

3次元境界適合座標系を用いた局所洗掘現象の数値解析

Numerical Prediction Method for Local Scour with 3D Body-Fitted Coordinates

牛島 省*・田中伸和**

Satoru Ushijima and Nobukazu Tanaka

A numerical prediction method for local scour has been developed on the basis of the arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation, in which three-dimensional body-fitted coordinates (3D BFC) are regenerated for moving boundaries independently of the fluid motion. The governing equations, including transport equations for k and ϵ , are discretized in a Lagrangian scheme and the convection terms are solved with third-order upwind difference. This prediction method was applied to the results of a three-dimensional local scour experiment and the sand bed profile was reasonably predicted.

Keywords: local scour, arbitrary Lagrangian-Eulerian, body-fitted coordinates, turbulence model, numerical prediction

1. はじめに

著者らは、前報[1]で、空間中に固定された計算格子点を利用する、いわゆるEuler的な解析手法に基づいて、水中放流される温排水の移流拡散と洗掘される海底の砂面形状の変化を評価する解析手法を提案した。本研究では、さらに砂面近傍での局所的な解析精度の向上、また流体計算の精度向上等をはかるため、ALE法(arbitrary Lagrangian-Eulerian method [2])に基づいて、時間的に変形する砂面に適合する3次元非直交曲線座標系を生成させながら、非定常の流体計算を進める数値解析手法を提案する。

本研究の数値解析手法では、ある時刻に与えられた砂面形状を境界条件として、境界面に適合する3次元の非直交曲線座標系が生成される。流体の運動方程式と乱流量の輸送方程式、浮遊砂濃度の輸送方程式は、写像空間上でLagrangeスキームに基づいて離散化されており、生成された座標系のもとでこれらが解析される。つぎに、流体計算の結果から掃流砂量と浮遊砂量を計算し、砂の連続式を用いて、次の時刻の砂面形状を求める。そして、新たに得られた砂面形状に対して3次元の非直交曲線座標系を再び生成する、というサイクルを形成しながら、計算が進行してゆくものとなっている。

写像空間上における流体の基礎方程式の離散化方法は、既報[3]と同様であり、Lagrangeスキーム上で拡散項等が時間的・空間的に2次の精度で離散化されている。また、座標生成、基礎方程式中の主な微分量の算出、スタガード配置された変数の内挿計算等を行う際には、差分計算や線形内挿ではなく、3次スプライン関数を利用することにより精度の向上をはかった。また、移流項は、3次風上差分[4]により計算されるものとした。

* 正会員 工博 (財)電力中央研究所 水理部流体グループ (〒270-11我孫子市我孫子1646)

** 正会員 工博 (財)電力中央研究所 水理部次長 (〒270-11我孫子市我孫子1646)

2. 数値解析手法

2.1 座標生成

時間の経過とともに変形する砂面形状に対して、3次元の境界適合座標系を所定の時刻ごとに生成して、計算点のリゾーニングを行う。本研究では、ある時刻に与えられた砂面形状を1つの境界条件として、以下の関係式を用いて座標生成を行う。

$$\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_p \partial \xi_q} \right)^* \left(\frac{\partial \xi_p}{\partial x_j} \right)^* \left(\frac{\partial \xi_q}{\partial x_j} \right)^* + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_r \partial \xi_s} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial x_j} \right)^* \left(\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \right)^* + P_m \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_m} \right)^* = 0 \quad (1)$$

ここで、物理空間と写像空間上における、時間と3次元の空間座標は、それぞれ (t, x_1, x_2, x_3) 、 $(\tau, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ と表される。本報の基礎方程式中では、アインシュタインの総和の規約が用いられるが、特に(1)式中では $p \neq q, r = s$ という条件が課せられる。(1)式中の*印の付けられた項は、既報[3]で提案した3次スプライン関数を用いる手法(GCSI)により計算される。また、上式中の P_m は、コントロールファンクションであり、メッシュ間隔の粗密を制御するために利用される。

