

平坦な移動床流れの抵抗則

Friction Factors for Flat Movable Bed Flows

楊永荻*・平野宗夫**・羽田野袈裟義***

by Yongdi YANG, Muneco HIRANO and Kesayoshi HADANO

Abstract: The friction factor of flow on a flat bed consisting of sands decreases when the sands on the bed are transported by the flow. In this paper, the equations of velocity distribution and friction factor on a flat movable bed are derived on the basis of a two layer flow model with water flow layer and sand-water flow layer. Theoretical values of velocity distribution are compared with the experimental ones and show good agreement with them. As the results, the differences in the velocity and the friction factor between the fixed and movable beds are clarified.

Keywords : open channel flow, flat movable bed, bed-load, friction factor, velocity distribution, two-phase flow

1. 緒言

移動床の流水抵抗算定においては、砂れきの表面摩擦抵抗と河床波の形状抵抗を分けて取り扱う Einstein や Engelund などにより提唱された勾配分割法が主として使われている。その際、砂れきの表面摩擦抵抗の算定には対数抵抗則、すなわち Nikurads-Prandtl 式が用いられているが、固定床流れと移動床流れの砂れきの抵抗機構を同じとしている点に問題がある。Lovrea and Kennedy¹⁾は実験水路と河川の実測データに基づいて、河床が平坦な移動床流れの抵抗係数を調べた結果、粗面の管路における抵抗係数と大きく異なり、相対径深 R/d の関数となることを明らかにした。山本²⁾は河床波の形状抵抗を解析する際、平坦な移動床流れの抵抗係数の推定に対数則を使用し、粗度の高さを粒径の3-8倍に取っている。芦田・道上³⁾は掃流砂量式を誘導する際、対数則における相当粗度を掃流力の関数とする算定方法を提案した。これら従来の研究では移動床の流水抵抗は固定床流れの場合より大きくなっている。

一方、図-1には、実験水路において、移動床で河床が平坦な場合の流水抵抗係数と、固定床流れのそれとを比較したものが示されている。図より、山本

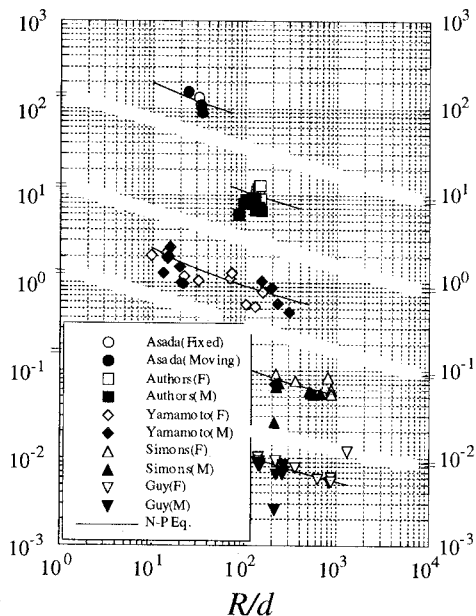


図-1 平坦な移動床上流れの抵抗係数

*正会員 工博 九州大学助手 工学部建設都市工学科 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

**正会員 工博 九州大学教授 工学部建設都市工学科 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

***正会員 工博 山口大学助教授 工学部社会建設工学科 (〒755 宇部市常盤台2557)

のデータを除くと移動床流れの抵抗係数は固定床のそれより若干減少していることが認められる。一般に、河床上の砂の移動により流れの境界条件が変わるので、流体と河床の摩擦抵抗の機構が変化し、より流れやすくなると考えられる。現在移動床流れの抵抗機構については十分に解明されているとは言い難く、移動床流れの系全体における粒子と流体の相互作用関係を包括的に捉える研究が必要であると思われる。

本論文では、掃流砂を有する平坦な砂れき河床上の流れを、水のみ水流層と水砂二相流である掃流砂層からなる二層モデルとして取り扱い、掃流砂の存在により水流層の流れ構造が変化するという考えに基づいて、水流層と掃流砂層の流速分布を検討する。これによって、移動床流れの砂れきの表面摩擦抵抗則を確立することを目的とする。

2. 流動モデル

河床が平坦な移動床流れを図-2のようにモデル化して考える。図において、掃流砂層の厚さ h_s 、掃流砂層の厚さ h_w とし、全流動層について二次元等流として取り扱う。

