貯留型流出モデルの確率応答に関する研究
−降雨量が互いに従属する場合−

Stochastic Response of Storage Function Model
-The Impact of Mutually Dependent Rainfall Input-

工藤睦言*・藤田睦博**・田中岳***・内島邦秀****
By Mutsunobu Kudo,Mutsuhiro Fujita,Gaku Tanaka and Uchijima Kunihide

Author derived the theoretical equations which provide the first four moments of discharge from storage function model under the assumption that rainfall input belongs to first order auto-regressive process. It is well known that auto-correlation function of first order auto-regressive process decreases exponentially or shows damped oscillation according to positive or negative regression coefficient. Consequently, these derived theoretical equations are grouped into two cases according to positive or negative coefficient. Finally,these equations are examined by Monte Carlo simulation method. This paper makes it clear that the above regression coefficient plays an important role in stochastic response .

Keywords: stochastic response, storage function, AR-process, random differential equation

1 はじめに

流出モデルの確率応答に関しては、Kinematic Wave モデルを取り扱った高棹、椎葉[1]、流出モデルの確率過程的評価法について論じた高棹、宝[2]、貯留型流出モデルを用いた藤田、工藤[3]らの研究がある。いずれの研究も降雨量を確率変数としたとき、流出量の確率特性について述べている。また、降雨量を時間的に独立な確率変数としている。

本論文は、貯留型の流出モデルにおいて降雨量が互いに従属する確率変数とした場合の流出量の確率応答について述べたものである。流出量の高次モーメントを導出するための微分方程式を導き、その妥当性をシミュレーション法によって検証した。本論文では、特に、実測降雨量の自己相関関数の解析に基づき、降雨量が1次の自己回帰過程に従うものとしている。周知のように、1次の自己回帰過程は回帰係数の正負によって、自己相関関数の形状が異なっている。ここでは、回帰係数が正負の二つの場合について、流出量の高次モーメントを与える理論式を誘導した。

2 基礎理論

本論文で採用したのは、次に示す最も簡単な貯留関数である。

$$\frac{dS}{dt}+q=r \quad , \quad S=Kq^{P} \tag{1}$$

S: 貯流量　q: 流出量　r: 降雨量　K,P: 定数

式(1)において降雨量が確率変数であるとき、貯留量と流出量もまた確率変数になる。今、これらの量を平均値と平均値からの偏差に分けて考える。

* 正会員 日本国土開発（株） 土木部長 （〒107 東京都港区赤坂 4-9-9）
** 正会員 工博 北海道大学教授 土木工学科 （〒060 札幌市北区北13条西8丁目）
*** 学生会員 北海道大学 大学院 （〒060 札幌市北区北13条西8丁目）
**** 正会員 工博 北見工業大学 土木開発工学科 助教授 （〒090 北見市公園町）

$$r=\bar{r}+\tilde{r} \quad , \quad S=\bar{S}+\tilde{S} \quad , \quad q=\bar{q}+\tilde{q} \tag{2}$$

式(1)より次式を得る。

$$\frac{dS}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^m S^m=r \quad , \quad m=\frac{1}{P} \tag{3}$$

ベキ乗型の確率変数 S^m に関して次の近似式を用いる。

$$S^m=\alpha\bar{S}+\beta\tilde{S} \tag{4}$$

Bras[4] らは、式(4)の両辺の誤差の平均値を0、2乗平均値を最小にする α,β として次式を提案している。

$$\alpha=\bar{S}^{m-1}\left\{1+\frac{1}{2}m(m-1)\frac{E(\tilde{S}^2)}{\bar{S}^2}+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\frac{E(\tilde{S}^3)}{\bar{S}^3}+\cdots\right\} \tag{5}$$

$$\beta=\frac{\bar{S}^{m+1}}{E(\tilde{S}^2)}\left\{m\frac{E(\tilde{S}^2)}{\bar{S}^2}+\frac{1}{2}m(m-1)\frac{E(\tilde{S}^3)}{\bar{S}^3}+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\frac{E(\tilde{S}^4)}{\bar{S}^4}+\cdots\right\} \tag{6}$$

式(2),(4)を式(3)に代入して次式を得る。

$$\frac{d(\bar{S}+\tilde{S})}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^m(\alpha\bar{S}+\beta\tilde{S})=\bar{r}+\tilde{r} \tag{7}$$

式(7)の両辺の期待値をとる。

$$\frac{d\bar{S}}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^m\alpha\bar{S}=\bar{r} \tag{8}$$

また、式(7)より式(8)を差し引くと次式が得られる。

$$\frac{d\tilde{S}}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\tilde{S}=\tilde{r} \tag{9}$$

式(9)の解は次式で与えられる。

$$\tilde{S}(t)=e^{-\int^{t}D\beta d\tau_1}\int_0^t\tilde{r}(\tau_2)e^{\int^{\tau_2}D\beta d\tau_3}d\tau_2 \quad , \quad D=\left(\frac{1}{K}\right)^m \tag{10}$$

式(10)の両辺を2〜4乗して期待値をとることにより貯留量の2〜4次モーメント(σ_S^2 , μ_{S3} , μ_{S4})が得られる。

$$\sigma_S^2=e^{-2\int^{t}D\beta d\tau_1}\int_0^t\int_0^t E\{\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\}e^{\int^{\tau_2}D\beta d\tau_4+\int^{\tau_3}D\beta d\tau_5}d\tau_2 d\tau_3 \tag{11}$$

$$\mu_{S3}=e^{-3\int^{t}D\beta d\tau_1}\int_0^t\int_0^t\int_0^t E\{\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\}\times e^{\int^{\tau_2}D\beta d\tau_5+\int^{\tau_3}D\beta d\tau_6+\int^{\tau_4}D\beta d\tau_7}d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \tag{12}$$

$$\mu_{S4}=e^{-4\int^{t}D\beta d\tau_1}\int_0^t\int_0^t\int_0^t\int_0^t E\{\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\tilde{r}(\tau_5)\}\times e^{\int^{\tau_2}D\beta d\tau_6+\int^{\tau_3}D\beta d\tau_7+\int^{\tau_4}D\beta d\tau_8+\int^{\tau_5}D\beta d\tau_9}d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \tag{13}$$

