

Upper Regime における波状路床上の流れの非線形解析

Perturbation Analysis of Open Channel Flows over a Wavy Bed in the Upper Regime

細田 尚*・村本嘉雄**

By Takashi HOSODA and Yoshio MURAMOTO

The fundamental characteristics of open channel flows over a wavy bed in the upper regime are investigated theoretically by means of the perturbation method. The depth averaged momentum equation including the effect of vertical acceleration is applied to the free surface profile analysis. Using the ratio of the amplitude of the wavy bed to the normal depth as the perturbation parameter, the 2nd order solution is derived to study the relation between the friction coefficient and the non-dimensional hydraulic parameters. The theoretical results are compared with the previous experimental studies to make clear the applicability and the drawbacks of the basic equation.

Keywords: open channel flow, wavy bed, resistance law, perturbation method

1. はじめに

本研究は、小規模河床波の発生・発達過程を解明するための基礎的な知見を得ることを目的として、upper regime にある波状路床上の流れの抵抗則について、摂動法による非線形解を用いて考察する。波状路床上の流れは、従来より1次元解析法を適用して導かれる鉛直加速度を考慮した水面形方程式を用いる方法¹⁾、および鉛直2次元流れとしての解析法^{2,3)}によって、波状路床と水面波、水深波の応答、底面せん断応力分布などの研究が行われてきた。それらの研究では、主として得られた線形解の特性ならびに実験結果との適合性が考察されてきたが、線形解析では波状路床の変化に伴う流れの抵抗則の変化は得られない。そこで、まず鉛直加速度を考慮した水面形方程式を用いて2次の摂動解を求め、見かけの抵抗係数と路床の波長・振幅比、平均水深・振幅比、フルード数などの無次元水理パラメータの関係を考察する。その際、基礎式誘導の前提となる流速分布の水深方向一様性などの仮定が比較的満たされやすいupper regime の流れを対象としている。次に、導かれた関係式と Yuen・Kennedy⁴⁾の実験結果を比較し、解析結果の適合性と適用限界を明らかにするとともに、底面せん断応力分布の不一致を改善するため加速・減速流効果の導入を試みる。

2. 基礎式とその無次元化

解析に用いられる基礎式は、圧力分布に鉛直加速度を考慮し、水深方向に積分された運動量方程式である。単位幅当たりの連続式 $q = \text{const.}$ (q : 単位幅流量) を用いて水面形方程式として示せば式 (1) のようになる。用いた座標系と記号の説明を図-1 に示した。

* 正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学教室
(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

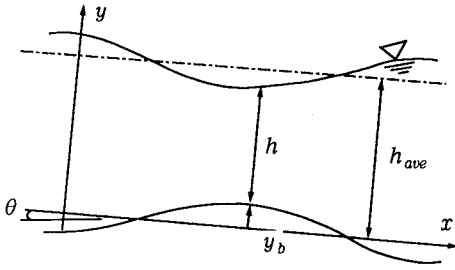


図-1 座標系と記号の説明

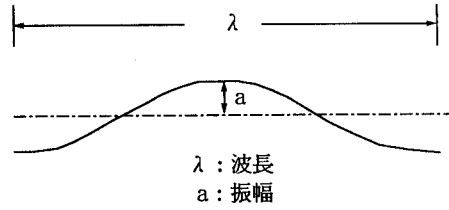


図-2 波状路床の特性量

$$\begin{aligned} & \frac{q^2}{3} \frac{d^3 h}{dx^3} - \frac{2}{3} \frac{q^2}{h} \frac{dh}{dx} \frac{d^2 h}{dx^2} + (gh \cos \theta - \frac{q^2}{h^2}) \frac{dh}{dx} + \frac{q^2}{3h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^3 - gh \sin \theta + \frac{\tau_b}{\rho} \\ &= -\frac{q^2}{2} \frac{d^3 y_b}{dx^3} + \frac{q^2}{2h} \frac{dh}{dx} \frac{d^2 y_b}{dx^2} - \frac{q^2}{h} \frac{dy_b}{dx} \frac{d^2 y_b}{dx^2} - gh \cos \theta \frac{dy_b}{dx} + \frac{q^2}{h^2} \frac{dh}{dx} \left(\frac{dy_b}{dx} \right)^2 + \frac{d}{dx} \left(Dh \frac{d}{dx} \left(\frac{q}{h} \right) \right) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 h :水深、 q :単位幅流量、 y_b :基準面からの路床高さ、 θ :平均路床こう配、 τ_b :底面せん断応力、 ρ :流体の密度、 D :渦動粘性係数、 g :重力加速度、 x :空間座標を表す。