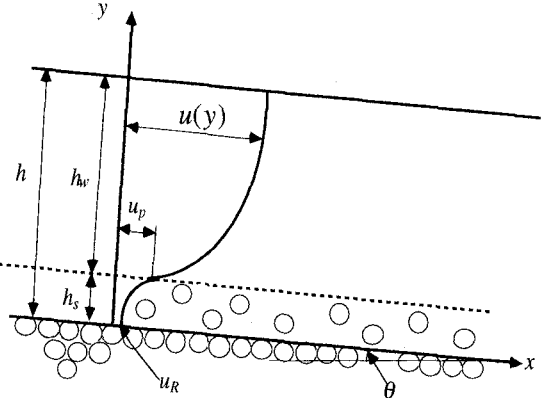


図-2 流動モデル

2.1 水流層の流速分布

水流層における二次元等流のReynolds運動量方程式は次式で与えられる。

$$\rho g \sin \theta + \frac{d}{dy}(-\rho \overline{u'v'}) = 0 \quad h_s \leq y \leq h \quad (1)$$

Reynolds応力はPrandtlの混合距離理論を用いて、次式のように書ける。

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (2)$$

ここに、 l はPrandtlの混合距離である。図-2に示すように掃流砂を有する場合には、水流層の混合距離 l は砂移動の影響を受け、次式で表わされるものとする。

$$l = \kappa(y - h_s + y_0) \quad h_s \leq y \leq h \quad (3)$$

ここで、 κ はKarman定数、 $\kappa=0.4$ 、 y_0 は掃流砂による混合距離の補正距離である。

Prandtlの取扱に従って境界近傍におけるReynolds応力をとすると式(1)～式(3)より

$$\frac{u}{u_{*p}} = \frac{1}{\kappa} \ln(y - h_s + y_0) + c \quad h_s \leq y \leq h \quad (4)$$

が得られる。ここで、 c は積分定数、 u_{*p} は水流層と掃流砂層の境界面のせん断応力に対応する摩擦流速、 $u_{*p} = \sqrt{g \sin \theta (h - h_s)}$ 、 θ は河床勾配の角度である。

式(4)は掃流砂を有する砂れき河床上の流れを対象にした流速分布の式であるが、掃流砂のない場合にも適用できるはずである。河床上の砂が動かない場合には、掃流砂層が生じていないので、掃流砂層の厚さおよび補正混合距離はゼロすなわち $h_s=0$ 、 $y_0=0$ であり、このとき式(4)は固定床の粗面の流速分布式に一致する必要がある。したがって、式(4)の積分定数 c は固定な砂れき河床の実験データ(例えば、Nikuradsの固定砂粒壁面の管路実験)により求められる。これにより式(4)は

$$\frac{u}{u_{*p}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y - h_s + y_0}{y_*} \quad h_s \leq y \leq h \quad (5)$$

となる。ここで、 $y_* = k_s/30$ 、 k_s は粗度、河床の砂れきの粒径の関数であり、Rijn⁴⁾のまとめる結果によると、 $k_s=3d$ である。

水流層と掃流砂層の境界面すなわち $y=h_s$ での流速を u_p とすると、補正混合距離 y_0 は次式で与えられる。

$$y_0 / y_* = \exp(\kappa u_p / u_{*p}) \quad (6)$$

u_p については後述する。

2.2 掃流砂層の二相流モデル

掃流砂層における運動方程式は、水と砂の二相流として流れの方向にそれぞれ次式で与えられる。

$$\text{水相} \quad (1-C)\rho g \sin \theta + \frac{d}{dy}[-(1-C)\rho \bar{u} \bar{v}] - F = 0 \quad 0 \leq y \leq h_s \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{砂相} \quad C\rho_s g \sin \theta + \frac{dT}{dy} + F = 0 \quad 0 \leq y \leq h_s \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 C は掃流砂層における砂相の体積比濃度、 F は水砂二相の相對運動による相間の作用力、 T は粒子間の摩擦応力である。