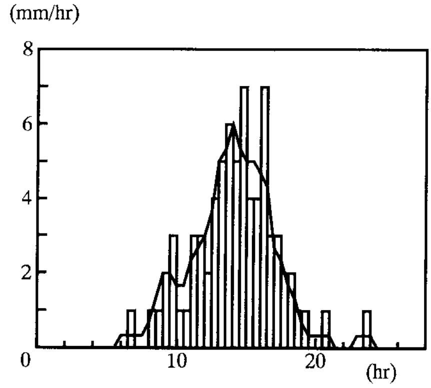

図-1　実測降雨時系列と3次の移動平均値

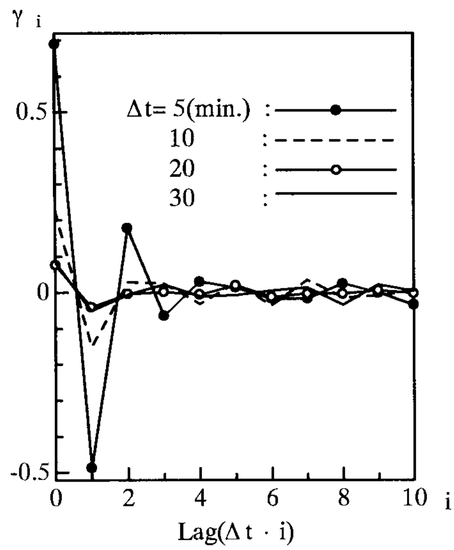

図-2　実測降雨の自己共分散関数

式(11)〜(13)を計算するには、$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}$、などのモーメントを与えなければならない。**図-1**は定山渓ダム流域における30分間降雨量の実測値を示している。降雨時系列は強い非定常性を示している。**図-1**の3次の移動平均値を平均値とし、実測値から移動平均値を差し引いた値を偏差として自己共分散関数を求めた。**図-2**は実測降雨時系列の時間間隔を変化させたときの自己共分散関数の計算結果の一例を示している。いずれの場合も、3次の移動平均値を降雨時系列の平均値としている。ここでは、**図-2**を参考にして観測降雨量R_tの自己共分散関数が、式(14)に示される1次の自己回帰過程モデルで記述される場合について扱う。

$$\tilde{R}_i=\rho\tilde{R}_{i-1}+N_i \tag{14}$$

$\tilde{R}_i$は$i\Delta t$時刻の観測雨量の平均値$\bar{R}_i$からの偏差を示す。Δtは観測降雨量の時間単位である。また、N_tは平均値0の互いに独立な確率変数で、その2～4次モーメントをσ_N^2, μ_{N3}, μ_{N4}とする。観測降雨量は、離散的な降雨量として定義されており、これを大文字のRで表し、式(1)～(13)に含まれる連続関数として定義される降雨量に関しては小文字のrを用いる。式(14)より次式が得られる。$\sigma_R^2, \mu_{R3}, \mu_{R4}$は、離散的降雨系列$R_i$の2～4次モーメントを示している。

$$\sigma_R^2=\frac{\sigma_N^2}{1-\rho^2} \tag{15}$$

$$\mu_{R3}=\frac{\mu_{N3}}{1-\rho^3} \tag{16}$$

$$\mu_{R4}=\frac{6\rho^2\sigma_N^2\sigma_R^2+\mu_{N4}}{1-\rho^4} \tag{17}$$

$$E\{\tilde{R}_i\tilde{R}_j\}=\sigma_R^2\rho^{i-j} \qquad i\geq j \tag{18}$$

$$E\{\tilde{R}_i\tilde{R}_j\tilde{R}_k\}=\mu_{R3}\rho^{i+j-2k} \qquad i\geq j\geq k \tag{19}$$

$$E\{\tilde{R}_i\tilde{R}_j\tilde{R}_k\tilde{R}_l\}=(\mu_{R4}-3\sigma_R^4)\rho^{i+j+k-3l}+\sigma_R^4(2\rho^{i+j-k-l}+\rho^{i-j+k-l}) \tag{20}$$

i, j, k, l: 整数

離散的な降雨量R_iは、次式を介して連続的な降雨量$r(t)$より求められる。

$$R_i=\frac{1}{\Delta t}\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} r(\tau)d\tau \tag{21}$$

偏差$\tilde{R}_i$に関しても式(21)と同様な式が成立している。

$$\tilde{R}_i=\frac{1}{\Delta t}\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \tilde{r}(\tau)d\tau \tag{22}$$

式(22)を用いて、次式を得る。

$$E\{\tilde{R}_i\tilde{R}_j\}=\frac{1}{\Delta t^2}\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t}\int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta} E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}d\tau_1 d\tau_2 \tag{23}$$

$$E\{\tilde{R}_i\tilde{R}_j\tilde{R}_k\}=\frac{1}{\Delta t^3}\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t}\int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta}\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\}\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{24}$$

$$E\{\tilde{R}_i\tilde{R}_j\tilde{R}_k\tilde{R}_l\}=\frac{1}{\Delta t^4}\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t}\int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta}\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t}\int_{(l-1)\Delta t}^{l\Delta t}\times E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\}d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \tag{25}$$

式(18)～(20)より式(23)～(25)の右辺が既知である。式(23)～(25)の積分方程式を解いて連続降雨量の一般化された2～4次モーメントを求める必要があるが、積分の範囲が$i\Delta t \sim (i-1)\Delta t$ (i;整数) となっているので、解析解を得ることは難しい。ここでは、式(23)～(25)の両辺を満足する簡単な関数を求めた。

2.1 ρ>0の場合

式(26)～(28)を仮定し、これらを式(23)～(25)に代入して未知定数γ, σ_{r1}^2, σ_{r2}^2などを求めた。

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}=\sigma_{r1}^2 e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2)}+\sigma_{r2}^2\delta(\tau_1-\tau_2) \tag{26}$$

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\}=\mu_{r31}e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2-2\tau_3)}+\mu_{r32}e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2)}\delta(\tau_2-\tau_3)+\mu_{r33}\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3) \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}
&E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\}=\mu_{r41}e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2+\tau_3-3\tau_4)}\\
&+\mu_{r42}e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4)}+\mu_{r43}e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2+\tau_3-\tau_4)}\\
&+\{e^{-\gamma(\tau_3-\tau_4)}\delta(\tau_1-\tau_2)+e^{-\gamma(\tau_1-\tau_4)}\delta(\tau_2-\tau_3)\\
&+\delta(\tau_3-\tau_4)e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2)}\}+\mu_{r45}\delta(\tau_3-\tau_4)e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2-2\tau_3)}\\
&+\mu_{r46}\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_3-\tau_4)+\mu_{r47}\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3)\\
&\times e^{-\gamma(\tau_1-\tau_4)}+\mu_{r48}\delta(\tau_2-\tau_3)\delta(\tau_3-\tau_4)e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2)}\\
&+\mu_{r49}\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3)\delta(\tau_3-\tau_4)
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$\delta(\tau)$：デルタ関数,　$\tau_1\geq\tau_2\geq\tau_3\geq\tau_4$