2.2 運動方程式

本研究では、流体の解析モデルとして2方程式乱流モデルを用いる。レイノルズ応力をブシネスクの仮説を用いて表現した後、写像空間上に変換した運動方程式は、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{D u_i}{D t} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} + \left(v + \varepsilon_M \right) \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + P_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \right] \\ & + \frac{\partial \varepsilon_M}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \right) - \frac{3}{2} \frac{\partial k}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 u_i は x_i 方向の平均流速成分、 p は静水圧からの偏差に相当する圧力の平均成分である。また、 ρ と v は、それぞれ流体の密度と動粘性係数である。 ε_M は乱流拡散係数で、乱れエネルギー k とその時間的な散逸率 ε から求められる。(2)式左辺の微分オペレータは次式で定義される。

$$\frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left(U_m - U_{0m} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_m} \quad (3)$$

U_{0m} と U_m は、それぞれ計算点の移動速度と流体の流速の反変成分であり、次式で与えられる。

$$U_{0m} = \frac{\partial x_i}{\partial \tau} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (4)$$

$$U_m = u_i \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (5)$$

運動方程式は、Lagrangeスキームに従い[3]、写像空間上で次のように離散化される。

$$u_i^{n+1} = -PG_i^{n+1} \Delta t + u_i'^n + \left[\frac{3}{2} D_i'^n - \frac{1}{2} D_i''^{n-1} \right] \Delta t \quad (6)$$

ここで PG_i と D_i は、それぞれ(2)式右辺中の圧力項と拡散項に対応する。(6)式中の上添字は数値

計算における時間ステップ数を表し、記号'および''は、それぞれn+1ステップの物理量が、nステップおよびn-1ステップにおいて存在していた位置(それぞれP'およびP'')における値であることを意味している。また、 Δt は数値計算における時間刻みである。上流点位置P'およびP''は、それぞれ対応する時刻の U_{0m} および U_m と Δt を用いて求められる。拡散項 D_i の微分量を算出する際には、差分法ではなくGCSIを用いている。

2.3 乱流量に関する方程式

写像空間上における、乱れエネルギーとその散逸率の輸送方程式は、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} = & \varepsilon_M \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} + \frac{C_k}{C_v} \frac{\partial \varepsilon_M}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \\ & + \left(v + \frac{C_k}{C_v} \varepsilon_M \right) \left[\frac{\partial^2 k}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + P_m \frac{\partial k}{\partial \xi_m} \right] - \varepsilon \equiv FK \end{aligned} \quad (7)$$

および

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon_M \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} + \frac{C_\varepsilon}{C_v} \frac{\partial \varepsilon_M}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \\ & + \left(v + \frac{C_\varepsilon}{C_v} \varepsilon_M \right) \left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + P_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_m} \right] - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \equiv FE \end{aligned} \quad (8)$$

運動方程式と同様の離散化方法を(7)および(8)式に適用すると、以下のような結果が得られる。

$$k^{n+1} = k'^n + \frac{3}{2} FK'^n \Delta t - \frac{1}{2} FK''^{n-1} \Delta t \quad (9)$$

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon'^n + \frac{3}{2} FE'^n \Delta t - \frac{1}{2} FE''^{n-1} \Delta t \quad (10)$$

なお、上式中のFKおよびFEに含まれる各項の微分量は、GCSIにより計算される。また、乱流モデルの係数値としては、前報[1]と同じ値を用いている。

3. 局所洗掘現象による砂面形状の変化の算定方法

写像空間上では、砂の連続式は、砂面高さ B と砂の空隙率 γ を用いて以下のように書かれる。

$$\left(1 - \gamma \right) \left[\frac{\partial B}{\partial \tau} - U_{0m} \frac{\partial B}{\partial \xi_m} \right] + \frac{\partial Q_m}{\partial \xi_m} = 0 \quad (11)$$

Q_m は、 ξ_m 方向の総移動砂量で、本研究では掃流砂量 Q_{Bm} と浮遊砂量 Q_{Sm} の和と考える。

総移動砂量のうち、掃流砂量 Q_{Bm} は、物理空間上の掃流砂量 q_{Bi} を用いて次式から求められる。

$$Q_{Bm} = q_{Bi} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (12)$$

掃流砂量 q_{Bi} は、摩擦速度 u_{*i} が移動限界摩擦速度よりも大きくなった場合に、Ashidaら[5]の掃流砂量式から計算されるものとした。この掃流砂量式は、平衡流砂状態で導かれたものである。今後より適切な流砂量式を検討する余地があると考えられる。摩擦速度の算出には、次式で与えられる粗面上の対数則を利用する。

$$\frac{u_i}{u_{*i}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{D}{k_s} \right) + 8.5 \quad (13)$$

