

進行波による乱流底面境界層のstreamingについて

ON THE STREAMING IN A TURBULENT BOUNDARY LAYER INDUCED BY A PROGRESSIVE WATER WAVE

シャムスル アラム チョート^{*}・ハリー^{*}・佐藤道郎^{**}

By Shamsul Alam CHOWDHURY・Michio SATO

The characteristics of the streaming are presented by considering the closure scheme based on one equation model in the turbulent boundary layer, where the Stokes' second order irrotational velocity profile is adopted at the upper boundary as the boundary condition along with the Batchelor's condition for the streaming. The calculated profile is compared with the existing analytical results based on zero equation models and the experimental data of van Doorn (1981).

It is shown that the streaming velocity profiles differ from condition to condition of the relative depth, but the dependence on the roughness is weak.

Key words : wave boundary layer, streaming velocity, mass transport

1. 序 論

波浪の減衰や海岸における底質の移動現象に対する理解を深めていく上で波動運動によって底面付近に生じる境界層での流れの把握が重要である。波動境界層では流れ方向の流速変化が存在し、振動流成分の他に平均流(streamingと呼ばれる)が生じて、波の有限振幅性を考慮した場合に生じる波の峰と谷の位相における流速の非対称性と共に底質の netの移動量と方向に影響することが考えられる。

そのstreamingと水平ならびに鉛直方向の速度勾配の存在に起因する水粒子の一周期平均の残留速度は境界層における質量輸送(mass transport)を与える。層流境界層の質量輸送については Longuet-Higgins(1953)¹⁾によって理論解が得られており、境界層外縁での振動流速の基本波成分の振幅を u_∞ 、波速を c としたとき、streamingと質量輸送の外縁での大きさはそれぞれ $0.75u_\infty^2/c$ 、 $1.25u_\infty^2/c$ で与えられ、その向きは波の進行方向である。

境界層における質量輸送速度が染料の動きにより調べられ、条件によって理論解より小さくなることが見出された。そして、これは層流から乱流への遷移として理解された(Collins(1963)²⁾、Brebner et al.(1966)³⁾。

ところが、Johns (1970)⁴⁾ および Noda (1970)⁵⁾ は乱流境界層についてレイノルズ応力を高さの関数で時間変化しない渦動粘性係数を用いて表し、質量輸送速度を計算した結果、進行波ではLonguet-Higgins (1958)⁶⁾ が予想した層流の場合と同様な結果となった。

さらに、実験の理論からのずれは必ずしも層流から乱流への遷移によるものではなく、層流の理論

^{*} 学生会員

工修 鹿児島大学大学院 連合農学研究科 水産資源科学専攻

^{**} 正会員

工博 鹿児島大学教授 工学部海洋土木工学科

〒890 鹿児島市郡元1丁目21-40 鹿児島大学工学部海洋土木工学科

のもっと高次までの計算やクノイド波の層流境界層の計算結果で説明できること、また、乱れはなくても底面粗度は質量輸送速度を減少させることなどが示された(Sleath(1972, 1973)^{7,8}、Isaacson(1976a,b, 1978)^{9,10,11}、Dore(1982)¹²)。

これらの研究の流れは、進行波の質量輸送は乱流でも層流解と同様で、境界層の流れの層流解からのずれは層流理論の枠内で説明されるものであるかの印象を与えるものであった。

しかし、その後Trowbridge & Madsen(1984)^{13,14}は Stokes 波の第2次近似解による速度成分を外縁流速としてもつ乱流境界層の流れについて、高さで変化する渦動粘性係数を仮定し、streaming velocityを求めた。また、Jacobs(1984)¹⁵は Saffman の乱流モデルを用いて滑面乱流の場合の境界層外縁におけるstreaming velocityの漸近解を得た。彼らの計算によれば、その平均流速は相対水深が小さくなるにつれ次第に小さくなり、やがて平均流成分の向きが逆になり得ること、その変化は粗度に依存することが示されている。

これらの結果は、先述の Johns(1970)や Noda(1970)の結果とは異なり、層流から乱流への遷移によっても質量輸送の層流解からのずれが生じることを示している。さらに、最近の Ou & Hsu (1994)¹⁶の計算も同様な結果を与えている。