未知定数は以下のように与えられる。

$$\gamma=-\frac{\log\rho}{\Delta t},\ J_1=1-e^{-\gamma\Delta t},\ J_2=1-e^{\gamma\Delta t},\ J_3=1-e^{-2\gamma\Delta t}$$

$$J_4=1-e^{2\gamma\Delta t},\ J_5=1-e^{-3\gamma\Delta t},\ J_6=1-e^{3\gamma\Delta t}$$

$$J_7=e^{-\gamma\Delta t}-e^{\gamma\Delta t}+2\gamma\Delta t,\ J_8=1+e^{-\gamma\Delta t},\ J_9=1+e^{\gamma\Delta t}$$

$$\sigma_{r1}^2=\frac{-(\gamma\Delta t)^2\sigma_R^2}{J_1J_2},\quad \sigma_{r2}^2=\frac{\Delta tJ_7\sigma_R^2}{CJ_1J_2}$$

$$\mu_{r31}=\frac{2(\gamma\Delta t)^3\mu_{R3}}{J_2^2J_3},\quad \mu_{r32}=-\frac{\gamma^2\Delta t^3e^{\gamma\Delta t}\mu_{R3}}{CJ_4}$$

$$\mu_{r33}=\frac{\Delta t^2}{C^2}\left[1+3e^{\gamma\Delta t}\frac{\{\gamma\Delta t(1+e^{2\gamma\Delta t})+J_4\}}{J_2^2J_4}\right]\mu_{R3}$$

$$\mu_{r41}=-\frac{3(\gamma\Delta t)^4(\mu_{R4}-3\sigma_R^4)}{J_2^3J_5},\ \mu_{r42}=\frac{2(\gamma\Delta t)^4\sigma_R^4}{(J_1J_2)^2},\ \mu_{r43}=\frac{\mu_{r42}}{2}$$

$$\mu_{r44}=-\frac{\gamma^2\Delta t^3J_7\sigma_R^4}{C(J_1J_2)^2},\ \mu_{r45}=-\frac{2\gamma^3\Delta t^4(\mu_{R4}-3\sigma_R^4)}{Ce^{\gamma\Delta t}J_2J_5}$$

$$\mu_{r46}=\left(\frac{\Delta t}{C}\right)^2\left\{1+\frac{4(\gamma\Delta t-J_1)(\gamma\Delta t+J_2)}{(J_1J_2)^2}\right\}\sigma_R^4$$

$$\mu_{r47}=\frac{\gamma^2\Delta t^4}{C^2J_1J_2}(\mu_{r471}+\mu_{r472}+\mu_{r473}+\mu_{r474}-3\sigma_R^4)$$

$$\mu_{r471}=-\frac{6J_7\sigma_R^4}{J_1J_2^2}\ ,\ \mu_{r472}=\frac{6(2J_2+\gamma\Delta tJ_9)\sigma_R^4}{J_1J_2^2}$$

$$\mu_{r473}=-\frac{3(J_2+\gamma\Delta te^{\gamma\Delta t})J_7\sigma_R^4}{\gamma\Delta tJ_1J_2^2}\ ,\ \mu_{r474}=\frac{3(J_2+\gamma\Delta)J_7\sigma_R^4}{\gamma\Delta tJ_1J_2^2}$$

$$\mu_{r48}=\frac{\gamma^2\Delta t^4(\mu_{r481}+\mu_{r482}+\mu_{r483}+\mu_{r484}+\mu_{r485}+\mu_{r486}-\mu_{R4})}{C^2J_1J_2}$$

$$\mu_{r481}=\frac{3J_2(\mu_{R4}-3\sigma_R^4)}{J_6}\ ,\ \mu_{r482}=\mu_{r471}\ ,\ \mu_{r483}=\mu_{r472}$$

$$\mu_{r484}=\mu_{r474}\ ,\ \mu_{r485}=\mu_{r473}\ ,\ \mu_{r486}=-\mu_{r481}J_2$$

$$\mu_{r49}=-\left(\frac{\Delta t}{C}\right)^3(\mu_{r491}+\mu_{r492}+\mu_{r493}+2\mu_{r494}+\mu_{r495}+\mu_{r496}$$
$$+\mu_{r497}+\mu_{r498}+\mu_{r499}-\mu_{R4})$$

$$\mu_{r491}=-\frac{2(6\gamma\Delta t+2e^{-3\gamma\Delta t}-9e^{-2\gamma\Delta t}+18e^{-\gamma\Delta t}-11)(\mu_{R4}-3\sigma_R^4)}{J_2^3J_5}$$

$$\mu_{r492}=\frac{12\left\{2\gamma\Delta t(2e^{-\gamma\Delta t}+1)-J_1(5+e^{-\gamma\Delta t})\right\}\sigma_R^4}{(J_1J_2)^2}$$

$$\mu_{r493}=-\frac{12\left\{\gamma\Delta t(2e^{-\gamma\Delta t}+4-\gamma\Delta t)-6J_1\right\}\sigma_R^4}{(J_1J_2)^2}$$

$$\mu_{r494}=\frac{6\left\{\gamma\Delta t(2-\gamma\Delta t)-2J_1\right\}J_7\sigma_R^4}{\gamma\Delta t(J_1J_2)^2}\quad,\quad\mu_{r495}=\frac{2\mu_{r483}J_7}{\gamma\Delta tJ_2}$$

$$\mu_{r496}=\frac{6\left\{J_1(3-e^{-\gamma\Delta t})-2\gamma\Delta t\right\}(\mu_{R4}-3\sigma_R^4)}{e^{\gamma\Delta t}J_2J_5}\quad,\quad\mu_{r497}=\frac{3C^2\mu_{r46}}{\Delta t^2}$$

$$\mu_{r498}=\frac{4C^2(\gamma\Delta t-J_1)\mu_{r47}}{\gamma^2\Delta t^4}\quad,\quad\mu_{r499}=\frac{4C^2(\gamma\Delta t-J_1)\mu_{r48}}{\gamma^2\Delta t^4}$$

