

新しい混合距離理論による開水路浮遊砂流の鉛直速度分布および濃度分布

Vertical Distributions of Velocity and Concentration in Sediment-Laden Open-Channel Flow
Based on a New Mixing-Length Concept

梅山元彦 * ・ 堀口孝男 **

By Motohiko UMEYAMA and Takao HORIGUCHI

A theoretical model to predict the distributions of velocity and concentration for sediment-laden flow in open channel is developed by means of a new mixing-length concept. The vertical velocity distribution is obtained as a function of the vertical sediment concentration. The Kármán coefficient is independent of suspended load and equal to 0.4. The solution of velocity distribution departs from the logarithmic law in the outer layer. The sediment concentration equation is derived analytically, using the vertical mass balance equation over the water depth.

Keywords: Mixing-length, Kármán coefficient, Diffusion coefficient

1. まえがき

開水路の浮遊砂流鉛直速度分布については過去に多くの研究者によって理論的および実験的な検討がなされてきた。初期の研究者の多くは、清水流中に砂粒子が加えられることによって流れの構造がしだいに变化していく現象を Prandtl¹⁾ (1932)が提案した対数分布式中のKármán定数が変わることによって説明できるものと考えていた。浮遊砂流の実験で求められた鉛直方向の何点かの速度が片対数用紙の上にプロットされ、それらとよい一致を示す直線が引かれ、その直線の勾配が砂を含む流れのKármán定数と定義された。これを最初に行ったのはVanoni²⁾ (1946)で、同一の水理条件では浮遊砂流は清水流に比べて濃度の増加とともに速度勾配が急になり、それに伴ってKármán定数 κ が清水流中の0.4よりも減少することを確認した。Einstein and Chien³⁾ (1955)は実験結果に基づき粒子浮遊のためのエネルギーと流れが摩擦によって失うエネルギーの比とKármán定数の減少とを関係づけた。しかしながら、彼らの考察は常に他の実験結果と一致するものではなく、例えば Imamoto et al⁴⁾ (1977)らの実験は、Kármán定数が濃度の増加にともなって減少することを示した。このようにKármán定数が濃度とともに変化するという考えは浮遊砂流の平均流速を対数分布式で表現できるという点では非常に都合がよいのであるが、実験から明らかなように浮遊砂濃度が高くなるにつれて流れと粒子との相互作用が強くなり、速度分布は対数法則からずれていく。Itakura and Kishi⁵⁾ (1980)は、

* 正会員 Ph. D. 東京都立大学講師 工学部土木工学科

** 正会員 工博 東京都立大学名誉教授 工学部土木工学科

(〒192-03 東京都八王子市南大沢 1-1)

Kármán定数が変化するというよりむしろ速度分布形が変化するという観点からMonin-Obukhov の理論を適用して浮遊砂流の乱れ構造を検討し、流速が対数・直線則で求まる速度分布式を導いた。以上の考えとは異なった浮遊砂の速度公式が Coleman⁶⁾ (1981)によって提案された。その理論は Coles⁷⁾ (1956)が清水流に関して導いたものが基礎になっており、砂粒子を含む流体の速度を対数法則と後流法則とによって表せるものとして扱った。Lau⁸⁾ (1983)は Coleman⁶⁾の理論を実験結果をもとに検証して砂粒子を含む流れの速度は全く同一の流量と勾配をもつ清水流に比べ、河床近傍では遅く、水面付近では速いことを示した。

次に浮遊砂の鉛直濃度分布についての問題に関しても幾つかの理論的な研究がなされてきた。一般に開水路の浮遊砂現象の解析は二次元定常状態のPickの拡散方程式に基づいており、鉛直方向の拡散係数を任意に仮定して濃度分布式を求めることができる。たとえば、Rouse⁹⁾ (1937)は河床と水面がゼロとなる放物型の、Coleman¹⁰⁾ (1970)は河床から水深の約20%までを直線でその点より上の水面までを一定の、Bhattacharya¹¹⁾ (1971)は河床をゼロとする一次直線型の拡散係数を与えて浮遊砂流の鉛直濃度分布を求める解析解を得た。