これまで、(1) 式の線形解による路床と水面の応答特性が示され、同様に平面2次元場における鉛直加速度を考慮した基礎式とその線形解も導かれている⁵⁾。また、式(1)の路床変動のない場合の波状跳水を対象とした水面形解析法も開発されている⁶⁾。

本研究では、まず底面せん断応力を式(2)と仮定したときの2次までの摂動解を求める。その際、渦動粘性係数は簡単のため単位幅流量を用いて式(3)で表す。

$$\frac{\tau_b}{\rho} = f \frac{q^2}{h^2} \quad (2) \quad D = \alpha q \quad (3)$$

図-2に示した波状路床の振幅 a 、波長 λ および河床が平坦な場合の等流水深 $h_0 = (f q^2 / g \sin \theta)^{1/3}$ を用いて、式(4)に示した無次元量を導入し、式(1)を無次元化すれば式(5)が得られる。

$$\sigma = \frac{x}{\lambda}, \eta = \frac{h}{h_0}, \delta = \frac{y_b}{a}, \varepsilon = \frac{a}{h_0}, \mu = \frac{\lambda}{h_0}, Fr_0 = \frac{q/h_0}{\sqrt{gh_0 \cos \theta}} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \frac{d^3 \eta}{d\sigma^3} - \frac{2}{3} \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d^2 \eta}{d\sigma^2} + \mu^2 \left(\frac{\eta}{Fr_0^2} - \frac{1}{\eta^2} \right) \frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{1}{3\eta^2} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^3 - f \mu^3 \left(\eta - \frac{1}{\eta^2} \right) \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} \frac{d^3 \delta}{d\sigma^3} + \frac{\varepsilon}{2\eta} \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} - \frac{\varepsilon^2}{\eta} \frac{d\delta}{d\sigma} \frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} - \mu^2 \varepsilon \frac{\eta}{Fr_0^2} \frac{d\delta}{d\sigma} + \frac{\varepsilon^2}{\eta^2} \frac{d\eta}{d\sigma} \left(\frac{d\delta}{d\sigma} \right)^2 + \alpha \mu \left(\frac{1}{\eta^2} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2 - \frac{1}{\eta} \frac{d^2 \eta}{d\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

3. 摂動解による抵抗係数の表示

3.1 1次と2次の摂動解

波状路床の振幅 a と平坦河床の等流水深 h_0 の比 ε を摂動のパラメータとして、 η を式(6)のように表示する。 h_0 は平坦河床の等流水深として定義したが、線形理論の範囲では波状路床状の流れの平均水深でもある。これは、線形理論では抵抗則の変化を説明できないことを意味している。

$$\eta = 1 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots \quad (6)$$

さらに、路床高さを

$$\delta = \cos(2\pi\sigma) \quad (7)$$

とおいて式(5)に代入し、 ε の次数に応じて整理すれば1次と2次のオーダーに関して式(8)および式(9)が得られる。

1st order :

$$\frac{1}{3} \frac{d^3 \eta_1}{d\sigma^3} + \alpha \mu \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} + \mu^2 \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{d\eta_1}{d\sigma} - 3f \mu^3 \eta_1 = \left(\frac{2\pi\mu^2}{Fr_0^2} - \frac{(2\pi)^3}{2} \right) \sin(2\pi\sigma) \quad (8)$$

2nd order :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3} \frac{d^3 \eta_2}{d\sigma^3} + \alpha \mu \frac{d^2 \eta_2}{d\sigma^2} + \mu^2 \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{d\eta_2}{d\sigma} - 3f\mu^3 \eta_2 \\
 &= \frac{2}{3} \frac{d\eta_1}{d\sigma} \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} - \left(\frac{\mu^2}{Fr_0^2} + 2\mu^2 \right) \eta_1 \frac{d\eta_1}{d\sigma} - 3f\mu^3 \eta_1^2 + \alpha \mu \left\{ \left(\frac{d\eta_1}{d\sigma} \right)^2 + \eta_1 \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} \right\} \\
 & - \frac{(2\pi)^2}{2} \cos(2\pi\sigma) \frac{d\eta_1}{d\sigma} - (2\pi)^3 \sin(2\pi\sigma) \cos(2\pi\sigma) + \frac{2\pi\mu^2}{Fr_0^2} \eta_1 \sin(2\pi\sigma)
 \end{aligned} \quad (9)$$