だが、Jacobs (1984)の研究は境界層外縁での平均流速の大きさの変化に関心が向けられ、境界層内部での streaming の速度分布がどう変化するかといった点については触れられていない。また、Trowbridge & Madsen (1984)や Ou & Hsu (1994)の計算は渦動粘性係数の仮定に任意性を含んだ計算であり、両者の間では底面粗度との関係でかなりの相違がある。その後、乱流の輸送方程式に基づく有限振幅波による乱流境界層理論の数値計算も行われているものの、この streaming のことには触れられていない。

本論文は、波による粗面乱流境界層の乱流輸送方程式モデルを用いた計算結果に基づき streaming の特性に焦点を絞り考察を加えたものである。

2. 基礎式と計算の概要

運動は2次元とし、静水面に沿って波の進行方向に X 軸、鉛直上向きに Z 軸を取って、次式で表される進行波により深さ $z = -h$ の水平な底面上に形成される境界層の流れを考える。

$$\zeta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t) + \frac{H^2}{16} k \frac{\cosh kh (\cosh 2kh + 2)}{\sinh^3 kh} \cos 2(kx - \sigma t) \quad (1)$$

ここに、 ζ は水位、 H は波高、 k は波数($k = 2\pi/L$ 、 L : 波長)、 σ は角周波数($k = 2\pi/T$ 、 T : 波長)を表す。

$z = -h$ 付近で厚さ δ ($\ll h$) の境界層外縁流速を U とすると

$$U = u_{\infty} \{ \cos(kx - \sigma t) + \gamma \cos 2(kx - \sigma t) \} \quad (2)$$

$$u_{\infty} = \frac{H\sigma}{2 \sinh kh} = \frac{a\sigma}{\sinh kh} \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{3Hk}{8 \sinh^3 kh} = \frac{3ak}{4 \sinh^3 kh} \quad (4)$$

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (5)$$

ここに、 g は重力加速度である。境界層方程式は $-h < z < -h + \delta$ で

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (6)$$

で表され、鉛直方向流速成分は非圧縮の条件

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

により $\bar{u}$ と関連づけられる。 $(\bar{u}, \bar{w})$ は乱れについて平均した軌道流速成分、 τ はせん断応力を表す。(6)式右辺の最初の2つの項は境界層外縁流速をStokes波の第2近似の底面流速で与えることにすれば

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \sigma u_{\infty} \left\{ \sin \theta - \left(\frac{u_{\infty}}{2c} - 2\gamma \right) \sin 2\theta \right\} \quad (8)$$

で表される。ただし、 $\theta = kx - \sigma t$ 、 c は波の位相速度である。右辺の τ は発達した乱流ではレイノルズ応力

$$\tau = -\rho \overline{u'w'} \quad (9)$$

で表される。ここに、 ρ は密度、 (u', w') は乱れ速度の成分、上付きの横線は乱れに関する平均を表す。このレイノルズ応力は渦動粘性係数 ν_T により次式で波の平均水平軌道流速成分と関連づけられる。

$$-\overline{u'w'} = \nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (10)$$

この ν_T の決定に当たり、乱れの特性速度を $\bar{b}^{1/2}$ 、特性長を l として ν_T は次元的に

$$\nu_T = l \bar{b}^{1/2} \quad (11)$$

で表される。 $\bar{b}$ は乱れのエネルギーを表すが、これを(12)式の輸送方程式により、 l を(13)式で与える1方程式モデル (Launder & Spalding, 1972)¹⁷⁾ が本研究では用いられる。

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{b}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} = (-\overline{u'w'}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\overline{w' \left(\frac{p'}{\rho} + b' \right)} \right\} - \epsilon \quad (12)$$

$$l = c_D^{1/4} \kappa (z + h) \quad (13)$$

ここで、 p' は乱れによる圧力変動、 $c_D = 0.08$ 、 $\kappa = 0.4$ (Karman 定数) である。(12)式右辺第2項の乱れの再配分項は運動量交換と同じ交換係数を用いて(14)式で表され、散逸項 ϵ は(15)式で与えられるものと仮定する。

$$-\overline{w' \left(\frac{p'}{\rho} + b' \right)} = \nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (14) \quad \epsilon = \frac{c_D \bar{b}^{3/2}}{l} = \frac{c_D^{3/4} \bar{b}^{3/2}}{\kappa (z + h)} \quad (15)$$