ここで、 D は、砂面から u_i が定義される点までの距離であり、 κ はカルマン定数(0.4)、 k_s は相当粗度である。相当粗度 k_s は、砂の平均粒径の数倍程度にとられる場合があることから、ここでは、試算の結果を考慮して、平均粒径の4倍の値とした。

総移動砂量のうちの浮遊砂量 Q_{Sm} を計算するために、浮遊砂濃度の輸送方程式が解析される。写像空間上における基礎方程式は次式のようになり、乱流量の輸送方程式と同様に離散化される。

$$\frac{D^* C}{Dt} = \left(\lambda + \varepsilon_s \right) \left[\frac{\partial^2 C}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + P^m \frac{\partial C}{\partial \xi_m} \right] + \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial C}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \quad (14)$$

ここで、 C は浮遊砂濃度の平均成分、 λ および ε_s は、それぞれ浮遊砂濃度の分子拡散係数と乱流拡散係数である。本研究では、 ε_s は、 ε_M と同じ値とした。なお、上式左辺中では、(5)式に沈降速度が含まれたかたちとし、これを(3)式に用いた微分オペレータ(D^*/Dt)が使用されている。また、本報で対象とするような局所洗掘現象の場合、浮遊砂は解析領域の底面から発生するため、底面近傍における浮遊砂濃度の境界条件がLane&Kalinskeモデル[6]で与えられるものとした。浮遊砂量は、計算された流体中の浮遊砂濃度と流速の積を ξ_3 方向に積分することにより求められる。

4. 解析手法の適用性

前報[1]で行った3次元の局所洗掘実験に本研究の数値解析手法を適用する。この実験は、図1に示すように、流下方向9m、横断方向13mの平面水槽中で行われた。平面水槽の底部には、実験開始時に、平均粒径0.21mm、密度259 g/cm³のほぼ一様な砂が、下流に向かうにつれ約1/200の勾配で低下するように敷き詰められている。平面水槽の上流側には、3本の円形断面を有する放水管が水平に並べて設置されており、流量約4.66×10⁻² m³/sで等温水が放流される。各放水管の直径は133.5 mmであり、中心間隔は250mmである。これらの放水管から流出する噴流により、水槽内に流れが発生して、底部の砂が輸送され、砂面が時間とともに変形するものとなる。実験では、放流開始から30分後の砂面形状が、測量用の機器により計測された。

計算対象となる領域は、横断方向の対称性を仮定

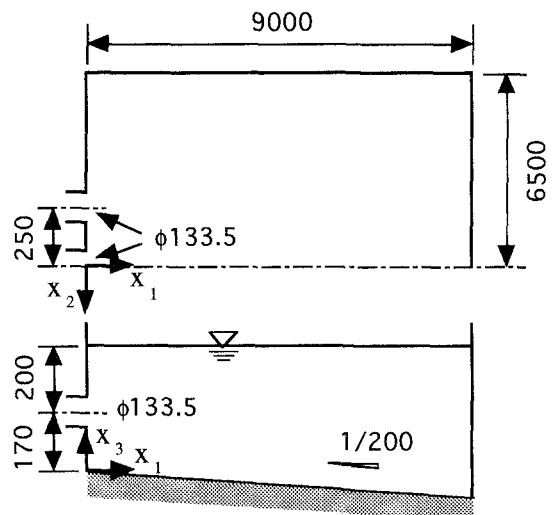


図1 実験水槽の概略と座標系
(上：放水管中心軸を含む水平断面、
下：鉛直断面、図中の単位はmm)

して、 x_1 方向に6m、 x_2 方向に中心から1mまでの領域とし、下流部分と側面は自由流出入境界と考えた。自由液面は、フリースリップの固定境界面とした。また、放水管の出口形状は前報[1]では矩形断面として表されていたが、本研究では境界適合座標系が用いられているため、円形の出口形状が図2に示されるように、正確に表現されている。なお、解析対象領域中で設定された解析格子点数は、 $89 \times 35 \times 25 = 77,875$ である。

