水工学論文集 第40巻 1996年2月

相関連続分布流量を受ける利水貯水池の貯水量確率分布と初到達確率の実用的計算法

Numerical Analysis of Storage-Level Probability Distribution and First Passage Probability in A Reservoir with Correlated Inflows

岳　生* ・ 端野　道夫**
By Sheng YUE and Michio HASHINO

A numerical analysis method is developed to estimate storage-level probability distributions in an actual reservoir with correlated inflows. A bivariate probability density model is adopted in order to estimate cumulants of a probability distribution for sum of two variables (inflows) mutually correlated. Using transition probability matrices obtained from the probability distribution functions for the sum variables, a calculation procedure of storage-level probability distributions for each period of five days through a year is shown. Moreover, the first passage probability and first passage time from an normal storage-level to a drought level are formulated and demonstrated for an actual reservoir.

Keywords: stochastic reservoir theory, serial correlated inflow,
first passage probability, first passage time

1. はしがき

長尾によれば[1]，確率入力としての流量を受ける統計的貯水池理論は，既往の流量時系列の確率構造から，直接的に，貯水量分布などを誘導しようとする理論解析的手法と，流量時系列を適当な量だけ人為的に作成した後に，間接的に貯水量分布などを数値実験的に得ようとするシミュレーション法に大別される．流量時系列の自己相関性を勘案した前者の理論解析的手法は，さらに，流入量時系列の扱いを離散量とするか，連続量とするかで分かれる．本来，流量時系列は連続量であるが，この場合，自己相関性を考慮した理論的解析は，離散量として扱う場合[2]よりも複雑となることが予想される．

しかし，最近の電算機，とりわけパソコンレベルの計算能力と計算速度の向上は著しく，次元の大きな行列演算も比較的簡単にかつ高速で処理できるようになっている．そこで，本研究では，半旬単位で貯水池流入量および利水需要量が変動する実際の貯水池を対象に，相関流量時系列を連続量として扱い，半旬単位の推移確率行列から数値解析的に各月の貯水量確率分布を推定する実用的方法を提案する．さらに，この貯水量確率分布を用いて正常な貯水状態より初めて渇水状態に到達する確率（初到達確率）と初到達時間の平均，分散，歪み係数の計算法も示す．

＊　学生員　工修　徳島大学大学院工学研究科　（〒770　徳島市南常三島町2-1）
＊＊　正　員　工博　徳島大学教授　工学部建設工学科　（同上）

2．貯水量に関する水収支式と放流ルールの設定

利水用貯水池の貯水量 S, 平均流入量 I および平均放流量 D に関する水収支式は次式で与えられる．

$$dS/dt=I-D \tag{1}$$

単位時間$\triangle t$（半旬）で(1)式を差分化すると，次式のように書くことができる．

$$I_i+I_{i+1}=2(S_{i+1}-S_i)/\triangle t+D_i+D_{i+1} \tag{2}$$

ここに，添字 i, $(i+1)$ は離散時点 i（第 i 半旬）のそれぞれ期首，期末における量を示す(Fig.1 参照)．放流量 D は，貯水池ダム下流の利水需要量を満たすための補給量とし，次式のように，貯水量の線形(または階段)関数として設定する．

$$D_i=a_i(S_i)\cdot S_i+b_i(S_i) \tag{3}$$

ここに，$a_i(S_i)$, $b_i(S_i)$ は係数および定数で貯水量 S_iの関数とする．貯水量 S_iがある特定値 S_c 以上では，放流量 D_i は貯水量に無関係にその時期の利水需要量を放流すればよいが，S_iが S_c 以下のとき放流量を制限せざるを得なくなる．このときの制限放流方式も貯水量のみの関数とする(Fig.2 参照)．