2方程式モデルによる乱流境界層の計算も行われているが、Justesen(1991)¹⁸⁾ は1方程式モデルと2方程式モデル ($k-\epsilon$ モデル) による計算の比較から、波による底面乱流境界層の解析では2方程式モデルの方がいくぶん良いものの、それは偏微分方程式が2つになったことによる複雑さを償うほどのものではないことを指摘している。また、後述する本研究でとった解法では2方程式モデルでは計算上の負担がかなり増えることもあり、まずは、1方程式モデルを用いることとした。

下側の境界条件は粗面乱流のみを対象とし粗度高さを $z_0 (= k_b / 30, k_b: \text{Nikradse の粗度係数})$ として

$$z = -h + z_0 \quad \text{で} \quad \bar{u} = 0 \quad \bar{b} = \nu_T \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| / c_D^{1/2} \quad \epsilon = \frac{c_D^{3/4} \bar{b}^{3/2}}{\kappa z_0} \quad (16a, b, c)$$

境界層の外縁での境界条件は

$$z = -h + \delta \quad \text{で} \quad \bar{u} - \bar{u}_{mean} = \bar{u}_{stokes} \quad d\bar{u}_{mean}/dz = 0 \quad d\bar{b}/dz = 0 \quad (17a,b,c)$$

境界層内部の振動流成分は外縁の運動により決まるが、外縁での streaming は層内の運動により生じ、前もって決まっているものではないため、その大きさを与えることはできない。したがって、streaming に対する外側の条件は (17b) のように与えざるをえない (Batchelor)¹⁹。ただ、解析解を求める場合には $\bar{u}_{mean}$ を未知の量としてもう一つ条件を与えることも考えられ、Jacobs(1984)や Ou & Hsu (1994) は底面摩擦による波エネルギー減衰の二つの表現を等置し $\bar{u}_{mean}$ を求めている。

ところで、(17)の条件を満足させるためには解は定常流成分である streaming と振動流成分とに分離されていると便利である。そこで、速度成分 $\bar{u}$ 、乱れエネルギー $\bar{b}$ の x 方向の周期性を仮定して次のように表す(Johns(1977)²⁰, Watson(1960)²¹)。

$$\bar{u}(x, z, t) = \sum_{p=-m}^m \bar{C}_p(z, t) e^{ipx} \quad (18) \quad \bar{b}(x, z, t) = \sum_{p=-m}^m \bar{D}_p(z, t) e^{ipx} \quad (19)$$

ここに、 $i = \sqrt{-1}$ 。(18)式を(7)式に代入して $\bar{C}_p$ による $\bar{w}$ の表現が得られる。その $\bar{w}$ と(18)式の $\bar{u}$ を(6)式に代入し、(8)式右辺の $\sin$ 関数の項は $kx = \hat{x}$, $\sigma t = \hat{t}$ において

$$\sin(\hat{x} - \hat{t}) = -i(e^{-i\hat{t}} \cdot e^{i\hat{x}} - e^{i\hat{t}} \cdot e^{-i\hat{x}})/2 \quad \sin 2(\hat{x} - \hat{t}) = -i(e^{-i2\hat{t}} \cdot e^{i2\hat{x}} - e^{i2\hat{t}} \cdot e^{-i2\hat{x}})/2$$

で表されることを考慮し、 e^{ipx} 毎にまとめて $\bar{C}_p$ に関する $2m+1$ 個の方程式が得られる。しかし、 $\bar{C}_p$ と $\bar{C}_{-p}$ は複素共役であるので計算に必要なのは $m+1$ 個である。

さらに(12)式に(10)式ならびに(14)式を代入して得られる式

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{b}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} - \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) - \varepsilon \quad (12)'$$