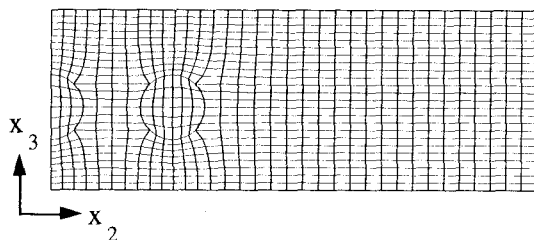


図2 上流端断面内の解析メッシュ分布

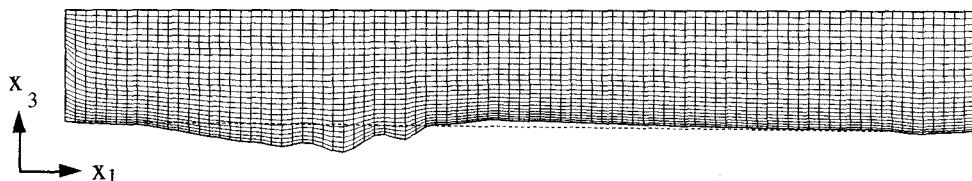


図3 解析メッシュの分布 (放流開始30分後、破線は初期の砂面、 $x_2=28.5\text{cm}$)

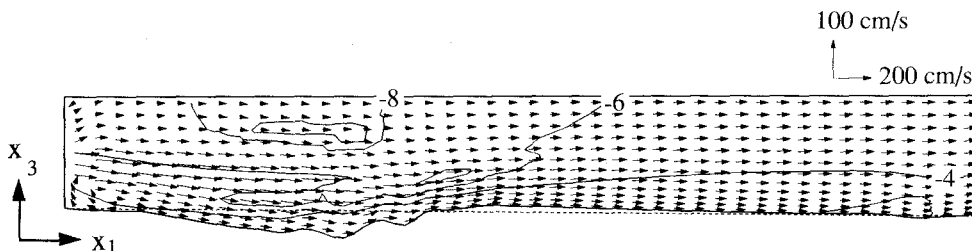


図4 流速ベクトルと浮遊砂濃度の解析結果 (図3と同じ条件)

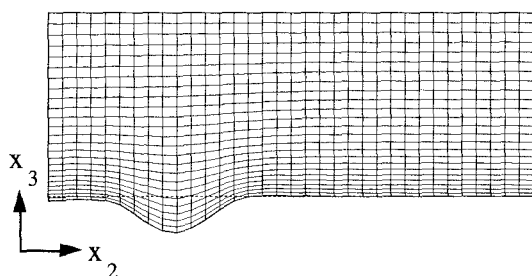


図5 解析メッシュの分布
($x_1=1.43\text{m}$ 、他は図3と同じ条件)

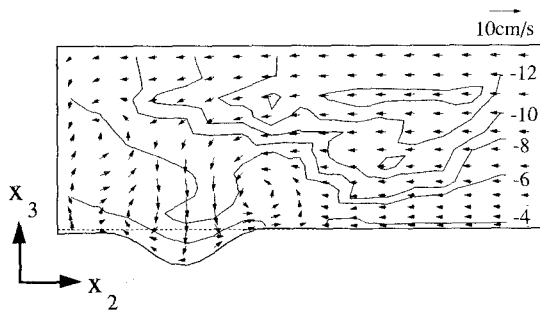


図6 流速ベクトルと浮遊砂濃度の解析結果
(図5と同条件)

図3、4は、それぞれ放流開始から30分後における、 x_1 - x_3 断面内の解析メッシュの分布と、流速ベクトルおよび浮遊砂濃度の数値解析結果を示すものである。これらの図では、 x_3 方向の長さスケールが x_1 方向のそれより2倍大きく表されている。また、浮遊砂濃度の等高線は、 $\log_{10}C$ の値に対して描かれている(C の単位は g/cm^3)。図5、6は、主流に直交する x_2 - x_3 断面内の解析メッシュの分布と得られた数値解析結果を示すものである。これらの結果から、放流開始から30分後においては、変形した砂面形状に適合するような解析メッシュが生成され、それらの上で運動方程式と浮遊砂濃度の輸送方程式の解が求められていることが確認できる。