上式に含まれるCは時間の次元をもつ係数で、デルタ関数の積分から派生している。式(26)～(28)を式(23)～(25)に代入して、若干の計算の後次式を得る。

$$\frac{d\sigma_S^2}{dt}+2D\beta\sigma_S^2=2\sigma_{r1}^2U_1+C\sigma_{r2}^2 \tag{29}$$

$$\frac{d\mu_{S3}}{dt}+3D\beta\mu_{S3}=6\mu_{r31}U_2+3C\mu_{r32}U_4+C^2\mu_{r33} \tag{30}$$

$$\frac{d\mu_{S4}}{dt}+4D\beta\mu_{S4}=24\{\mu_{r41}U_5+\mu_{r42}U_8+\mu_{r43}U_{10}\}+12C\mu_{r44}\{U_{11}$$
$$+U_{12}+U_{13}\}+12C\mu_{r45}U_{15}+6C^2\mu_{r46}U_{14}+4C^2\{\mu_{r47}U_1 \tag{31}$$
$$+\mu_{r48}U_{17}\}+C^3\mu_{r49}$$

$$\frac{dU_1}{dt}+(\gamma+D\beta)U_1=1\quad,\quad\frac{dU_2}{dt}+(\gamma+2D\beta)U_2=U_3$$

$$\frac{dU_3}{dt}+(2\gamma+D\beta)U_3=1\quad,\quad\frac{dU_4}{dt}+(\gamma+2D\beta)U_4=1$$

$$\frac{dU_5}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_5=U_6\quad,\quad\frac{dU_6}{dt}+2(\gamma+D\beta)U_6=U_7$$

$$\frac{dU_7}{dt}+(3\gamma+D\beta)U_7=1\quad,\quad\frac{dU_8}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_8=U_9$$

$$\frac{dU_9}{dt}+2(\gamma+D\beta)U_9=U_1\quad,\quad\frac{dU_{10}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{10}=U_{11}$$

$$\frac{dU_{11}}{dt}+2D\beta U_{11}=U_1\quad,\quad\frac{dU_{12}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{12}=U_1$$

$$\frac{dU_{13}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{13}=U_{14}\ ,\quad\frac{dU_{14}}{dt}+2D\beta U_{14}=1$$

$$\frac{dU_{15}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{15}=U_{16}\ ,\quad\frac{dU_{16}}{dt}+2(\gamma+D\beta)U_{16}=1$$

$$\frac{dU_{17}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{17}=1 \tag{32}$$

式(8),(29)～(32)の連立微分方程式を解くことにより貯留量の1～4次モーメントが得られる。式(2),(4)より次の関係式が得られる。

$$q=\bar{q}+\tilde{q}=D(\alpha\bar{S}+\beta\tilde{S}) \tag{33}$$

従って、流出量の1～4次モーメントは次式で計算できる。

$$\bar{q}=D\alpha\bar{S}\quad,\quad\tilde{q}=D\beta\tilde{S}$$
$$\sigma_q^2=D^2\beta^2\sigma_S^2\ ,\ \mu_{q3}=D^3\beta^3\mu_{S3}\ ,\ \mu_{q4}=D^4\beta^4\mu_{S4} \tag{33}$$

$\rho\to 0$になるにともない、離散的降雨量$\tilde{R}_i$は独立な確率変数に漸近する。このとき、式(26)～(28)に含まれる係数γは$\gamma\to\infty$となる。連続的な降雨量$\tilde{r}(\tau)$が時間的に独立であるとき、式(26)～(28)の一般化された2～4次モーメントを次のように書くことができる。

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}=\sigma_r^2\delta(\tau_1-\tau_2) \tag{34}$$

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\}=\mu_{r3}\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3) \tag{35}$$

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\}=(\mu_{r4}-3\sigma_r^4)\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3)$$
$$\times\delta(\tau_3-\tau_4)+\sigma_r^4\{\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_3-\tau_4)+\delta(\tau_1-\tau_3) \tag{36}$$
$$\times\delta(\tau_2-\tau_4)+\delta(\tau_1-\tau_4)\delta(\tau_2-\tau_3)\}$$

σ_r^2 , μ_{r3} , μ_{r4}は、$\tilde{r}(\tau)$の2～4次モーメントである。一方、このとき式(22)の変換式を満たすσ_r^2 , μ_{r3} , μ_{r4}は、藤田らによって、次のように与えられている[3]。

$$\sigma_r^2=\frac{\Delta t}{C}\sigma_R^2\quad,\quad\mu_{r3}=\frac{\Delta t^2}{C^2}\mu_{R3}$$

$$\mu_{r4}=\left\{\mu_{R4}-\frac{3C^2\sigma_r^4}{\Delta t^2}\right\}\frac{\Delta t^3}{C^3}+3\sigma_r^4$$

$\gamma\to\infty$ にすることにより σ_{r2}^2 , μ_{r33} , μ_{r46} , μ_{r49} はそれぞれ、$\Delta t\sigma_R^2/C$, $\Delta t^2\mu_{R3}/C^2$, $\Delta t^2\sigma_R^4/C^2$, $(\mu_{R4}-3\sigma_R^4)\Delta t^3/C^3$ に漸近し、他の定数はすべて、0に近づく。従って、$\gamma\to\infty$ のとき式(26)〜(28)は式(34)〜(36)を満足していることになる。

2.2 $\rho<0$ の場合

ρ の正負にかかわらず、式(18)〜(20)の一般化された2〜4次モーメントは成立している。負の場合には、これらのモーメントは正負に振動することになる。理論解析の都合上、式(18)〜(20)を次のように表す。

$$E\{\tilde{R}_i\tilde{R}_j\}=\sigma_R^2|\rho|^{i-j}\cos\{\omega(i-j)\} \quad , \quad i\geq j \tag{40}$$

$$E\{\tilde{R}_i\tilde{R}_j\tilde{R}_k\}=\mu_{R3}|\rho|^{i+j-2k}\cos\{\omega(i+j-2k)\} \quad , \quad i\geq j\geq k \tag{41}$$

$$\begin{aligned}E\{\tilde{R}_i\tilde{R}_j\tilde{R}_k\tilde{R}_l\}&=(\mu_{R4}-3\sigma_R^4)|\rho|^{i+j+k-3l}\cos\{\omega(i+j+k-3l)\}\\&+\sigma_R^4[2|\rho|^{i+j-k-l}\cos\{\omega(i+j-k-l)\}\\&+|\rho|^{i-j+k-l}\cos\{\omega(i-j+k-l)\}] \ , \ \omega=\frac{\pi}{\Delta t} \ , \ i\geq j\geq k\geq l\end{aligned} \tag{42}$$