に $\bar{u}$ 、 $\bar{w}$ と共に(19)式を代入して $\bar{D}_p$ に関する方程式が得られる。ところが、これらの式中の ν_T は (11)式より $\bar{b}^{1/2}$ を、 ε は(15)式より $\bar{b}^{3/2}$ を含んだ表現となっている。そこで、 $\bar{b}^{1/2}$ と $\bar{b}^{3/2}$ はフーリエ級数で表して(6)、(12)'式に代入し展開している。こうして得られた方程式系は z と t の方程式で、時間 t については前進差分、鉛直座標 z に関しては中央差分 (FTCS) で差分化し計算を行った。

実際の計算にあたっては方程式を無次元化し、鉛直座標 z の代わりに底面に近いほど計算の格子点間隔が小さくなるような変数に変換し、計算を行っている。 $\bar{b}^{1/2}$ と $\bar{b}^{3/2}$ のフーリエ係数の計算は FFT を用いた。時間刻みは波 1 周期の $1/7200$ 、鉛直方向には 40 分割し、境界層内の流れが収束する 20~30 周期にわたって計算した。層内の流速分布は数周期程度でそれらしい形になるが streaming が一定の分布に収束するにはこの程度の計算を要した。ここでの計算は $m=2$ の場

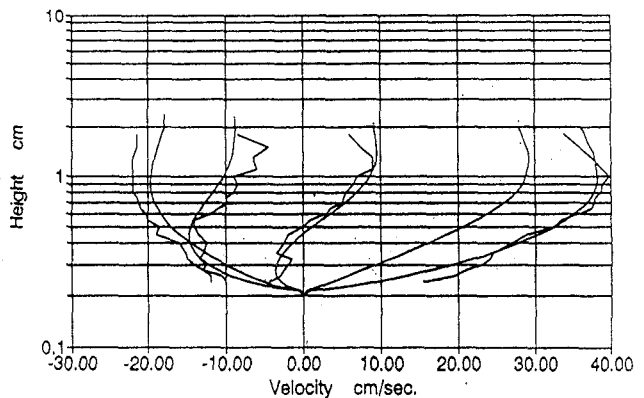


図 1. 境界層内流速分布の計算値と van Doorn の実験値(折れ線)との比較

合のものである。したがって、それほど厳密解というわけではなく、高々、Stokes 波の二次近似の計算である。

3. 計算結果

3-1. 乱流境界層内の流れ

本計算法で波動乱流境界層の流れをどの程度表現できるか見るために既存のデータと比較した。

振動乱流境界層流れについては振動流発生装置により境界層外縁の水粒子運動に大きな往復運動を与えて LDV(レーザードップラー流速計)による綿密な計測が行われてきているが (Sleath,1987²²), Jensen, Sumer and Fredsøe, 1989²³) 等)、波の底面境界層については van Doorn & Godefroy(1978)²⁴), van Doorn(1981)²⁵)および浅野・岡本・岩垣(1983)²⁶)により造波水路で測得されたデータしか見当たらなかった。これらのデータとの比較を行ったが、データの詳細が与えられており、Trowbridge & Madsen (1984)が平均流速分布の比較に用いている van Doorn(1981)と計算結果の比較を図1に示す。30° の位相のデータは与えられていない。計算結果は満足できる程度に実験値を説明していると見ることができる。

3-2. Streaming velocity

図2は境界層の平均流速分布の van Doornの実験結果との比較を示したもので、7 mm あたりまでは境界層理論に従った流れとなっているが、それより上方では波によって水深全体にわたって生じる定常流に移移していく。Trowbridge & Madsen の計算結果も示されているが、境界層内の流速は本計算結果の方が実験値に近い結果を与えている。

計算による境界層外縁における streaming の相対水深に伴う変化を図3に太線で示した。Trowbridge & Madsen の計算結果、Ou & Hsu の結果ならびに Jacobs の滑面乱流の場合の計算結果も示されて

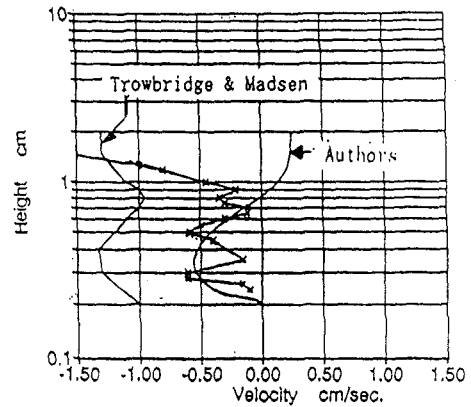


図2 平均流速の計算と van Doorn の実験結果との比較(左側の実線は Trowbridge & Madsen の計算)

