和度において理論よりも実際の輸送量が卓越することがわかる。この高い輸送性は流れの偏りに起因するのではないかと考え、この理論式を次のように見直してみる。

同一の飽和度で水の輸送性だけが高まる様に、空気柱の中心をaだけずらした場合（図-8）、層流での流量は、水の厚みが小さいときは次の式で近似される。

$$Q_{Lb} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi g}{8\nu} \left\{ \left(r_b(\alpha)^2 - f^2 \right) \left(r_b(\alpha)^2 - 3f^2 \right) - 4f^4 \ln \frac{f}{r_b(\alpha)} \right\} d\alpha \quad (12)$$

$$r_b(\alpha) = a \cos \alpha + \sqrt{r^2 + a^2 (\cos^2 \alpha - 1)}$$

ここに、 $r_b(\alpha)$ は空気柱中心から方位角 α の方向の壁面までの距離である。この式は、方位角 α での微小角 $d\alpha$ の中の流量を、 $r_b(\alpha)$ と空気柱半径 f に対するBeven and Germannの理論式 Q_L の $(d\alpha/2\pi)$ 倍で表し、それを一回転積分して得られる。ここでは、偏心距離 a によって変化するが、水膜の厚み h で基準化した量 a/h をパラメータとして計算したところ、どの径においても $a/h=0.85$ 程度がよく実験値と適合することがわかった。この場合空気柱が壁面に非常に接近している事を示しており、それが流水断面の偏った部分の輸送性の高さが流量の上昇に寄与している。換言すれば、Beven and Germannの理論のような理想的な状態には成りにくい。この領域においては、このように流れの偏りをモデル化することで、理論的に表現できた。

3.2.2 スラグ流領域（状態）

図-5におけるの領域では、空気が長さ数cm程度の気泡プラグに封入された形で流下するスラグ流となる（図-7）。また、上端では空気が連続的に吸引されて出来た泡が、お互いに結合して気泡プラグを形成する。図-5のこの領域では、 v/u_* がほぼ一定値（13～15）となり、径4mmにおいてはこの領域は殆ど見受けられない。摩擦速度 $u_* = (\tau_o/\rho)^{1/2}$ であり、 R を水理径深とすれば $\tau_o = \rho g R$ であるから流速は径深の平方根に比例し、平均実流速 v はChezy則と等価である事がわかる。