著者ら^{5,6)}は固液二相流における粒子間の衝突、反発を含む群粒子に作用する単位体積あたり流体力に関して次式を得た。

$$F = \lambda C \rho s g u_R^2 / w_0^2 \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 s は粒子の水中重、 $s = \rho_s / \rho - 1$ 、 ρ_s は粒子の密度、 ρ は水の密度、 u_R は水相と砂相の相對速度、 w_0 は静水中単一粒子の沈降速度、 λ は群粒子の集積効果を表わすパラメーター

$$\lambda = \frac{6.8B(C)+1}{1+30C/(1-C)} \dots\dots\dots (10)$$

である。式(10)の $B(C)$ は最密充填濃度 C_c を用いたBagnoldの線型濃度関数、 $B(C) = 1/[(C_c/C)^{1/3} - 1]$ である。

粒子間の摩擦応力についてはBagnoldの理論により次式を与える⁷⁾。

$$\frac{dT}{dy} = -C \rho s g \cos \theta \tan \phi \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 ϕ は粒子間の内部摩擦角であり、 $\phi = 40^\circ$ 程度と思われる^{7,8)}。

掃流砂層において混合距離は掃流砂層内の空隙スケールに規定されるが、ここでは掃流層では一定値とし、水流層と掃流砂層の境界面での接続を考慮して、

$$l = \kappa y_0 \quad 0 \leq y \leq h_s \dots\dots\dots (12)$$

とする。

式(8)、(9)および(11)より、水と砂の相對速度として次式を得る。

$$\frac{u_R}{w_0} = \sqrt{\frac{\cos \theta \tan \phi}{\lambda} - \frac{\sin \theta (1+s)}{\lambda s}} \dots\dots\dots (13)$$

一般には、式(13)において、 $\cos \theta \approx 1$ 、 $\sin \theta \approx 0$ であるから、水と砂の相對速度は次式のように簡略化される。

$$u_R / w_0 = \sqrt{\tan \phi / \lambda} \dots\dots\dots (14)$$

掃流砂層の厚さは比較的小さく、ほぼ粒径の4倍以内の程度なので、掃流砂層における濃度の変化を考慮せず、濃度を一定として $y=0$ から $y=h_s$ まで式(7)を積分すると

$$\rho u_{*p}^2 - \rho u_{*c}^2 = b \rho g \sin \theta h_s \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 u_{*c} は粒子の限界摩擦流速、無次元係数 b は

$$b = \frac{\bar{C}s}{\sin \theta (1-\bar{C})} \sqrt{\lambda \tan \phi} - 1 \dots\dots\dots (16)$$

である。式(16)には平均濃度を用いた。式(15)により掃流砂層の厚さが得られる。

$$\frac{h_s}{h} = \frac{1 - u_{*c}^2 / u_{*p}^2}{b + 1 - u_{*c}^2 / u_{*p}^2} \dots\dots\dots (17)$$

Rijn⁹⁾は掃流砂層の流動特性が粒子特性を表わすパラメータと水流強度を表わすパラメータによって決まると考えに基づき、開水路における実験データにより掃流砂層の平均濃度が次の実用式を提案した。

$$\bar{C} = 0.117 \frac{u_{*p}^2 / u_{*c}^2 - 1}{d_{50}(sg/v^2)^{1/3}} \dots\dots\dots (18)$$

式(7)に式(2)および式(12)を代入し、式(5)による $y=h_s$ の境界条件を利用して積分すると次式が得ら

れる。

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa y_0} \sqrt{u_{*p}^2 - bg \sin \theta (h_s - y)} \quad 0 \leq y \leq h_s \quad (19)$$

さらに、上式を積分して、境界条件 $y=0, u=u_R$ を適用すると、掃流砂層における流速分布は

$$u = u_R + \frac{2}{3} \frac{1}{\kappa y_0 bg \sin \theta} \left\{ \left[u_{*p}^2 - bg \sin \theta (h_s - y) \right]^{3/2} - \left[u_{*p}^2 - bg \sin \theta h_s \right]^{3/2} \right\} \quad (20)$$

$$\approx u_R + \frac{y}{\kappa y_0} \sqrt{u_{*p}^2 - bg \sin \theta h_s} + \frac{1}{2} \frac{y^2}{\kappa y_0} \frac{bg \sin \theta}{\sqrt{u_{*p}^2 - bg \sin \theta h_s}} \quad 0 \leq y \leq h_s$$