次に、式(26)〜(28)の一般化された2〜4次モーメントをどのように想定するかが問題となる。ここでは、$\rho\geq 0$ のときの式(26)〜(28)を参考に次式を与えた。

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}=\sigma_{r1}^2e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2)}\cos\{\epsilon(\tau_1-\tau_2)\}+\sigma_{r2}^2\delta(\tau_1-\tau_2) \tag{43}$$

$$\begin{aligned}E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\}&=\mu_{r31}e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2-2\tau_3)}\cos\{\epsilon(\tau_1+\tau_2-2\tau_3)\}\\&+\mu_{r32}e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2)}\delta(\tau_2-\tau_3)\cos\{\epsilon(\tau_1-\tau_2)\}\\&+\mu_{r33}\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3)\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}&E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\}\\&=e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2+\tau_3-3\tau_4)}\cos\{\epsilon(\tau_1+\tau_2+\tau_3-3\tau_4)\}\mu_{r41}\\&+e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4)}\cos\{\epsilon(\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4)\}\mu_{r42}\\&+e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2+\tau_3-\tau_4)}\cos\{\epsilon(\tau_1-\tau_2+\tau_3-\tau_4)\}\mu_{r43}\\&+\{e^{-\gamma(\tau_3-\tau_4)}\cos\{\epsilon(\tau_3-\tau_4)\}\delta(\tau_1-\tau_2)+e^{-\gamma(\tau_1-\tau_4)}\cos\{\epsilon(\tau_1-\tau_4)\}\\&\times\delta(\tau_2-\tau_3)+e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2)}\cos\{\epsilon(\tau_1-\tau_2)\}\delta(\tau_3-\tau_4)\}\mu_{r44}\\&+e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2-2\tau_3)}\cos\{\epsilon(\tau_1+\tau_2-2\tau_3)\}\delta(\tau_3-\tau_4)\mu_{r45}\\&+\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_3-\tau_4)\mu_{r46}\\&+e^{-\gamma(\tau_1-\tau_4)}\cos\{\epsilon(\tau_1-\tau_4)\}\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3)\mu_{r47}\\&+e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2)}\cos\{\epsilon(\tau_1-\tau_2)\}\delta(\tau_2-\tau_3)\delta(\tau_3-\tau_4)\mu_{r48}\\&+\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3)\delta(\tau_3-\tau_4)\mu_{r49}\end{aligned} \tag{45}$$

式(40)〜(42)を式(23)〜(25)に適用して、式(43)〜(45)に含まれる未知定数 σ_{r1}^2 , σ_{r2}^2 等を決定しなければならない。

$\epsilon=\{(2i-1)\pi\}/\Delta t$ (i は整数)であれば、式(23)〜(25)を満足する定数値を決定できる。ここでは、i=1 としたときの定数値を示している。

$$\begin{aligned}&I_1=\gamma^2+\omega^2 \ , \ I_2=\omega^2-\gamma^2 \ , \ I_3=2+e^{-\gamma\Delta t}+e^{\gamma\Delta t}=J_8J_9\\&I_4=\gamma^4+\omega^4-6\gamma^2\omega^2 \ , \ I_5=1+e^{-3\gamma\Delta t} \ , \ I_6=\gamma^3-3\gamma\omega^2\end{aligned} \tag{46}$$

$$\sigma_{r1}^2=\frac{(I_1\Delta t)^2\sigma_R^2}{I_2J_8J_9} \quad , \quad \sigma_{r2}^2=\frac{\Delta t\sigma_R^2}{C}\left\{1-\frac{2}{J_8J_9}\left(\frac{I_1\gamma\Delta t}{I_2}+J_8\right)\right\}$$

$$\mu_{r31}=\frac{2I_1^3\Delta t^3\mu_{R3}}{I_6J_3J_9^2} \quad , \quad \mu_{r32}=-\frac{\Delta t^3e^{\gamma\Delta t}I_1^2\mu_{R3}}{CI_2J_4}$$

$$\mu_{r33}=\left(\frac{\Delta t}{C}\right)^2\left[\mu_{R3}+\frac{3\mu_{r31}}{2\Delta tI_1^3}\{(3+e^{-\gamma\Delta t})I_6J_8+2\Delta tI_1I_2\}-\frac{3C\mu_{r32}}{\Delta t^3I_1^2}(\gamma\Delta tI_1+I_2J_8)\right]$$

$$\mu_{r41}=-\frac{3(\mu_{R4}-3\sigma_R^2)(\Delta tI_1)^4}{I_4I_5J_9^3} \ , \ \mu_{r42}=\frac{2\sigma_R^4(\Delta tI_1)^4}{I_4(J_8J_9)^2} \ , \ \mu_{r43}=\frac{\mu_{r42}}{2}$$

$$\mu_{r44}=\frac{\sigma_R^4-H_1\mu_{r43}}{H_2} \ , \ H_1=\frac{2J_8J_9(I_4J_8-\Delta tI_1I_6)}{(\Delta tI_1)^4} \ , \ H_2=\frac{CI_2J_8J_9}{\Delta t^3I_1^2}$$

$$\mu_{r45}=\frac{\mu_{R4}-3\sigma_r^4-\mu_{r41}H_3}{H_4} \quad , \quad H_3=\frac{(1-2e^{-\gamma\Delta t})I_4(J_8J_9)^2}{3(\Delta tI_1)^4}$$

$$H_4=\frac{CJ_3I_6J_9^2}{2\Delta t^4I_1^3} \quad , \quad \mu_{r46}=\left(\frac{\Delta t}{C}\right)^2(\sigma_R^4-\mu_{r43}H_5-2\mu_{r44}H_6)$$