このように開水路の浮遊砂流に関する鉛直速度分布と濃度分布の研究がなされたにもかかわらず、この流体の場をあらわす統一的なモデルが構築されるまでには到っていない。これは、清水流に関する混合距離の仮説を疑うことなく、それを浮遊砂流に直接当てはめて研究が進められてきたことによる。Umeyama and Gerritsen¹²⁾ (1992)は、混合距離が浮遊砂濃度の鉛直分布の関数であるという新しい混合距離理論を提案し、鉛直速度分布式を導いた。さらに、同じ理論を用いて Umeyama¹³⁾ (1992)は浮遊砂の濃度分布式を導いた。これら二種類の分布式は、今までに得られた実験結果と比較してかなり良い整合性が得られることがわかった。そこで本研究では新しく提案された浮遊砂流に関する混合距離理論を用いた、鉛直速度と濃度の統一モデルを説明するものである。

2. 開水路浮遊砂流の鉛直速度と濃度の統一モデル理論

2. 1 浮遊砂流に関する混合距離理論

清水流中の二次元乱流に関するReynolds応力は次式で示される。

$$\tau = -\rho_0 \overline{u'v'} \quad (1)$$

ここで、 ρ_0 は水の密度、 u' と v' とはそれぞれ開水路の流れに平行方向と鉛直方向の瞬間速度、 $-$ はアンサンブル平均である。Prandtl¹⁾ は、 u' と v' が流体粒子の移動距離の間の二点間の平均速度の勾配に比例するとして次のように定義した。

$$u' \propto \ell \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{and} \quad v' \propto \ell \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

ここで、 ℓ は混合距離と呼ばれるもので、 u は開水路の平均流速、 y は河床から鉛直上向きにとった座標軸である。したがって式(2)を式(1)に代入すると次式が求まる。

$$\tau = \rho_0 \ell^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

この型は Prandtl¹⁾の運動量輸送理論に基づくせん断力の関係で、清水流中では混合距離が河床からの距離に比例して大きくなるものであるが、

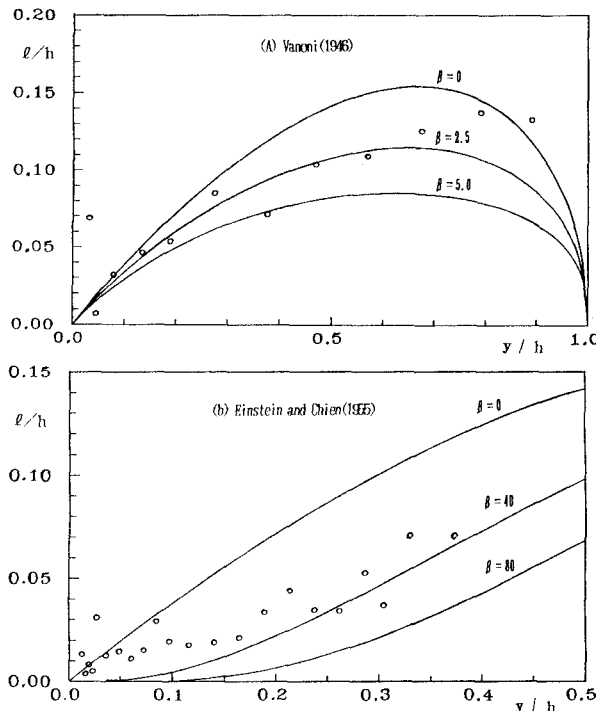


図-1 混合距離仮説の実験データとの比較

Umeyama and Gerritsen¹⁶⁾ は浮遊砂流中では濃度にも依存するものとして次のような仮定を行った。

$$\ell = \kappa y \left(1 - \frac{y}{h}\right)^\alpha \quad (4)$$

ここで、 h は水深、 κ は Kármán 定数で 0.4、 α は浮遊砂の濃度と粒子径に依存するものとして導入された値であり、浮遊砂濃度の関数であるとして次のように書き表した。

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \beta \frac{C(y)}{C_a} \right\} \quad (5)$$

ここで、 $C(y)$ は点 y における浮遊砂濃度、 C_a は $y=a$ における基準点濃度である。 β は砂粒子の径の大きさに依存する定数で、実験から求めることができる。 $\beta = 0$ のとき α の値は 0.5 となり、混合距離は清水流の場合と一致する。浮遊砂流における α の値は、水面から河床方向に y が減少し浮遊砂濃度が増加するにつれて大きくなる。式(4)を物理的に解釈すると、非常に高い濃度の土砂を含んだ流れの混合距離は低濃度の浮遊砂流に比べて混合距離が小さいということである。この浮遊砂流に関する混合距離仮説の妥当性は実験結果からも確かめられる。図-1 は、(a) Vanoni²⁾ と (b) Einstein and Chien³⁾ によって測定された浮遊砂濃度の値に任意の β 値を与えて計算した混合距離の分布曲線（実線）と実測の速度分布から求められた混合距離（白丸）を比較したものである。Einstein and Chien の実験結果では、 $0 \leq y/h < 0.1 \sim 0.2$ の領域で式(4)からのずれがみられるが、この二例に関してはほぼ満足のゆく分布を示している。