まず、従来の線形解である1次のオーダーの解を示す。 η_1 を

$$\eta_1 = A_1 \cos(2\pi\sigma + \phi_1) \quad (10)$$

において式 (8) に代入すれば、 A_1 と ϕ_1 の関係式

$$\begin{aligned}
 -A_1 P_1 \sin\phi_1 + A_1 Q_1 \cos\phi_1 &= R_1 \\
 A_1 P_1 \cos\phi_1 + A_1 Q_1 \sin\phi_1 &= 0
 \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる。ここに、 P_1, Q_1, R_1 は次式で定義される。

$$P_1 = -3f\mu^3 - (2\pi)^2 \alpha \mu, Q_1 = \frac{(2\pi)^3}{3} - 2\pi\mu^2 \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right), R_1 = \frac{2\pi\mu^2}{Fr_0^2} - \frac{(2\pi)^3}{2} \quad (12)$$

(11) 式を解けば A_1 と ϕ_1 の表示式 (13) が導かれる。

$$A_1 = \frac{|R_1|}{\sqrt{P_1^2 + Q_1^2}}, \cos\phi_1 = \frac{Q_1 R_1}{A_1(P_1^2 + Q_1^2)}, \sin\phi_1 = -\frac{P_1 R_1}{A_1(P_1^2 + Q_1^2)} \quad (13)$$

式 (13) 式中、微小な P_1^2 を無視すれば、 $A_1 \rightarrow \infty$ となる共鳴関係式 (14) と $A_1 = 0$ となる振幅0の関係式 (15) が導かれる (図-3参照)。

$$Fr_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2\pi/\mu)^2 + 3}} \quad (14) \quad Fr_0 = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi/\mu)} \quad (15)$$

2次の解も同様に求められる。(10) 式を (9) 式右辺に代入すれば次式となる。

$$\frac{1}{3} \frac{d^3 \eta_2}{d\sigma^3} + \alpha \mu \frac{d^2 \eta_2}{d\sigma^2} + \mu^2 \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{d\eta_2}{d\sigma} - 3f\mu^3 \eta_2 = B_{20} + B_{21} \cos(4\pi\sigma) + B_{22} \sin(4\pi\sigma) \quad (16)$$

ここに、 B_{20}, B_{21}, B_{22} は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
 B_{20} &= -\frac{3}{2} f\mu^3 A_1^2 + \frac{(2\pi)^3}{4} A_1 \sin\phi_1 - \frac{2\pi\mu^2}{2Fr_0^2} A_1 \sin\phi_1 \\
 B_{21} &= \left(\frac{(2\pi)^3}{3} + \frac{2\pi\mu^2}{2Fr_0^2} + 2\pi\mu^2 \right) A_1^2 \sin 2\phi_1 - \left(\frac{3f\mu^3}{2} + \alpha\mu(2\pi)^2 \right) A_1^2 \cos 2\phi_1 \\
 & + \frac{(2\pi)^3}{4} A_1 \sin\phi_1 + \frac{2\pi\mu^2}{2Fr_0^2} A_1 \sin\phi_1 \\
 B_{22} &= \left(\frac{(2\pi)^3}{3} + \frac{2\pi\mu^2}{2Fr_0^2} + 2\pi\mu^2 \right) A_1^2 \cos 2\phi_1 + \left(\frac{3f\mu^3}{2} + \alpha\mu(2\pi)^2 \right) A_1^2 \sin 2\phi_1 \\
 & + \frac{(2\pi)^3}{4} A_1 \cos\phi_1 + \frac{2\pi\mu^2}{2Fr_0^2} A_1 \cos\phi_1 - \frac{(2\pi)^3}{2}
 \end{aligned}$$