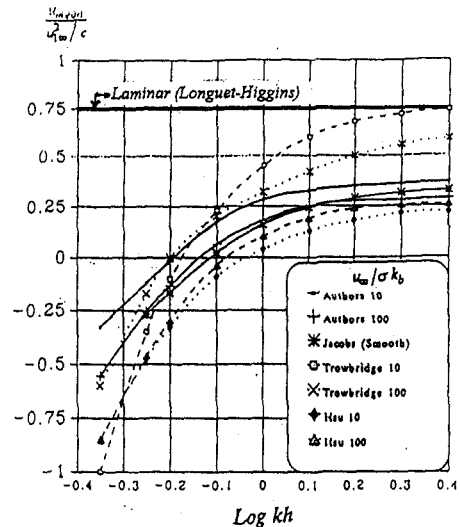


図3 境界層外縁における streaming の水深による変化

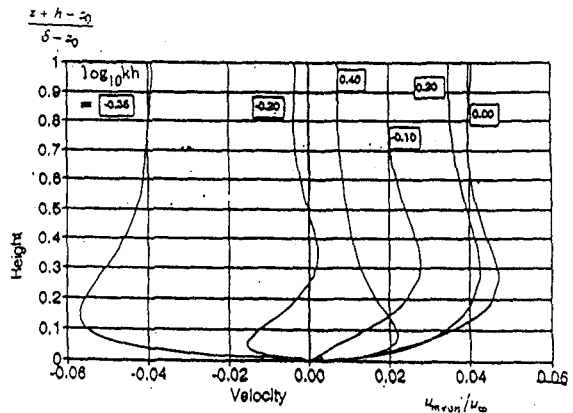


図4 streaming の分布の水深による変化

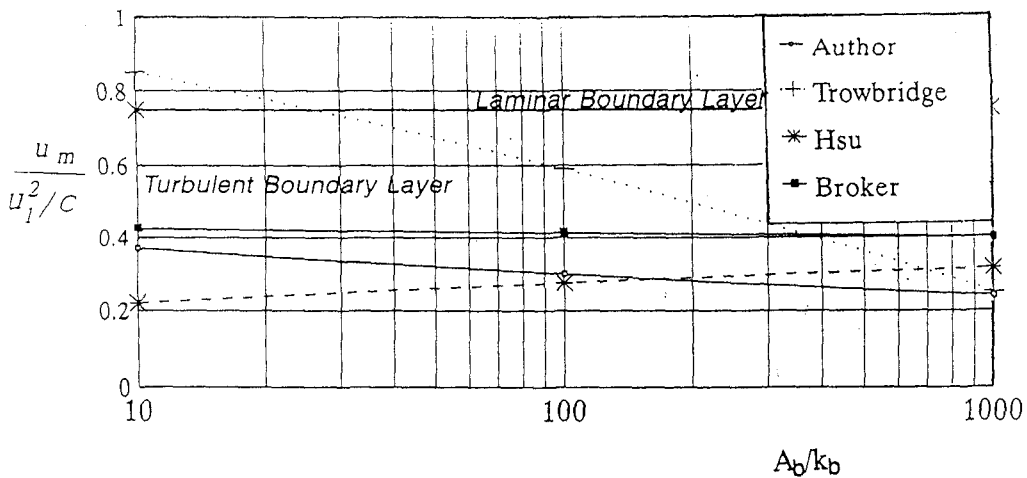


図5 境界層外縁の streaming velocity の粗度による変化

いる。いずれにせよ水深の減少に伴って streaming は小さくなり、 h/L が $1/8 \sim 1/10$ で外縁での streaming は 0 となり、さらに小さくなると streaming は逆に冲向きとなり、水深減少と共にその流速を増大させる。この点が、外縁の流速が減少しても逆向きとはならない層流解との違いといえる。だが、Trowbridge & Madsen の結果は streaming の小さな所を除くと著者等の結果や Ou & Hsu ならびに Jacobs の結果と比べていずれの方向にも大きな streaming を与えている。