となる。

掃流砂量は次式で定義される。

$$q_s = \bar{C} \int_0^{h_s} u_s dy \quad (21)$$

掃流砂層において粒子の移動速度は $u_s = u - u_R$ であるから、式(20)により掃流砂量は

$$q_s = \frac{\bar{C} h_s}{\kappa y_0} \left[\frac{h_s}{2} \sqrt{u_{*p}^2 - bg \sin \theta h_s} + \frac{1}{6} \frac{bg \sin \theta h_s^2}{\sqrt{u_{*p}^2 - bg \sin \theta h_s}} \right] \quad (22)$$

となる。これにより、掃流砂層内の流速分布は次式になる。

$$u = w_0 \sqrt{\frac{\tan \phi}{\lambda}} + \frac{q_s}{\bar{C} h_s} \frac{\left[(u_{*p}^2 - bg \sin \theta h_s) \frac{y}{h_s} + \frac{1}{2} bg \sin \theta h_s \left(\frac{y}{h_s} \right)^2 \right]}{u_{*p}^2 / 2 - bg \sin \theta h_s / 3} \quad 0 \leq y \leq h_s \quad (23)$$

上式により水流層と掃流砂層の境界面の流速 u_p は次のように表わされる。

$$u_p = w_0 \sqrt{\frac{\tan \phi}{\lambda}} + \frac{q_s}{\bar{C} h_s} \frac{u_{*p}^2 - bg \sin \theta h_s / 2}{u_{*p}^2 / 2 - bg \sin \theta h_s / 3} \quad (24)$$

掃流砂層内の流速分布を相似と仮定すると、掃流砂量は次式のように近似できる。

$$q_s = \bar{C} \int_0^{h_s} (u - u_R) dy = \bar{C} \left(\int_0^{h_s} u dy - u_R h_s \right) = \bar{C} (a u_p - u_R) h_s \quad (25)$$

ここに、 a は定数である。これにより、水流層と掃流砂層との境界面の流速 u_p は

$$u_p = \frac{w_0}{a} \sqrt{\frac{\tan \phi}{\lambda}} + \frac{q_s}{a \bar{C} h_s} \quad (26)$$

になる。掃流砂層の厚さは式(17)で算定される。

2.3 抵抗係数

二次元等流の開水路流の抵抗係数は次式で定義される。

$$f = 2(u_{*p} / V)^2 \quad (27)$$

ここで、 V は断面平均流速である。

式(5)、(23)を y が0から h まで積分すれば、掃流砂を有する砂れき河床上の流れの抵抗係数は次式を得る。

$$f = 2 \left\{ \frac{w_0}{u_{*p}} \frac{h_s}{h} \sqrt{\frac{\tan \phi}{\lambda}} + \frac{q_s}{\bar{C} h u_{*p}} + \frac{1}{\kappa} \left[\left(1 - \frac{h_s}{h} \right) \ln \frac{h - h_s + y_0}{e y_*} + \frac{y_0}{h} \ln \frac{h - h_s + y_0}{y_0} \right] \right\}^{-2} \quad (28)$$

ここに、 e は自然対数の底である。

掃流砂量のゼロの場合には、 $h_s=0, y_0=0$ の条件により、式(28)は

$$f = 2 \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{e y_*} \right)^{-2} \quad (29)$$

となる。式(29)は砂れきの固定床に対する抵抗則、すなわちNikurads-Prandtlの対数抵抗式である。

一般に掃流砂層の厚さは水深よりかなり小さいので、式(28)は次式のように簡略化できる。

$$f = 2 \left\{ \frac{1}{\kappa} \left[\ln \frac{h + y_0}{e y_*} + \frac{y_0}{h} \ln \frac{h + y_0}{y_0} \right] \right\}^{-2} \quad (30)$$