$$H_5=\frac{4\{I_4J_8^2-2\Delta tI_1I_6J_8-(\Delta tI_1)^2I_2\}}{(\Delta tI_1)^4} \quad , \quad H_6=\frac{2C(\gamma\Delta tI_1+I_2J_8)}{\Delta t^3I_1^2}$$

$$\mu_{r47}=\frac{3\sigma_R^4-\mu_{r42}H_7-\mu_{r43}H_8-\mu_{r44}(H_9+H_{10})}{H_{11}}$$

$$H_7=-\frac{3(J_3I_4J_9+2\Delta tI_1I_6J_8)}{(\Delta tI_1)^4} \ , \ H_8=\frac{6(2I_4J_8J_9+\Delta tI_1J_2I_6J_8)}{(\Delta tI_1)^4}$$

$$H_9=\frac{3C(I_6J_8J_9+\Delta tI_1I_2J_9)}{\Delta t^4I_1^3} \ , \ H_{10}=-\frac{3C(I_6J_8J_9-\Delta tI_1I_2J_8)}{\Delta t^4I_1^3}$$

$$H_{11}=\frac{C^2I_2J_8J_9}{\Delta t^4I_1^2}$$

$$\mu_{r48}=\frac{\mu_{R4}-\mu_{r41}H_{12}-\mu_{r42}H_{13}-\mu_{r43}H_{14}-\mu_{r44}(H_{15}+H_{16})-\mu_{r45}H_{17}}{H_{18}}$$

$$H_{12}=-\frac{I_4J_8^3J_9}{(\Delta tI_1)^4} \ , \ H_{13}=H_7 \ , \ H_{14}=H_8 \ , \ H_{15}=H_{10}$$

$$H_{16}=H_9 \ , \ H_{17}=-\frac{3CI_6J_8^2J_9}{2\Delta t^4I_1^3} \ , \ H_{18}=\frac{C^2I_2J_8J_9}{\Delta t^4I_1^2}$$

$$\mu_{r49}=\left(\frac{\Delta t}{C}\right)^3\{\mu_{R4}-\mu_{r41}H_{19}-\mu_{r42}H_{20}-\mu_{r43}H_{21}-\mu_{r44}(2H_{22}+H_{23})$$
$$-\mu_{r45}H_{24}-3(C/\Delta t)^2\mu_{r46}-\mu_{r47}H_{25}-\mu_{r48}H_{26}\}$$

$$H_{19}=\frac{2\{6\Delta tI_1I_6-I_4J_8(2e^{-2\gamma\Delta t}+7e^{-\gamma\Delta t}+11)\}}{3(\Delta tI_1)^4}$$

$$H_{20}=\frac{6\{2\Delta tI_1I_6(1-2e^{-\gamma\Delta t})-I_4J_8(5-e^{-\gamma\Delta t})\}}{(\Delta tI_1)^4}$$

$$H_{21}=\frac{12\{(\gamma\Delta t)^2(\gamma^4-\omega^4+\gamma^2\omega^2)+6I_4J_8-2\Delta tI_1I_6(2+e^{-\gamma\Delta t})\}}{(\Delta tI_1)^4}$$

$$H_{22}=\frac{6C\{\gamma(\Delta tI_1)^2+2\Delta tI_1I_2+2I_6J_8\}}{\Delta t^4I_1^3}$$

$$H_{23}=-\frac{12C(\Delta tI_1J_1I_2+2I_6J_8)}{\Delta t^4I_1^3}$$

$$H_{24}=-\frac{3C\{2\Delta tI_1I_2+I_6J_8(3+e^{-\gamma\Delta t})\}}{\Delta t^4I_1^3}$$

$$H_{25}=\frac{4C^2(\gamma\Delta tI_1+I_2J_8)}{\Delta t^4I_1^2}\ ,\ H_{26}=H_{25}$$

従って、貯留量の2~4次モーメントに関する微分方程式を得ることができる。

$$\frac{d\sigma_S^2}{dt}+2D\beta\sigma_S^2=2\{U_{18}\cos(\omega t)+U_{19}\sin(\omega t)\}+C\sigma_{r2}^2 \quad (47)$$

$$\frac{d\mu_{S3}}{dt}+3D\beta\mu_{S3}=6\{\cos(\omega t)(U_{22}+U_{25})-\sin(\omega t)(U_{23}-U_{24})\}$$
$$+3C\{\cos(\omega t)U_{26}+\sin(\omega t)U_{27}\}+C^2\mu_{r33} \quad (48)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mu_{S4}}{dt}+4D\beta\mu_{S4}=24\{(\cos(\omega t)(U_{34}-U_{37}+U_{39}+U_{40}\\&+U_{48}+U_{51}+U_{53}-U_{54}+U_{62}+U_{65}-U_{67}+U_{68})\\&-\sin(\omega t)(U_{35}+U_{36}-U_{38}+U_{41}+U_{49}-U_{50}-U_{52}\\&-U_{55}-U_{63}+U_{64}-U_{66}-U_{69})\}+12C\{U_{72}+U_{73}\\&\quad+\cos(\omega t)(U_{74}+U_{77}+U_{81}+U_{84})\\&+\sin(\omega t)(U_{75}+U_{78}-U_{82}+U_{83})\}+6CU_{85}+4C^2\\&\times\{\cos(\omega t)(U_{86}+U_{88})+\sin(\omega t)(U_{87}+U_{89})\}+\mu_{r49}\end{aligned}\right\}(49)$$

$$\frac{dU_{18}}{dt}+(\gamma+D\beta)U_{18}=\sigma_{r1}^2\cos(\omega t)$$

$$\frac{dU_{19}}{dt}+(\gamma+D\beta)U_{19}=\sigma_{r1}^2\sin(\omega t)$$

$$\frac{dU_{20}}{dt}+(2\gamma+D\beta)U_{20}=\mu_{r31}\cos(2\omega t)$$

$$\frac{dU_{21}}{dt}+(2\gamma+D\beta)U_{21}=\mu_{r31}\sin(2\omega t)$$

$$\begin{cases}\dfrac{dU_{2j+16}}{dt}+(\gamma+2D\beta)U_{2j+16}=U_{j+17}\cos(\omega t)\\ \dfrac{dU_{2j+17}}{dt}+(\gamma+2D\beta)U_{2j+17}=U_{j+17}\sin(\omega t)\ ,\ j=1,2\end{cases}$$