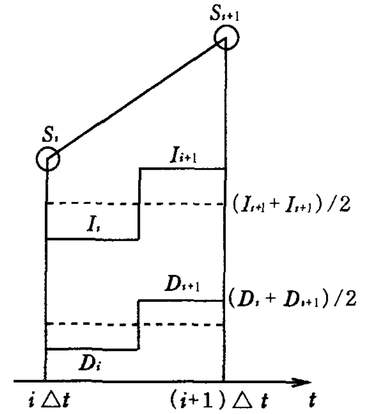

Fig.1 Illustration of inflow, outflow and storage

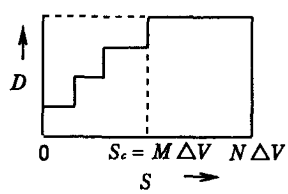

Fig.2 Rule of release

さて，(3)式を(2)式に代入すれば，次式が得られる．

$$I_i+I_{i+1}=2(S_{i+1}-S_i)/\triangle t+a_i(S_i)\cdot S_i+a_{i+1}(S_{i+1})\cdot S_{i+1}+b_i(S_i)+b_{i+1}(S_{i+1}) \tag{4}$$

第 i 半旬の期首に貯水量が S_iであり，期末に S_{i+1} になる推移確率を計算する際，S_i，S_{i+1} は与えられているから，(4)式の右辺は既知量である．よって，(4)式左辺を

$$Z=I_i+I_{i+1} \tag{5}$$

と置くと，Z の確率分布は確率変量 I_i，I_{i+1}の和の確率分布として与えられることになる．つまり，S_i から S_{i+1} への推移確率は確率変量 I_i，I_{i+1}の和の確率分布で規定されることになる．

3．相関流入量の和の確率分布

2変数結合密度関数として，Suzuki [3] が提案した多変数二項分布を筆者の一人が連続分布も含めて任意の多変数確率分布に一般化した式[4]のうち，次式を用いることにする．

$$f(x,y)=f_x(x)f_y(y)\cdot\{1+\rho_{xy}(x-\mu_x)(y-\mu_y)/(\sigma_x\sigma_y)\} \tag{6}$$

ここに，$x=I_i$, $y=I_{i+1}$, $f(x,y)$ は2変数結合密度関数，$f_x(x)$, $f_y(y)$ はそれぞれx, y の周辺確率密度関数，ρ_{xy} は相関係数，μ_x, μ_yは平均，σ_x, σ_y は標準偏差である．

(6)式を用いると互いに異なる確率分布に従う確率変数でも，それらの相関性を考慮した和の分布の積率を与える式を容易に誘導することができる．その結果だけを以下に示す．

$$E(Z)=E(x)+E(y) \tag{7.a}$$

$$V(Z)=V(x)+V(y)+2\rho_{xy}\{V(x)V(y)\}^{1/2} \tag{7.b}$$

$$C(Z)V(Z)^{3/2}=C(x)V(x)^{3/2}+C(y)V(y)^{3/2}+3\rho_{xy}\{V(x)V(y)\}^{1/2}\cdot\{C(x)V(x)^{1/2}+C(y)V(y)^{1/2}\} \tag{7.c}$$

ここに，$E(\cdot)$，$V(\cdot)$，$C(\cdot)$ はそれぞれ，平均，分散，歪み係数を示す．

和Zの確率分布として，ワイブル分布等の適切な確率分布を採用すれば， そのパラメータは，(7)式で与えられる平均，分散，歪み係数を用いて推定することができる．

4．推移確率行列と貯水量確率分布の計算法

利水貯水容量を $N\triangle V$，（N:分割数，$\triangle V$:単位貯水量）として貯水量の状態量を離散化する．第i半旬の期首貯水量が $S_i=j\triangle V$ のとき期末貯水量（すなわち第$(i+1)$半旬期首貯水量）が $S_{i+1}=k\triangle V$になる推移確率 $p[S_{i+1}=k\triangle V \mid S_i=j\triangle V]$ を $p_{jk}(i,i+1)$と記すと，この推移確率は，前述のように，第i半旬の貯水状態，放流ルールおよびその期の流入量の和の確率分布より決まる．即ち，基本的には次式で与えられる．