これまでの研究では境界層外縁における streaming の変化に目が向けられ、鉛直分布がどうなっているのか、特に、流向が逆になるとどうなるのかといった点がよく分からなかった。そこで、streaming の分布の変化を図 4 に示した。境界層外縁における streaming 変化に伴い、境界層内部では図のような streaming の分布の変化が生じることを計算結果は示している。外縁の streaming の小さい $\log_{10} kh = -0.2$ ($L/h=1/10$) の場合、高さによって流れの向きが異なっている。図 4 の高さは境界層厚さで無次元化しており、ある波の沖から岸への伝播過程を念頭において見た場合 kh の大きい所では層厚は小さく、外縁流速が小さいので平均流速も小さい。だが、たとえば $\log_{10} kh = -0.35$ ($h/L = 1/14$) の場合のように kh の小さい所では層厚も大きく streaming の絶対値も大きくなる。このような底質の動きが活発化してくると考えられる領域で streaming の向きが冲向きとなる。この点は、小規模な実験水路で見られる層流境界層の場合と異なり、底質の移動過程に現地と小規模な実験の間に相違をもたらすことが考えられる。さらに浅くなるとどうなるか興味深いが Stokes 波の適用範囲から外れてくるのでクノイド波理論に基づいた議論が必要であろう。

次に、図 5 に粗度による streaming の変化を示した。横軸の A_b は底面における軌道運動の振幅 ($A_b = u_* / \sigma$) である。Trowbridge & Madsen の計算では粗度による境界層外縁での streaming の変化がかなり見られるが、著者等の結果や Ou & Hsu の結果は粗度による変化は小さく、粗度に対する依存性は弱い。この点に関しては Broker(1985) の結果を支持している。だが、その変化の仕方については、著者等、Trowbridge & Madsen、Broker²⁷⁾ の結果は粗度が大きくなるに連れて大きくなる傾向を示しているが、Ou & Hsu の結果は逆の変化を与えている。

4. 結 語

乱流の一方程式モデルに基づいて、波動により底面に生じる乱流境界層の streaming について数値計算を行い、境界層外縁における streaming の大きさを 0 方程式モデルによる Trowbridge & Mad-

sen(1984) および Ou & Hsu(1994)の解析解ならびに Saffman Model に基づく Jacobs(1984) の滑面乱流に対する解析解と比較した結果、層流解の高々半分程度で Jacobs および Ou & Hsu の結果に近く、Trowbridge & Madsen の結果は平均流速の絶対値を少し大きく見積もっているように思われた。

van Doorn (1981) による実験結果との比較では境界層の大半で Trowbridge & Madsen の計算値より近い値を与えることが分かった。

また、相対水深による streaming の鉛直分布の計算結果の差異を示した。層流では理論的には外縁付近での流速が Longuet-Higgins(1953) の解より小さくなることが示されているが、向きは波の進行方向である。しかし、乱流境界層では水深が小さいところでは層内の平均流速の流向が逆転し、最大流速も冲向きとなりうること、最大流速となる高さも変化することがこの計算結果に示されている。

本計算によれば streaming は粗度に対する依存性は弱く、この点では Ou & Hsu や Broker と同様で、Trowbridge & Madsen の結果とは異なっている。弱いながらも、その変化の仕方については著者等、Trowbridge & Madsen、Broker は同じ傾向を示し、Ou & Hsu の結果は逆であった。

謝辞

本研究を進めるにあたり、著者(S.A.C.)は、鹿児島大学水産学部 茶園正明 教授と市川 洋 助教授に激励といろいろ援助していただいたことに謝意を表します。さらに、同工学部 海洋土木工学科 浅野敏之助教授には助言や文献の紹介をしていただいたことに謝意を表します。また、米盛誠心育成会の補助を受けたことを記し、謝意を表します。