$$\frac{dU_{26}}{dt}+(\gamma+2D\beta)U_{26}=\mu_{r32}\cos(\omega t)$$

$$\frac{dU_{27}}{dt}+(\gamma+2D\beta)U_{27}=\mu_{r32}\sin(\omega t)$$

$$\frac{dU_{28}}{dt}+(3\gamma+D\beta)U_{28}=\mu_{r41}\cos(3\omega t)$$

$$\frac{dU_{29}}{dt}+(3\gamma+D\beta)U_{29}=\mu_{r41}\sin(3\omega t)$$

$$\begin{cases}\dfrac{dU_{2j+28}}{dt}+2(\gamma+D\beta)U_{2j+28}=U_{j+27}\cos(\omega t)\\ \dfrac{dU_{2j+29}}{dt}+2(\gamma+D\beta)U_{2j+29}=U_{j+27}\sin(\omega t)\ ,\ j=1,2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dU_{2j+28}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{2j+28}=U_{j+27}\cos(\omega t)\\ \dfrac{dU_{2j+29}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{2j+29}=U_{j+27}\sin(\omega t)\ ,\ j=3\sim6\end{cases}$$

$$\frac{dU_{42}}{dt}+(\gamma+D\beta)U_{42}=\mu_{r42}\cos(\omega t)$$

$$\frac{dU_{43}}{dt}+(\gamma+D\beta)U_{43}=\mu_{r42}\sin(\omega t)$$

$$\begin{cases}\dfrac{dU_{2j+42}}{dt}+2(\gamma+D\beta)U_{2j+42}=U_{j+41}\cos(\omega t)\\ \dfrac{dU_{2j+43}}{dt}+2(\gamma+D\beta)U_{2j+43}=U_{j+41}\sin(\omega t)\ ,\ j=1,2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dU_{2j+42}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{2j+42}=U_{j+41}\cos(\omega t)\\ \dfrac{dU_{2j+43}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{2j+43}=U_{j+41}\sin(\omega t)\ ,\ j=3\sim6\end{cases}$$

$$\frac{dU_{56}}{dt}+(\gamma+D\beta)U_{56}=\mu_{r43}\cos(\omega t)$$

$$\frac{dU_{57}}{dt}+(\gamma+D\beta)U_{57}=\mu_{r43}\sin(\omega t)$$

$$\begin{cases}\dfrac{dU_{2j+56}}{dt}+2\gamma U_{2j+56}=U_{j+55}\cos(\omega t)\\ \dfrac{dU_{2j+57}}{dt}+2\gamma U_{2j+57}=U_{j+55}\sin(\omega t)\ ,\ j=1,2\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dU_{2j+56}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{2j+56}=U_{j+55}\cos(\omega t) \\
\dfrac{dU_{2j+57}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{2j+57}=U_{j+55}\sin(\omega t)\ ,\ j=3\text{~}6
\end{cases}
$$

$$\frac{dU_{70}}{dt}+(\gamma+D\beta)U_{70}=\mu_{r44}\cos(\omega t)$$

$$\frac{dU_{71}}{dt}+(\gamma+D\beta)U_{71}=\mu_{r44}\sin(\omega t)$$

$$\frac{dU_{72}}{dt}+2D\beta U_{72}=U_{70}\cos(\omega t)$$

$$\frac{dU_{73}}{dt}+2D\beta U_{73}=U_{71}\sin(\omega t)$$

$$\frac{dU_{74}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{74}=U_{70}\ ,\quad \frac{dU_{75}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{75}=U_{71}$$

$$\frac{dU_{76}}{dt}+2D\beta U_{76}=\mu_{r44}$$

$$\frac{dU_{77}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{77}=U_{76}\cos(\omega t)$$

$$\frac{dU_{78}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{78}=U_{76}\sin(\omega t)$$

$$\frac{dU_{79}}{dt}+2(\gamma+D\beta)U_{79}=\mu_{r45}\cos(2\omega t)$$

$$\frac{dU_{80}}{dt}+2(\gamma+D\beta)U_{80}=\mu_{r45}\sin(2\omega t)$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dU_{2j+79}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{2j+79}=U_{j+78}\cos(\omega t) \\
\dfrac{dU_{2j+80}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{2j+80}=U_{j+78}\sin(\omega t)\ ,\ j=1,2
\end{cases}
$$

$$\frac{dU_{85}}{dt}+2D\beta U_{85}=\mu_{r46}$$

$$\frac{dU_{86}}{dt}+(\gamma+D\beta)U_{86}=\mu_{r47}\cos(\omega t)$$

$$\frac{dU_{87}}{dt}+(\gamma+D\beta)U_{87}=\mu_{r47}\sin(\omega t)$$

$$\frac{dU_{88}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{88}=\mu_{r48}\cos(\omega t)$$

$$\frac{dU_{89}}{dt}+(\gamma+3D\beta)U_{89}=\mu_{r48}\sin(\omega t) \tag{50}$$

3　シミュレーション法による理論解の検証

式(23)～(25)の連続的な降雨量に関する一般化され高次モーメント $E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\},\cdots,E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\}$ 等を求めるにあたって、$\rho>0$ とき式(26)～(28)、$\rho<0$ のとき式(43)～(44)を仮定している。これらの仮定が妥当であるかを、シミュレーション法を用いて検証する。ミュレーション法の手順を以下に示す。

1) 式(14)中の N_i の確率密度関数と相関係数 ρ の値を設定し、$\tilde{R}_i$ を発生する。ここでは、N_i の確率密度関数として次の指数分布を採用し、そのモーメントを以下に示す。

$$f(N)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(N+\frac{1}{\lambda})} & N\geq-\dfrac{1}{\lambda} \\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

$$E(N)=0\ ,\quad \sigma_N^2=\frac{1}{\lambda^2}\ ,\quad \mu_{N3}=\frac{2}{\lambda^3}\ ,\quad \mu_{N4}=\frac{9}{\lambda^4}$$

2) 平均値 $\bar{R}_i$ を定め、$\tilde{R}_i$ と $\bar{R}_i$ から R_i 系列を求め、これを時間間隔 Δt の降雨系列と考えて、式(1)の r に代入し、式(1),(2)を解いて $q(t)$ を計算する。

3) 上述した1),2)を繰り返し、時刻ごとに流出量の1～4次モーメントを求める。

一方、理論解の計算手順は以下の通りである。

1)　式(15)-(17)の $\sigma_R^2,\mu_{R3},\mu_{R4}$ 計算。

2)　$\rho>0$ の場合、式(26)～(28)の定数値を求め、式(29)～(32)の連立微分方程式を解く。式(34)より、流出量の１～４次モーメントが得られる。