2. 2 浮遊砂流の鉛直速度分布

浮遊砂流の場合の流体密度は次の式で与えることができる。

$$\rho = \rho_0 + (\rho_s - \rho_0) C(y) \quad (6)$$

ここで、 ρ_s は砂粒子の密度。河床面から水面までのせん断応力の分布は次式で表すことができる。

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (7)$$

ここで、 τ_0 は河床での境界せん断応力である。

清水流に関するせん断応力の式(3)において密度 ρ_0 を ρ で置き換え、式(4)、(5)と(6)とを代入し、さらに式(7)を用いて整理すると、次のような関係式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_*}{\kappa y} \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{-\beta C(y)/(2C_a)} \left[1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) C(y)\right]^{-1/2} \quad (8)$$

ここで、 $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho_0}$ で、摩擦速度と呼ばれる。速度の鉛直分布は濃度が適当な関数形で与えられれば式(8)を用いて数値的に求めることができる。たとえば一例として次のような Rouse⁸⁾ の公式を当てはめることができる。

$$\frac{C(y)}{C_a} = \left(\frac{h-y}{y} \frac{a}{h-a} \right)^{z_*} \quad (9)$$

ここで、 $z_* = w_0 / \kappa u_*$ で、 w_0 は砂粒子の沈降速度である。

2. 3 浮遊砂流の鉛直濃度分布

式(4)で与えられる混合距離に基づいて、浮遊砂流の鉛直濃度分布式を導くことができる。定常流中の濃度分布を求めるためには、次に示す Fick の拡散方程式から始める。

$$w_0 C(y) + \varepsilon_s(y) \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

ここで、 ε_s は拡散係数であり、一般に渦動粘性係数 ε に比例するものとして考えられており、 $\varepsilon_s = \gamma \varepsilon$

と仮定できる。 γ の値は多くの研究者によって実験的に求められてきたが、今日まで十分な説明はなされていない。Boussinesqの仮説から出発して渦動粘性係数は次式で表現できる。

$$\varepsilon = \frac{\tau}{\partial u / \partial y} = \kappa u_* y \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{[1 + (\beta/2) \langle C(y) \rangle / C_a]} \left[1 + \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} - 1\right) C(y)\right]^{1/2} \tag{11}$$

従って、この関係から拡散係数は容易に求まり、それを式10に代入してやれば次に示すような微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{-W_* C(y)}{\varepsilon_s} = \frac{-w_* C(y)}{\gamma \kappa u_* y} \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{[1 + (\beta/2) \langle C(y) \rangle / C_a]} \left[1 + \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} - 1\right) C(y)\right]^{1/2} \tag{12}$$

鉛直濃度分布を求めるには上式を任意の点から逐次数値的に計算すればよい。

Coleman¹⁰⁾ は拡散係数が河床からの距離に依存する領域と、一定である領域とに分けられることを開水路実験や現地観測結果から見出した。この点は河床から $\delta_* \approx 0.1 \sim 0.3h$ の付近であることが判明しているが、今、拡散係数中の $C(y)$ をこの点での値で置き換えることができるものと仮定して、 $C_b = C(\delta_*)$ と定義すると、式12は積分することができて濃度分布式が以下のように得られる。

$$\frac{C(y)}{C_a} = A \exp \left\{ \frac{-W_*}{\gamma \kappa u_* y} \left[1 + \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} - 1\right) C_b\right]^{-1/2} \left[\ln \frac{y}{h} + \left(1 + \frac{\beta C_b}{2 C_a}\right) \frac{y}{h} + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 + \frac{\beta C_b}{2 C_a}\right) \left(2 + \frac{\beta C_b}{2 C_a}\right) \dots \left(k + \frac{\beta C_b}{2 C_a}\right) \frac{y^k}{k h^k} + \dots \right] \right\} \tag{13}$$