$$p_{jk}(i,i+1)=G_i(Z_{iu})-G_i(Z_{iw}) \qquad (8)$$

ここに，$G_i(Z)$ は第i半旬の期首流入量 I_i と期末流入量 I_{i+1}の和Zの確率分布関数(非超過確率)であり，$Z=Z_{iu}$，Z_{iw}，$(Z_{iu}>Z_{iw},u>w)$ は(4)式右辺にそれぞれ$(S_i=(j+c)\triangle V,S_{i+1}=u\triangle V)$，$(S_i=(j+c)\triangle V,S_{i+1}=w\triangle V)$を代入したものであり(Fig.3 参照)，具体的に u，w を次式で与えることにする．

$$\left.\begin{array}{llll}
c=0, & u=k+0.5, & w=k-0.5, & (j=1,\dots,N;k=1,\dots,(N-1)) \\
c=0.25, & u=k+0.5, & w=k-0.5, & (j=0;k=1,\dots,(N-1)) \\
c=0, & u=0.5, & w=0, & (k=0;j=1,\dots,N) \\
c=0.25, & u=0.5, & w=0, & (j=k=0) \\
c=0, & u=\infty, & w=N-0.5, & (j=N;k=N)
\end{array}\right\} \qquad (9)$$

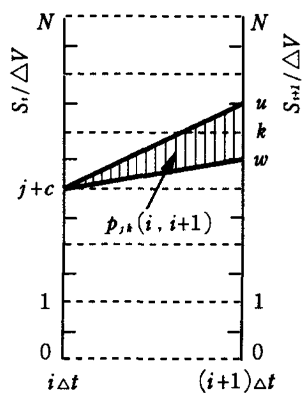

Fig.3 Transition probability

第 i 半旬の期首における貯水状態が j である絶対確率を $p_j(i)$ とすれば，それより半旬後の第$(i+1)$半旬期首(第i半旬期末)における貯水状態が k にある絶対確率 $p_k(i+1)$ は次式で与えられる．

$$p_k(i+1)=\sum_{j=0}^{N}p_j(i)p_{jk}(i,\ i+1), \qquad (i=1,2,3,\dots) \qquad (10)$$

ところで，推移確率$p_{jk}(i,i+1)$ は半旬毎に異なると考えると絶対確率 $p_k(i)$ も半旬毎に異なるから，(10)式から明らかなように，第$(i+1)$半旬の絶対確率 $p_k(i+1)$ を求めるには第i半旬の絶対確率$p_j(i)$が必要になる．従って，ここでは最初に，$p_j(1)$ を仮定し，$i=1,2,3,\dots$ と(10)式の計算を繰り返す方法をとることにする．1年を73半旬で表すと，この繰り返し計算では，$i>73$になれば iを $(i-73)$と置き換え，繰り返し計算を続行する．同じ第i半旬での絶対確率が前年度のものと一致した年度で計算を終了する．このようにして得られた絶対確率分布を第i半旬の貯水量確率分布と呼ぶことにする．

5．初到達確率および初到達時間の平均，分散及び歪み係数

第i半旬の期首に通常貯水状態すなわち給水制限をしていない状態 j $((M+1)\leqq j\leqq N)$ から，n半旬後に給水制限を含むレベル k，$((1+\nu)\leqq k\leqq N$，$\nu=0,1,\dots,M$，M:給水制限に入る貯水状態）になる推移確率は次式で与えられる．

$$p_{jk}(i,i+n)=\begin{cases} p_{jk}(i,i+1) & (n=1) \\ \displaystyle\sum_{\nu_1=(1+\nu)}^{N}\cdots\sum_{\nu_{n-1}=(1+\nu)}^{N}p_{j\nu_1}(i,i+1)\cdots p_{\nu_{n-1}k}(i+n-1,i+n) & (2\leqq n)\end{cases} \qquad (11)$$

従って，第i半旬の期首に通常状態 j $((M+1)\leqq j\leqq N)$ から，$(n+1)$半旬後に初めて渇水状態(給水制限

状態)ν, ($\nu=0,1,2,\ldots,M$) 以下に到達する条件付確率 $Q_{\nu|j}(i,i+n+1)$ 及び条件付初到達確率$Q_{\nu|j}(i)$は次式で与えられる.