3)　$\rho<0$ の場合、式(43)～(45)の定数値を求め、式(47)～(50)の連立微分方程式を解く。式(34)より、流出量の１～３次モーメントが得られる。

次式で表される平均降雨量が矩形降雨波で、シミュレーションを行った。繰り返し回数は、10,000回である。

$\bar{R}=5(mm/hr)$　,　$\Delta t=0.5(hr)$　,　$\rho=-0.1\text{~}0.2$
$\lambda=1(hr/mm)$　,　$T_R=8(hr)$　,　$K=5$　,　$P=0.5$

また、上述の条件で理論計算を行った。シミュレーション値と理論値を比較した結果を**図-3**に示す。図において実線はシミュレーション値を、破線は理論値を示している。$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)\}\text{~}E\{\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)\tilde{R}(\tau_3)\tilde{R}(\tau_4)\}$ などを式(26)～(28)、(43)～(45)にのように関数形を仮定したが、仮定した関数形はほぼ妥当と思われる。

4　まとめ

図-4は、式(15)～(17)において $\sigma_R^2,\mu_{R3},\mu_{R4}$ を一定値として、回帰係数 ρ を変化させた場合の流出量の2～4次モーメントを示している。ρ が増加するに伴って流出量の2～4次モーメントが増加している。すなわち、降雨量を独立な時系列と考えるか、互いに従属する時系列と考えるかにより、流出量の2～4次モーメントが異なることになる。次に、仮定した式(26)～(28),(43)～(45)であるが、

これらは式(23)～(25)を満足している。ρ<0の場合、式(46)に示すように、I_2,I_4が係数σ_{r1}^2,σ_{r2}^2などの分母に表れる。I_2,I_4は、$\gamma=\omega$,$\gamma=\sqrt{3}\omega$で、0になるので式(43)～(45)を定義できない場合もある。ρ>0の場合の式(26)～(28)と異なり、ρ<0の場合の式(43)～(45)に適用限界が存在していることになる。

参考文献

1) 高棹琢馬、椎葉充晴：状態空間法による流出予測-Kinematic Wave法を中心として-、京都大学防災研究所年報、第23号、B-2,211-226,1980

2) 高棹琢馬、宝 馨、楠橋康弘：洪水流出モデルの確率過程的評価に関する研究、京都大学防災研究所年報、第28号,B-2,221-235,1985

3) 藤田睦博、工藤睦言、中尾隆志、橋本識秀：貯留型流出モデルの確率応答に関する研究-降雨が時間的に独立な確率過程の場合-、土木学会論文集 No.515,Ⅱ-31,1-11,1995

4) Brac,R.L and Georgakakos, K.P.(1980) " Real time nonlinear filtering techniques in streamflow forecasting: A statistical linearization approch", Third InternationalSymposium on Stochastic Hydraulics, 95-105

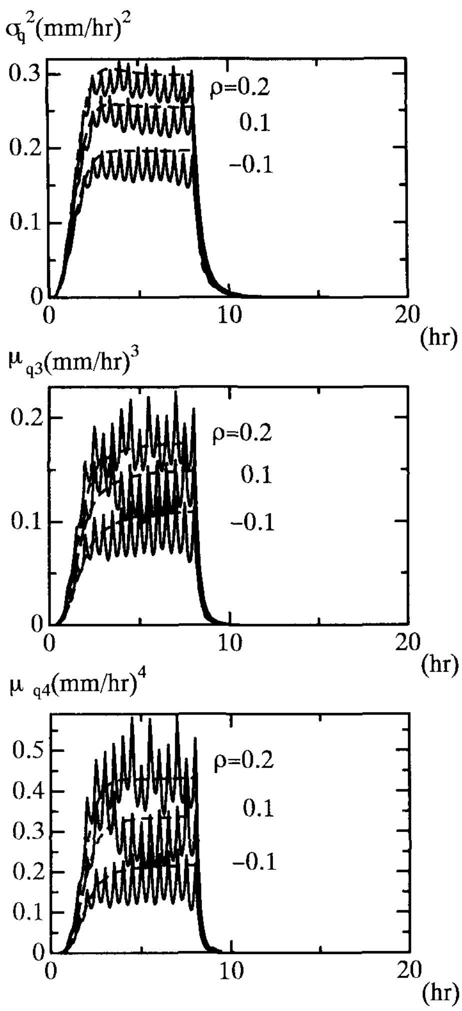

図-3 シミュレーション法による検証
(実線はシミュレーション値、破線は理論値を示す。)

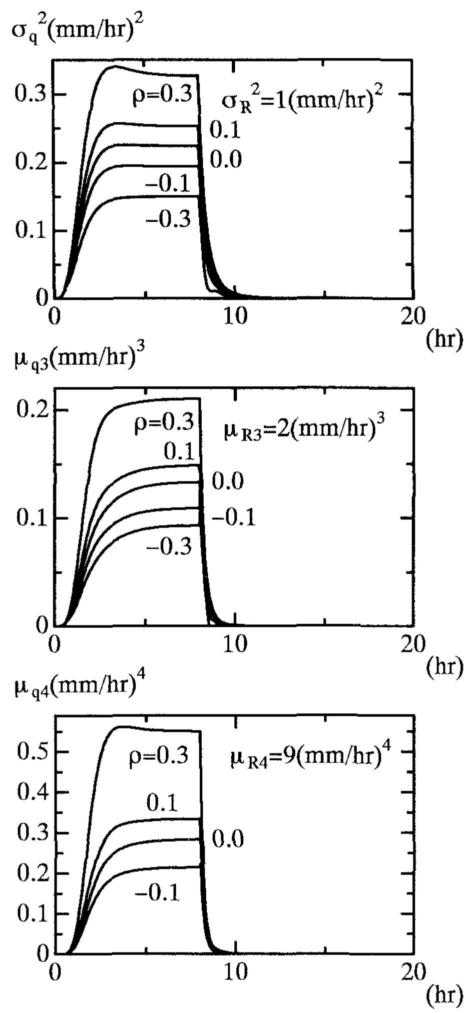

図-4 σ_R^2,μ_{R3},μ_{R4}が一定の場合の流出量の2～4次モーメント