ここで、A は積分定数である。

3. 計算結果と実験値との比較

3. 1 鉛直速度分布

鉛直速度分布の計算は式(8)の速度に関する微分方程式と式(9)の濃度分布式を用いて行った。基準面濃度は、 $a=0.05h$ の値を C_a とした。ただし、図-1からもわかるように混合距離は、河床近傍域で必ずしも式(4)を満足しているとはいえないので、 $y=\delta_*$ から河床方向の領域内では濃度を $C(\delta_*)$ =一定とした混合距離で与えてある。解を求める方法としては、ルンゲ・クッタ法により $y=\delta_*$ から水面方向と河床方向に計算を実行した。浮遊砂流の混合距離を決める β の値は本来は実験的に求めるものであるが、ここでは任意の値を与えて計算した結果が実験値に最も適合した時の値となっている。今回提案された混合距離理論の鉛直速度分布への応用が適当であるかを評価するにあたっては、すでに存在する実験結果と比較することにした。浮遊砂流の鉛直流速分布と鉛直濃度分布が与えられている論文としては、Vanoni²⁾ (1946)とEinstein and Chien³⁾ (1955)があげられる。

Vanoni²⁾ が実験に用いた水槽は長さが18.3m、深さが30.5cm、幅が85.4cmで、河床には0.47から0.88mmの径の砂が引き詰められていた。図-2にはVanoniが行った実験のうち5ケースの流速測定結果が片対数用紙上にプロットされている。ここで、Run No. 18 から 21 は土砂粒子の径が0.100mm、Run No. 22 は0.133mmで若干異なり、河床勾配もRun No. 18 と19が0.00125で、Run No. 20 から22が0.0025

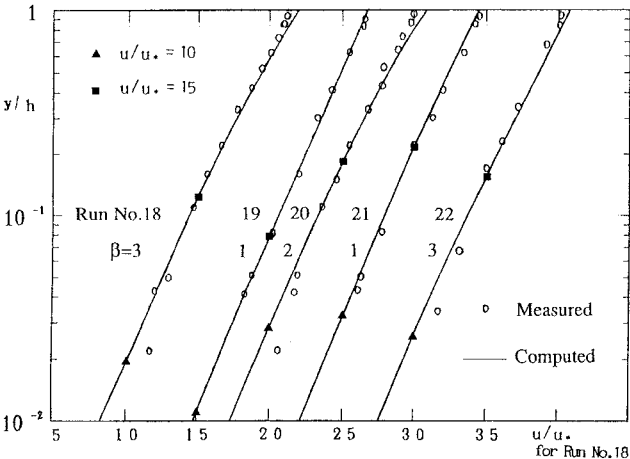


図-2 鉛直速度分布の計算結果とVanoni(1946)の実験結果との比較

であった。水深もRun No. 18 と 20 が14cm、Run No. 19 と21が 7.2cm、Run No. 22 が 9cmと記述されていた。実線は式(8)と(9)を使って計算された結果である。図からわかるように、ほぼ全てのケースで計算結果は実験値を再現している。実験結果より速度分布の対数法則からのずれは、砂粒子の径、水深、河床勾配のいずれかによって規制されているのが判るが、これらの要素のうちのひとつの増加は計算の過程で β の増加として扱うことができる。従って β の変動は鉛直速度の対数分布からのずれの程度を表す重要な定数であることがわかる。

Einstein and Chien³⁾の実験は長さ120m、深さ35.7cm、幅30.7cmの循環式水槽の床に異なった径の砂をはりつけて行われた。ここではそのうちの 6 ケース(Run 11 から 16)について計算結果との整合性をみる。この実験で用いられた土砂の径は $D_{50} = 0.274\text{mm}$ であり、河床勾配は Run 11, 12 と 13 が0.0185で、Run 14, 15と 16 が 0.025であった。河床近傍の浮遊砂濃度は Run 11 が30g/ℓ、Run 番号が大きくなるにつれて増え、Run 16では 600g/ℓであった。実験結果を図-3に示す。図から読み取れるように、速度分布はだいたい河床から水深の 10%ほどの地点から上方向に、対数法則からのずれが始まっている。このことについてはすでに Einstein and Chien³⁾が、全く同じ条件で行った清水流での実験と比較しても明らかに砂が含まれることによる変化であることを指摘しており、清水流でのKármán定数の 0.4が浮遊砂流では減少すると結論づけている。しかしながら、水深の 10%から河床まではゆっくりと速度が減少しており、河床に近づくほど、つまり濃度が高くなるほど清水流の速度より大きくなっている。Run 11は実験結果が対数分布からさほど離れていないが、Run 番号が増えるにつれて対数法則からのずれが著しくなっている。このことは β の値の増加として計算に反映している。数値計算は Run 11 から 14 で $\delta_* = 0.1h$ 、Run 15と 16 で $\delta_* = 0.2h$ 以下の領域での濃度分布は深さに関係なく一定とおいて行った。計算結果は実験結果をよく再現している。