参考文献

- 1) Longuet-Higgins, M.S.: Mass transport in water waves, Phil. Trans., Roy. Soc. London, A, 245, pp. 531-581, 1953
- 2) Collins, J.I.: Inception of Turbulence at the bed under periodic gravity waves, J.G.R., 68, pp. 6007-6014, 1963
- 3) Brebner, A., J.A. Askew and S.W. Law: The effect of roughness on the mass-transport of progressive gravity waves, Proc. 10th ICCE., pp. 175-184, 1966
- 4) Johns, B.: On the mass transport induced by oscillatory flow in a turbulent boundary layer, JFM., 43-1, pp. 177-185, 1970
- 5) Noda, H.: On the oscillatory flow in turbulent boundary layers by water waves, Bull. Disas. Prev. Inst., 20-3, 176, pp. 127-144, 1970
- 6) Longuet-Higgins, M.S.: The mechanism of the boundary layer near the bottom in a progressive wave, [Appendix to a paper by R.C.H. Russel & J.D.C. Osorio.] Proc. 6th Int. Conf. Coastal Engng. pp. 184-193, 1958
- 7) Sleath, J.F.A.: A second approximation to mass transport by water waves, J. Mar. Res., 30, pp. 295-304, 1972
- 8) Sleath, J.F.A.: Mass transport over a rough bed, J. Mar. Res., 32, pp. 13-24, 1974
- 9) Isaacson, M. de St. Q.: Mass transport in the bottom boundary layer of cnoidal waves, J. Fluid Mech., 74, pp. 401-413, 1976a
- 10) Isaacson, M. de St. Q.: The second approximation to mass transport in cnoidal waves, J. Fluid Mech., 78, pp. 445-467, 1976b
- 11) Isaacson, M. de St. Q.: Mass transport in shallow water waves, ASCE J. Waterway, Port, Coastal Div., 104, pp. 215-225
- 12) Dore, B.D.: On the second approximation to mass transport in the bottom boundary layer, Coastal Eng., 6, pp. 93-120, 1982
- 13) Trowbridge, J. and O.S. Madsen: Turbulent wave boundary layers, 1. Model formulation and first-order solution, J. Geophys. Res., 89, pp. 7989-7997, 1984
- 14) Trowbridge, J. and O.S. Madsen: Turbulent wave boundary layers, 2. Second-order theory and mass transport, J. Geophys. Res., 89, pp. 7999-8007, 1984
- 15) Jacobs, S.J.: Mass transport in a turbulent boundary layer under a progressive water wave, J. Fluid Mech.,

- 146, pp.303-311, 1984
- 16) Ou and Hsu: On the mass transport of water waves in a turbulent boundary layer, *Ocean Eng.*, pp.195-206, 1994
 - 17) Launder, B.E. and D.B. Spalding: *Lecture in mathematical models of turbulence*, Academic Press, 1972
 - 18) Justesen P.: A note on turbulence calculations in the wave boundary layer, *J. Hydraulic Res.*, 29, pp.699-711, 1991
 - 19) Batchelor, G.K.: *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1970, pp.360
 - 20) Johns, B.: Residual flow and boundary shear stress in the turbulent bottom layer beneath waves, *J. Phys. Oceanogr.*, 7, pp.733-738, 1977
 - 21) Watson, J.: On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 2. The development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow, *J. Fluid Mech.* 9, pp.371-389, 1960
 - 22) Sleath, J.F.A.: Turbulent oscillatory flow over rough beds, *J. Fluid Mech.*, 182, pp.369-409, 1987
 - 23) Jensen, B.L., B.M. Sumer and J. Fredsoe: Turbulent oscillatory boundary layers at high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, 206, pp.265-297, 1989
 - 24) van Doorn, Th. and H.W.H.E. Godefroy: Experimental investigation of the bottom boundary layer under periodic progressive water waves, Delft Hydraulic Laboratory, Report M1362, 1978
 - 25) van Doorn, Th.: Experimental investigation of near-bottom velocities in water waves without and with a current, Delft Hydraulic Laboratory, Report M1423, 1981
 - 26) 浅野敏之・岡本 浩・岩垣雄一: 波と流れの共存場における底面乱流境界層に関する研究, 第30回海岸工学講演会論文集, pp.84-88, 1983
 - 27) Broker (1985). Cited in *MECHANICS OF COASTAL SEDIMENT TRANSPORT* by J. Fredsoe and R. Deigaard, World Scientific, pp.48, 1992.