$$Q_{\nu|j}(i,i+n+1)=\begin{cases}\sum_{\mu=0}^{\nu} p_{j\mu}(i,i+n+1) & (n=0)\\ \sum_{\mu=0}^{\nu}\sum_{k=(1+\nu)}^{N} p_{jk}(i,i+n)\,p_{k\mu}(i+n,i+n+1) & (1\leq n)\end{cases} \tag{12}$$

$$Q_{\nu|j}(i)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_{\nu|j}(i,i+n+1) \tag{13}$$

また，第i半旬の期首に貯水状態が通常状態 j ($(M+1)\leq j\leq N$) から，初めて渇水レベル(給水制限状態)ν, ($\nu=0,1,2,\ldots,M$)以下になるまでの条件付初到達時間 $W_{\nu|j}(i)$の3次までの原点周りの積率は次式で定義できる．この積率を用いれば条件付初到達時間の確率分布$H(W_{\nu|j}(i))$を3母数ガンマ分布等で近似することができる。

$$E[W_{\nu|j}(i)^r]=\sum_{n=0}^{\infty} Q_{\nu|j}(i,i+n+1)\cdot n^r/Q_{\nu|j}(i),\quad (r=1,2,3) \tag{14}$$

さらに，第i半旬の期首から($n+1$)半旬後に初めて渇水状態(給水制限状態)ν, ($\nu=0,1,2,\ldots,M$)以下に到達する初到達確率$Q_{\nu}(i)$は次式で与えられる.

$$Q_{\nu}(i)=\sum_{j=0}^{N} p_j(i)\,Q_{\nu|j}(i) \tag{15}$$

6. Sダムへの適用例

6.1 条　件

Sダムへの流入量，放流量及び貯水位の日単位の約20年間の観測データがある．Sダム下流に位置するもう一つのＩダム地点において利水需要量が年間を通して決められており，Ｉダムでこの利水需要量を満たすことが出来ない場合にその不足分をSダムより補給することになっている．そのために，Sダムの貯水量については，年間を通じて半旬単位で確保貯水量が設定されている．Sダムでは給水制限は新規用水に限定されるとし，その時期の確保貯水量に対する貯水量の割合 Rs が 50% 以下になって初めて給水制限 (Constrained) に入るとし，その節水率 fs は，①0.3<Rs ≦0.5;fs=0.3，②0.15<Rs ≦0.3; fs=0.6，③0<Rs ≦0.15; fs=0.75の3段階で変化するものとし，給水制限をしない場合 (Unconstrained) の分析結果も比較する.

したがって，Sダムの場合，放流量は下流のＩダムへの残流域からの流入量により決まるので，本適用例ではSダム放流量の観測データの各月平均と利水需要量の比を初期値として，理論による貯水量及び放流量の各月平均がそれぞれの観測値にほぼ等しくなるような，その比の各月最適値（12個）を，試算的に求める必要がある．なお,利水容量は洪水期（7月1日～10月10日） とそれ以外の非洪水期では異なり，分割数Ｎは,洪水期でN=39，非洪水期でN=41とし，満水状態は，（Ｎ+１）で表現する.

6.2 5日平均流量の和に対するWeibull分布の適合性

Sダム流域の約20年間の観測流量データを用い,月ごとに5日平均流入量の和の分布を検証すると，Fig.4 のようであり，実測値は Weibull 分布の理論曲線とほぼ一致していることが分かる.

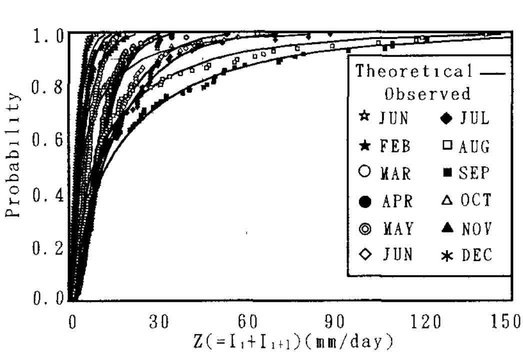

Fig.4 Distribution of sum of 5-day inflow

6.3 放流比の同定

6.1 に述べたように，Sダムからの放流比

Table 1 Identification of monthly release ratio f_d

Month	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_d	0.48	0.39	0.23	0.50	0.59	0.60	0.63	0.70	0.79	0.52	0.54	0.57

f_d(＝Ｓダムの放流量／利水需要量)を同定すれば，Table 1 のようである．これらの係数を用いて，(10)式により各半旬ごとの貯水量確率分布を求める．さらに，この確率分布を用いて，月平均貯水量及び月平均放流量を各月ごとに計算すれば，Fig. 5 のようになる．平均値の分布を正規分布と仮定し，両側 90%の信頼区間を併記すれば，理論値はいずれも実測値の90%の信頼区間に入っていることから，放流比 f_d の同定結果は妥当と判断できる．