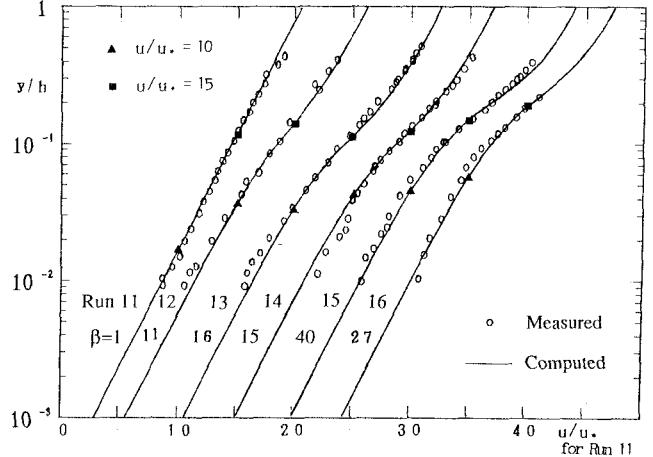


図-3 鉛直速度分布の計算結果とEinstein and Chien(1955)の実験結果との比較

から水深の 10%ほどの地点から上方向に、対数法則からのずれが始まっている。このことについてはすでに Einstein and Chien³⁾が、全く同じ条件で行った清水流での実験と比較しても明らかに砂が含まれることによる変化であることを指摘しており、清水流でのKármán定数の 0.4が浮遊砂流では減少すると結論づけている。しかしながら、水深の 10%から河床まではゆっくりと速度が減少しており、河床に近づくほど、つまり濃度が高くなるほど清水流の速度より大きくなっている。Run 11は実験結果が対数分布からさほど離れていないが、Run 番号が増えるにつれて対数法則からのずれが著しくなっている。このことは β の値の増加として計算に反映している。数値計算は Run 11 から 14 で $\delta_* = 0.1h$ 、Run 15と 16 で $\delta_* = 0.2h$ 以下の領域での濃度分布は深さに関係なく一定とおいて行った。計算結果は実験結果をよく再現している。

3. 2 鉛直濃度分布

浮遊砂流の鉛直濃度分布は式(3)中の、 γ の値を与えることによって河床から水面までの任意の点で求められる。なお、計算結果の検証には鉛直速度分布と同時に測定された、Vanoni²⁾とEinstein and Chien³⁾の浮遊砂濃度分布を用いた。

図-4には、Vanoni²⁾の実験結果(Run No. 18から 22)と計算結果とを

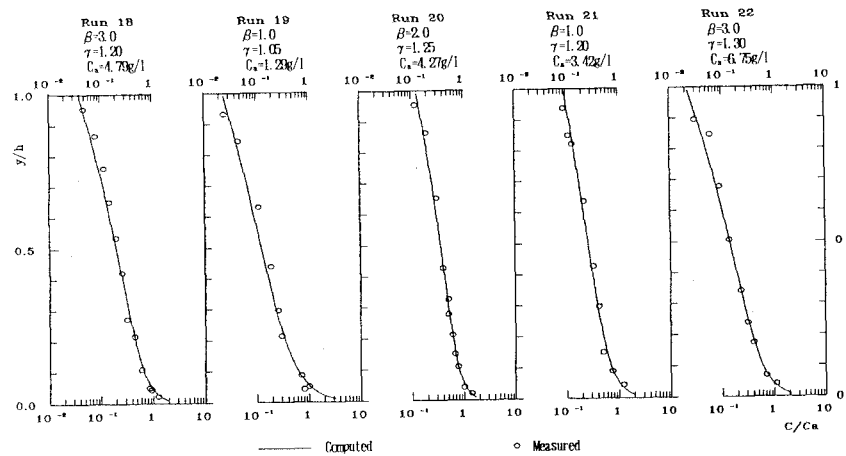


図-4 鉛直濃度分布の計算結果とVanoni(1946)の実験結果との比較

y/h に対する $C(y)/C_a$ として片対数用紙の上にプロットしてある。これらの実験結果に対する γ の値は、 $1.05 \leq \gamma \leq 1.30$ であり、 β の値が大きくなるほど大きかった。つまり、河床の濃度が高くなるほど γ の値が増加している。図からわかるように式(3)による計算結果は Vanoni²⁾ の全ての実験結果を非常によく再現しているといつてよいであろう。