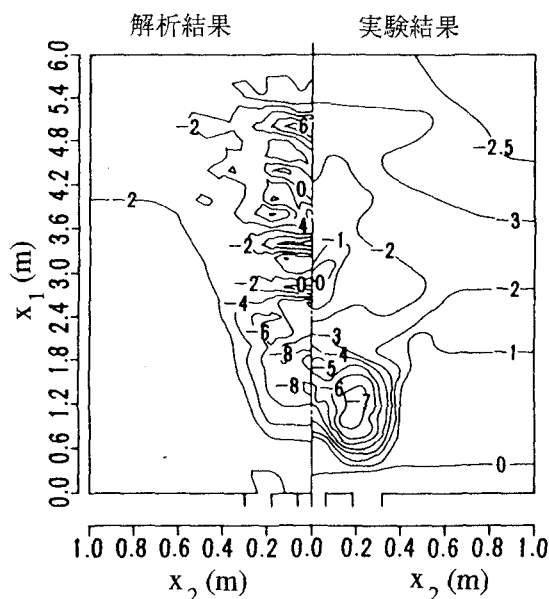


図7 砂面の等高線(前報[1]の結果)

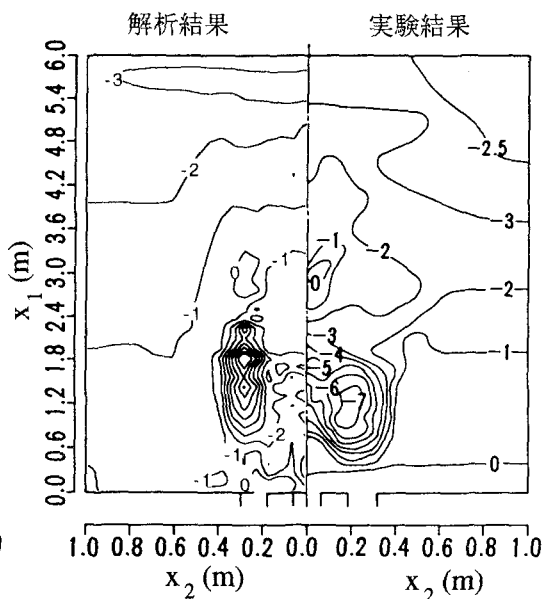


図8 砂面の等高線(本研究の結果)

図7、8は、放流開始から30分後における、砂面の等高線を示したものである。これらのうち、図7はEuler的な解法に基づいて計算された前報[1]の結果を示すものであり、図8は本研究の結果である。両図とも、右側が実験結果、左側が解析結果で、等高線は1 cmおきに描かれている(図中の数値は x_3 ; 単位cm)。前報[1]の結果では、洗掘深さが最大となる領域は中心軸付近に現れているが、本研究の結果では、中心軸から離れた所に位置しており、実験結果に比較的近いものとなっている。

5. おわりに

本研究では、ALE法に基づく局所洗掘現象の数値解析手法を提案した。この数値解析手法を、3次元局所洗掘実験の結果に適用した結果は、著者らがEuler的な解法に基づいて行った数値解析結果よりも実験結果によく適合するものとなり、解析精度が向上したことが確認された。

参考文献

- [1] S. Ushijima, T. Shimizu, A. Sasaki and Y. Takizawa, "Prediction Method for Local Scour by Warmed Cooling-Water Jets", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol.118, No.8, 1992.
- [2] C. W. Hirt, A. A. Amsden and J. L. Cook, "An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds", Journal of Computational Physics, 14, 227-253, 1974.
- [3] S. Ushijima, "Prediction of thermal stratification in a curved duct with 3D body-fitted coordinates", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.19, 647-665, 1994.
- [4] Kawamura, T. and Kuwahara K, "Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness", AIAA-84-0304, 1984.
- [5] K. Ashida, T. Takahashi and T. Mizuyama, "Study on bed load equations for mountain streams", J. Japan Soc. Erosion Control Engineering, 107, 1978.
- [6] E. W. Lane and A. A. Kalinske, "Engineering calculation of suspended sediment", Trans. Amer. Geophys. Union, Vol.22, 1941.