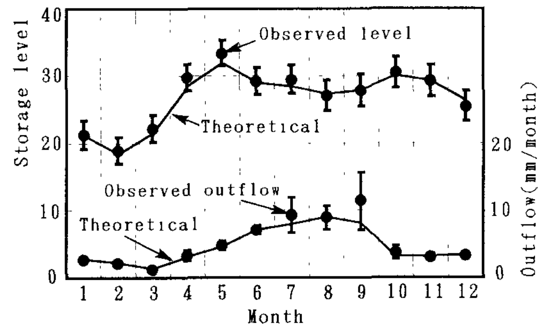

Fig. 5 Monthly averaged storage-level and outflow

6．4　初到達確率と条件付初到達時間

(15)式で定義される初到達確率を貯水レベル0%, 15%の場合について計算することにし，流入量の相関を考慮した場合（Considered）と無視した場合（Neglected），また，貯水レベルが確保貯水量の 50%以下になったとき，給水制限を実施する場合と給水制限を実施しない場合についての結果の内，それぞれの場合の年最大確率のみをTable 2 に示す．流入量相関を考慮し，給水制限を実施する場合は0, 15%レベルともほぼ実測値と一致していることが明らかである．また，給水制限をしない場合の空水確率年は4年程度となり，給水制限の場合の空水確率年(27年)に比べ極めて小さくなることが分かる．計画段階での貯水容量の決定には給水制限は考慮されていないはずであるから，Ｓダムの計画空水確率年は4, 5年程度であるという評価ができる．これに対して，渇水時に給水制限という非常時のダム管理•運用対策を実施することにより，空水確率年を約27年にまで伸ばすことができていることになる．また，もし流入量相関を無視した利水計画を立てれば，空水確率年は約50年となり，利水安全度を過大評価することが分かる．

Table 2 First passage probability

Correlation of inflows	First passage probability of					
	15% level			0% level		
	Obs	Con	Uncon	Obs	Con	Uncon
Considered	0.143	0.146	0.348	0.048	0.037	0.280
Neglected	0.143	0.100	0.302	0.048	0.020	0.230

notes ; Obs : Observed, Con : Constrained, Uncon : Unconstrained

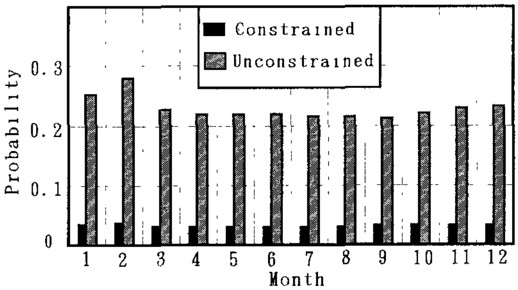

Fig. 6 Probability of first emptiness

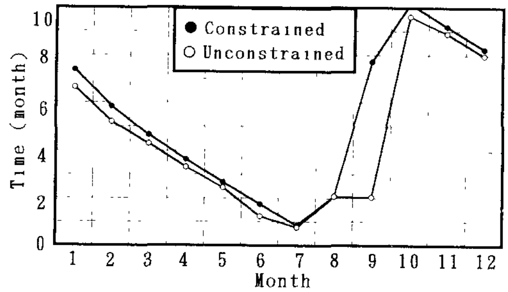

Fig. 7 Conditional time of first emptiness for the case of probability(H)=0.025

Fig.6 は,(15)式により，各月期首よりの空水確率を給水制限を実施する場合とそうでない場合を比較ものである．両者とも年間を通じて，2月から始まる場合の空水確率が最大となる．また,給水制限を実施する場合は，そうでない場合に比べ，空水確率は1桁小さくなっていることが明らかである．