図-5 は、Einstein and Chien³⁾ の浮遊砂濃度の実験結果と計算結果とを比較したものである。解析結果のうち Run 14 から 16 については、 $0 < y < 0.05h$ で実験値よりも高く、河床濃度が高くなるケースにつれては大きくなっている。しかしながら、計算結果は実験結果をよく再現しているといつてよいであろう。この実験の γ

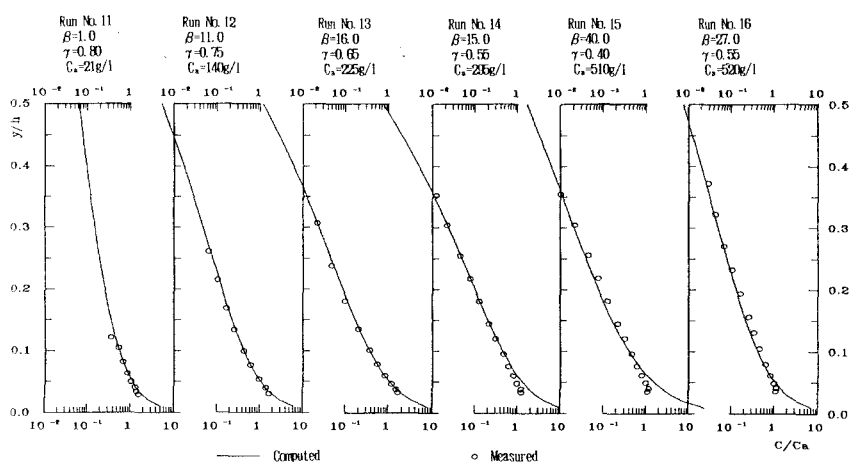


図-5 鉛直濃度分布の計算結果と Einstein and Chien(1955) の実験結果との比較

の値は $0.4 \sim 0.8$ に収まったが、 β の値が増加すると低くなる傾向を示した。

4. 結論

浮遊砂流の鉛直速度分布と濃度分布を計算するための新しい混合距離理論が提案された。Prandtl¹⁾ の混合距離理論はさらに浮遊濃度の関数として式(4)と(5)のように表された。この混合距離理論に基づいて鉛直速度分布を求める関係式(8)と濃度分布を求める式(3)が導かれた。計算された浮遊砂流の速度分布は対数速度分布と比較して河床の近傍で急な速度勾配を水面近傍で緩い速度勾配を示した。この対数分布からのずれは、砂粒子の径と濃度に依存する定数 β の値が増加するほど顕著であった。鉛直濃度分布の計算は、式中の定数 γ を任意に与えて行った。しかしながら γ の傾向は β の値が増加するにつれて、浮遊砂濃度が比較的低いときは増加し、その逆に濃度が比較的高いときは減少する傾向にあった。

参 考 文 献

- 1) Prandtl, L. (1932), *Ergebn. Aerodyn. Versuchsanst.*, 4, 18-29.
- 2) Vanoni, V. A. (1946), *Trans., ASCE*, 111, 67-133.
- 3) Einstein, H. A. and Chien, N. (1955), Report No. 8, Univ. of California, Berkeley, Calif.
- 4) Imamoto, H., Asano, T., and Ishigaki, T. (1977), *Proc. 17th Congress. IAHR*, 1, 105-112.
- 5) Itakura, T., and Kishi, T. (1980), *J. Hydr. Div., ASCE*, 106(8), 1325-1343.
- 6) Coleman, N. L. (1981), *J. Hydr. Res., IAHR*, 19(3), 211-229.
- 7) Coles, D. (1956), *J. Fluid Mech.*, 1, 191-226.
- 8) Lau, Y. L. (1983), *J. Hydr. Div., ASCE*, 109(5), 757-763.
- 9) Rouse, H. (1937), *Trans., ASCE*, 102, 463-543.
- 10) Coleman, N. L. (1970), *Water Resources Res.*, 6(4), 801-809.
- 11) Bhattacharya, P. K. (1971), PhD thesis, Univ. of Iowa, Iowa.
- 12) Umeyama, M., and Gerritsen, F. (1992), *J. Hydr. Div., ASCE*, 118(2), 229-245.
- 13) Umeyama, M. (1992), *J. Hydr. Div., ASCE*, 118(6), 936-941.