η_2 を式 (17) のように表して式 (16) に代入すれば、式 (11) に対応した式 (18) が導かれる。

$$\eta_2 = A_{20} + A_{22} \cos(4\pi\sigma + \phi_2) \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 B_{21} &= A_{22} P_2 \cos\phi_2 + A_{22} Q_2 \sin\phi_2, \quad P_2 = -3f\mu^3 - (4\pi)^2 \alpha \mu, \\
 B_{22} &= -A_{22} P_2 \sin\phi_2 + A_{22} Q_2 \cos\phi_2, \quad Q_2 = \frac{(4\pi)^3}{3} - 4\pi\mu^2 \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right).
 \end{aligned} \quad (18)$$

これらの式を解いて2次のオーダーの解が次のように表される。

$$A_{20} = -\frac{B_{20}}{3f\mu^3}, A_{22} = \sqrt{\frac{B_{21}^2 + B_{22}^2}{P_2^2 + Q_2^2}}, \sin\phi_2 = \frac{B_{21}Q_2 - B_{22}P_2}{A_{22}(P_2^2 + Q_2^2)}, \cos\phi_2 = \frac{B_{21}P_2 + B_{22}Q_2}{A_{22}(P_2^2 + Q_2^2)} \quad (19)$$

3.2 抵抗係数の表示

式 (10) と (17) を式 (6) に代入して η を再記すれば次のようになる。

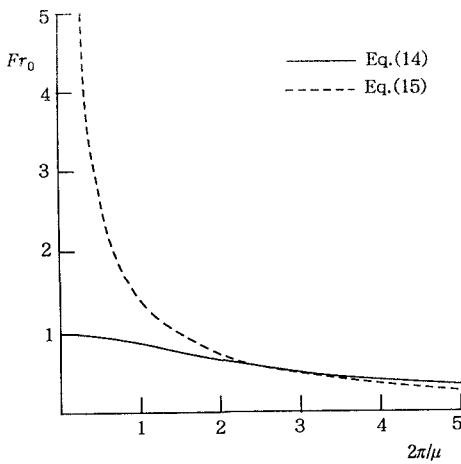


図-3 共鳴関係と振幅 θ の関係

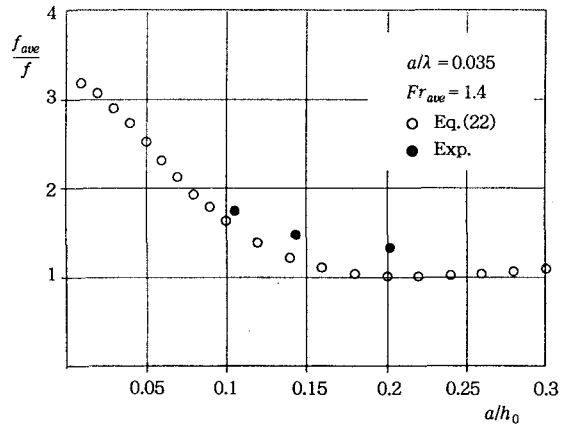


図-4 見かけの抵抗係数と ε の関係(路床 1)

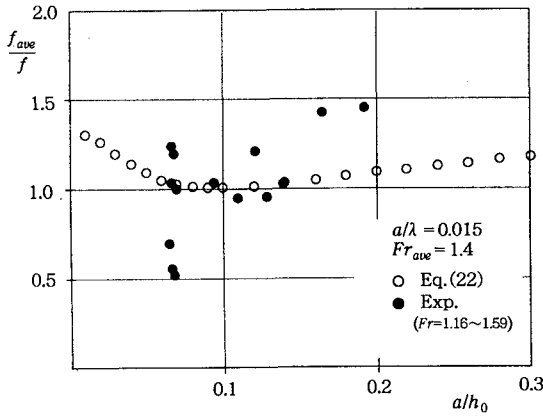


図-5 見かけの抵抗係数と ε の関係(路床 2)