次に，(14)式を用いて，各月初めの確保貯水量を初期条件に条件付空水到達時間 W_{01j} の平均，分散，歪み係数を計算した後，その確率分布 $H(W_{01j})$ を3母数ガンマ分布で近似し，非超過確率 H=0.025に対する W_{01j} 値を給水制限の有無別に図示すれば，Fig. 7 のようになる．当然のことながら，給水制限をすれば，しない場合に比べ，空水に至る初到達時間が長くなる．また，Ｓダムでの空水は主として,7月を中心とした6～8月で発生しやすいことが分かる．

6．5　平成６年渇水進行状況の理論的検証

Fig.8 に示すように，Ｓダムは平成6年6月初めほぼ確保貯水量状態にあったが，流域にほとんど降雨がなかったため，急激に貯水量が減少し，7月上旬に確保貯水量の50% を割り，第三次までの給水制限を段階的に実施したにもかかわらず，7月下旬に空水に至った．

このときの渇水進行状況を本理論の(14)式を用いて検証する．すなわち，6月1日の確保貯水量を初期条件として条件付初到達時間 $W_{\nu 1j}$ の平均，分散，歪み係数を計算し，その確率分布 $H(W_{\nu 1j})$ を3母数ガンマ分布で近似する．そして,確保貯水量の95，90,...,10，5，0%の各貯水レベルに対する非超過確率 $H(W_{\nu 1j})$ = 0.025，0.05に対する $W_{\nu 1j}$ 値を図示すれば，Fig. 8 のようになる．これらの理論線と平成6年渇水を比べると，平成6年渇水の深刻度は発生確率 H =0.025～0.05で進行したことが分かる．

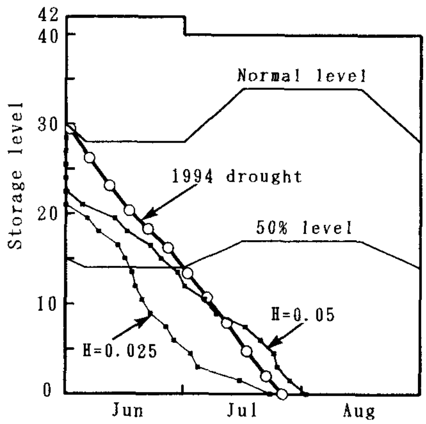

Fig. 8 An example of conditional first passage times beginning from June 1st

7．結論

相関連続流入量の確率分布を相関二変数の和の分布で表現することにより，貯水量に関する推移確率行列を比較的簡単に定式化することが可能となり，半旬単位の推移確率行列を用いて数値解析的に貯水量確率分布及び空水確率，条件付空水到達時間の積率を推定する実用的計算法を提案した．本理論を実際の貯水池に適用し，理論の妥当性を検証し，実用性が高いことを確認した．特に,平成6年渇水の渇水進行状況は条件付初到達時間の確率分布で良く説明できることが明らかとなった．

本理論は利水計画における新規ダムの必要貯水量の決定には勿論のこと，既設貯水池の渇水時のダム管理・運用についても，きめ細かい方策を検討するための有力な基礎的情報を提供するものと考える．

最後に，本研究は平成６，７年度河川整備基金（代表：端野道夫）による研究成果の一部であることを記し，謝意を表します．また，資料を頂戴した建設省四国地方建設局の関係者に感謝いたします．

参考文献

1）長尾正志：貯水池による水量制御の信頼性評価，水工学シリーズ 84-A-1.

2）鈴木正人・長尾正志 ：2段階推移モデルによる相関離散分布流量を受ける貯水池理論，土木学会論文集，Vol. 411, Ⅱ-12, 1989.

3） Suzuki, E. : Correlation analysis containing discrete variables used in certain meteorological problems, Papers in Meteorology and Geophysics, Vol. X, No. 1, pp. 10–30, 1966.

4）端野道夫：未公表（または，西岡昌秋：徳島大学修士論文，1992）.