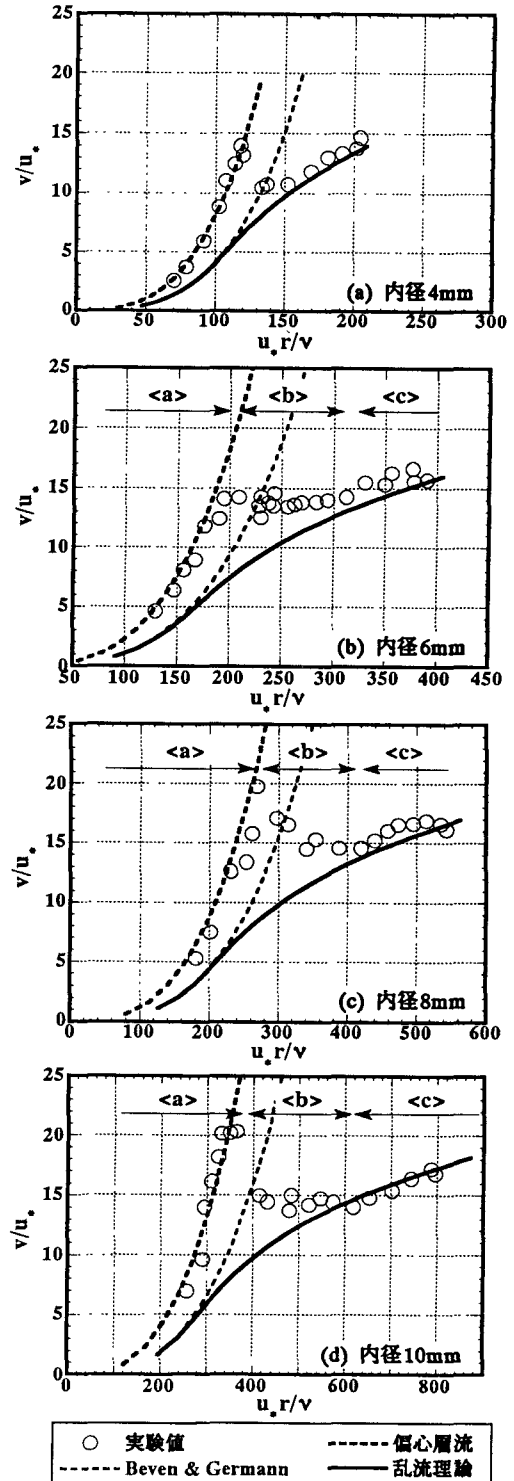


図-5 実験結果の無次元表示

状態<a>との境界は、管径によって異なる。<a>側から流量を増加させていく過程で空気柱が閉塞されて空気の引き込みが始まるかどうかで決まると考えられる。これは管径と、擾乱の発達つまり管長に支配されているのであろう。

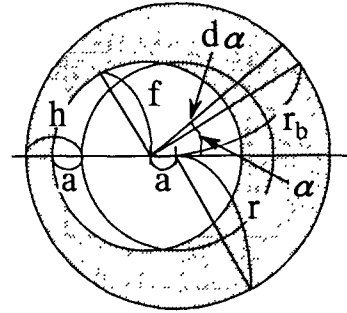


図-8 偏心の考慮

3.3.3 気泡流領域（状態<c>）

図-5における<c>の領域は、いずれの径においても飽和度が約50%以上に対応している。飽和度が上がるにつれて管内の空気は小さい気泡に分かれたまま中心付近を高速で流下する（図-7<c>）。

上端では、渦糸が形成され、連続的に空気が送られる。状態との境界は、流れを観察している限りでは明瞭ではない。しかし、管内水量の測定の際に管の上下端を封鎖すると、状態<c>では空気が上に水が下に移動するのに対し、状態では水が空気のプラグに拘束されて移動しにくい、という差があった。

これらの図-5においてこの領域では、いずれの径においても乱流の理論曲線に近い結果となった。理論では環状流つまり中空状態として扱っているが、実際には空気は気泡状であり、流況が異なる。しかしこの一致は、気泡が中心付近を流下している事や、理論での中心付近の流速には殆ど分布がない事を考えれば、妥当なものであると考えられる。

これから、この鉛直不飽和の滑面の円管流はmmオーダーの径に対する、流量-飽和度の関係はほぼ算定できるが、管長が変わると、領域の境界が移動する可能性があり、遷移点の算定については今後の検討が必要であらう。

4. まとめ

本研究で得られた事柄について以下にまとめる。

- ・円管の飽和・不飽和流れについて、従来の取り扱いと異なった流速分布・流量の定式化を行った。
- ・鉛直・滑面の円管内不飽和流れに関する実験を行った結果、その流れは流量によって大きく3つの状態に分類でき、流量と含水量との関係が示された。
- ・層流状態の環状流には、偏りが出来、それは、比較的簡単に表現される。
- ・飽和状態が満管に近づくと、その流量は先に求められた乱流の理論でおおよそ表現される。

この研究は、土中粗空隙の素過程としての水の流れの表現を目標として始めたものの第一歩であり、空隙の形状、粗度、勾配などの多くの因子が、今回の単純な条件の結果にどのような影響を与えるのか、そしてそれはどう表現できるのか、などについて継続して研究を行おうと考えている。

最後に、本研究は平成7年度文部省科学研究費補助金（特別研究員奨励費）の補助を受けました。ここに深謝申し上げます。

参考文献

- 1) 赤川浩爾：気液二相流研究史と関連技術 -気液二相流研究史の私観-，混相流，Vol. 2, No. 3, pp.185-201, 1988
- 2) Beven, K and Germann, P : Water Flow in Soil Macropores II. A Combined Flow Model, J. of Soil Science, 1981, Vol. 32, pp.15-29, 1981
- 3) 椿東一郎：水理学 I，森北出版，pp. 86-90, 1973