式(29)、(30)より、掃流砂の存在により流れの抵抗係数は減少することが分かる。

3. 実験データとの比較

3.1 流速分布

図-3は平坦な移動床上の流れの流速分布について本文の理論式(5)と実験データと比較したものである。式(5)において y_0 , h_s は式(6), (17)および式(14), (18), (26)を用いて, $\phi=40^\circ$, $a=1/2$ で求めた。著者らは長さ25m, 幅51.5cm, 高さ60cmの勾配可変式水路で, 河床材料として防腐処理した木材の屑を用いて実験を行った。実験は河床が平坦で, 掃流砂による流水抵抗および河床上の流れの流速分布を測定するの目的であるから, 掃流砂のみ, 浮遊砂なしの状態で行う。流速は直径1cmのプロペラ流速計を用いて計測する。実験条件は表-1に示されている。Guy¹³⁾のデータは浮遊砂量がゼロであることを明記されている。図-3より, 計算値は流速分布の対数則と比較すると, 掃流砂により河床近くで流速が大きくなり, 水面のところで殆ど変わらないが, 実験値の傾向をよく表わしている。

3.2 抵抗係数

表-1は比較に用いる各研究者の実験データの概要である。移動床の流砂実験では, 掃流砂の発生を伴って河床が変動し, 実験中河床波が発生しやすく, 河床を平坦な形態に維持するには困難なので, 本文で定義した平坦な移動床モデルに対する高精度な実験データは少なく, 実際のデータは, 河床が平坦と明記されても, 河床の不均一性の影響を含んでいると思われる。また掃流砂量が大きくなると共に浮遊砂を発生するので, 浮遊砂により流水抵抗に及ぼす影響が無視できない。本文では, これら各影響の要素を考慮し, 実験データとして河床が平坦なもの, 掃流砂のみで浮遊砂なしのもの, また, 砂の動かないすなわち同一粒子で固定床の予備実験があるものなどの基準で選ぶ。また水路の側壁効果についてはVanoni-Brook法を用いて補正する。

図-4は流水抵抗係数について式(30)を実験データと比較したものである。図中芦田・道上の式(A-M Eq.)と山本の式(Y Eq.)による計算値との比較も同時

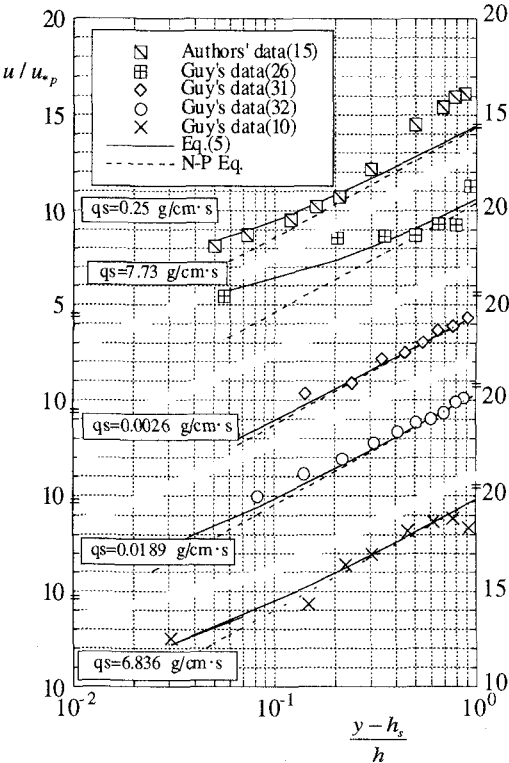


図-3 平坦な移動床上の流速分布

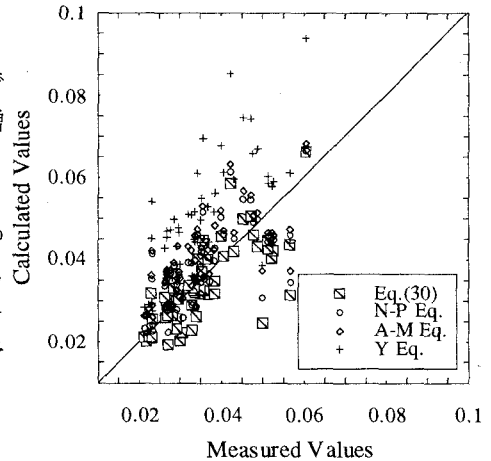
表-1 各研究者の実験データの概要

研究者	粒径 cm	勾配 ×10 ³	流速 cm/sec	水深 cm	幅 cm	粒子密度 g/cm ³	掃流砂量 g/cm·s	文献 番号
著者ら	0.075	0.021-0.333	7.12-26.5	8.5-20.13	51.5	1.12	0-0.553	
浅田, 石川	0.22-0.42	0.6-2.92	24.7-84.4	7.81-19.55	100	2.65	0-2.53	10
山本	0.027-0.12	0.23-4.07	11.19-75.95	1.06-32.7	60	2.65	0-2.98	10
山本(軽量砂)	0.062-0.282	0.89-7.15	41.7-87	5.6-30.29	60	1.48-1.8	0.0106-3.39	11
土木所	0.045-0.245	0.5-5.85	17-107.6	1.28-26.03	198	2.65	0-7.144	10
Simons	0.028-0.054	0.05-4.86	16.45-164	10.24-30.8	61-244	2.65	0-7.668	12
Guy et al	0.019-0.095	0.07-4.86	19.81-164	10.36-31.4	243.8	2.65	0-7.727	13
Wang et al	0.0076-0.095	0.015-7.28	10.49-16.40	8.7-34	61-24.38	2.65	0-7.73	14
Mantz	0.0018-0.0123	0.9-5.8	48.4-70.6	3-31.3	30	2.65	0.343-2.41	15

に示されている。図において、本文の理論式による計算値がと実験値と若干バラツキを示すものの、定性的にはよりよい結果がえられている。

4. 結語

平坦な移動床流れの抵抗則について、従来の研究では河床上の流砂の運動により河床の表面摩擦抵抗が増えるとされているが、本研究はそれと相反する知見、すなわち掃流砂により河床表面抵抗が減少するという結果を得た。これは移動床流れの抵抗算定に対してのみならず、移動床流れの系全体の運動機構を理解する上で重要であると考えられる。今後、さらに実験データを積み重ねて移動床流れの構造を詳細に検討する予定である。



参考文献

- 1] Lovera F. and Kennedy J. F.(1969): Friction-Factors for Flat-Bed Flows in Sand Channels, Journal of Hydraulics Division, Proc. of ASCE, Vol.95, No.HY4, pp.1227-1234
- 2] 山本晃一(1985): 一様砂からなる開水路移動床の抵抗と流砂量, 土木学会論文集, 第357号/II-3, pp.55-64
- 3] 芦田和男, 道上正則(1972): 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第206号, pp. 59-69
- 4] Rijn L.C. van (1982): Equivalent Roughness of Alluvial Bed, Journal of Hydraulic Division, Proc. of ASCE, Vol.108, No.HY10, pp.1215-1218
- 5] Yang Y. and Hirano M.(1994): Phase Interaction in Solid-Liquid Flows, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University, Vol.54, No.4, pp.279-292
- 6] 楊永荻, 平野宗夫(1994): 固液二相流の相間作用, 混相流, 第8巻, 4号, pp.306-314
- 7] Kobayashi N. and Seo S. N.(1985): Fluid and Sediment Interaction over a Plane Bed, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.111, No.6, pp.903-921
- 8] 江頭進治, 芦田和男, 高浜淳一郎, 田野中新(1991): 連続体モデルに基づく流砂量式の誘導, 水工学論文集, 第35巻, pp.441-446
- 9] Rijn L.C. van (1982): Sediment Transport, Part I: Bed Load Transport, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.110, No.10, pp.1431-1456
- 10] 山本晃一, 深見親雄(1978): 河川における土砂の移動機構に関する研究ノート, 建設省土木研究所資料第1416号, pp. 1-226
- 11] 山本晃一, 林正男(1990): 河川移動床模型実験材料としての軽量材料の水理特性, 建設省土木研究所資料第2905号, pp. 1-162
- 12] Simons D.B., Richardson M.L. and Albertson M.L.(1961): Flume Studies Using Medium Sand(0.45mm), USGS Prof. Paper 1498-A, pp.A1-A76
- 13] Guy H.P., Simons D.B. and Richardson E.V.(1966): Summary of Alluvial Channel Data from Flume Experiments, 1956-61, USGS Prof. Paper 462-I, pp.1-96
- 14] Wang S. and White W. R.(1993): Alluvial Resistance in Transition Regime, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.119, No.6, pp.723-741
- 15] International Research and Training Center on Erosion and Sedimentation (1978): Sediment Transport Data in Laboratorial Flumes, Publication of IRTCES, Banjing, Circular No.2, pp.1-102

図-4 表-1の実験データと式(30)の比較