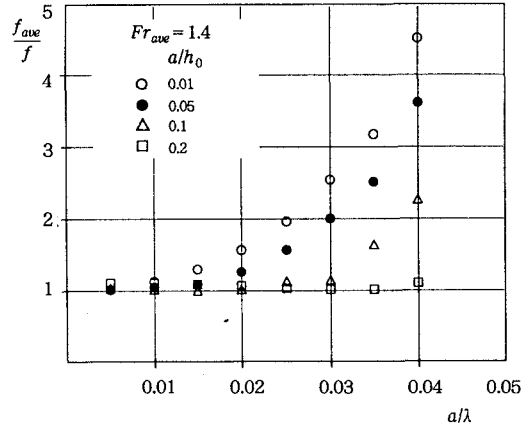


図-6 見かけの抵抗係数と波形こう配の関係
(解析結果, $Fr_{ave} = 1.4$)

$$\eta = 1 + \frac{a}{h_0} A_1 \cos(2\pi\sigma + \phi_1) + \left(\frac{a}{h_0}\right)^2 (A_{20} + A_{22} \cos(4\pi\sigma + \phi_2)) \quad (20)$$

上式を、波状路床の一波長で平均すれば平均水深の表示として次式が得られる。 ε^2 の項が波状路床の効果による抵抗の増加を表している。

$$h_{ave} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda h dx = h_0 (1 + \varepsilon^2 A_{20}) \quad (21)$$

式(21)を見かけの抵抗係数として書き表せば次のようになる。

$$f_{ave} = \frac{u_*^2}{u_{ave}^2} = \frac{gh_{ave} \sin \theta}{(q/h_{ave})^2} = f \left(\frac{h_{ave}}{h_0} \right)^3 = f (1 + \varepsilon^2 A_{20})^3 \quad (22)$$

4. 実験結果との比較

次に、導かれた摂動解と Yuen・Kennedy⁴⁾の実験結果を比較し、解析結果の妥当性および適用限界を考察する。実験は表-1に示した2通りの滑面波状路床で行われている。

まず、フルード数を1.4とし、 a/λ を実験の路床1と2に合わせて

0.035, 0.015としたときの、見かけの抵抗係数 f_{ave} と平坦路床の抵抗係数 f の比と ε の関係を図-4および図-5に示した。フルード数 Fr を1.4としたのは、平均底面せん断応力が計測されているデータの多くが $Fr=1.4$ の近傍にあったからである。また、平坦路床の抵抗係数 f の値として、レイノルズ数の範囲を考慮して0.0018を用いた。図

表-1 波状路床の諸元

	波長 λ (cm)	振幅 a (cm)
路床 1	30.48	1.034
路床 2	45.72	0.701

路床1, 2は各々 Run 100, 200 series に対応

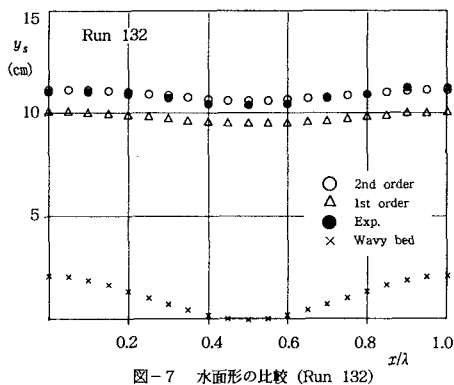


図-7 水面形の比較 (Run 132)

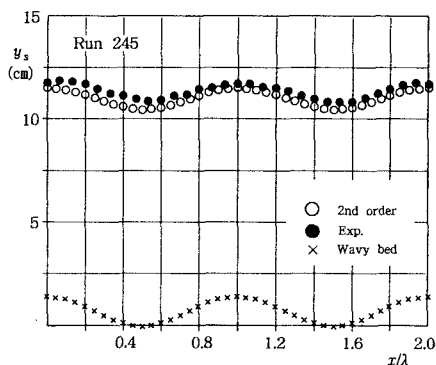


図-8 水面形の比較 (Run 245)

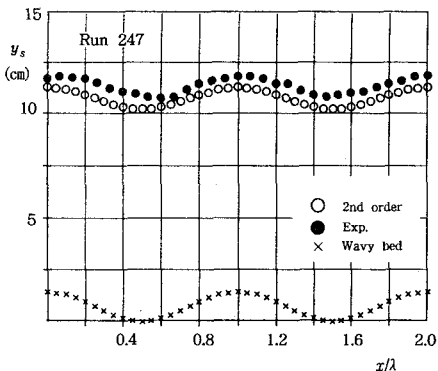


図-9 水面形の比較 (Run 247)

表-2 実験の水理諸量

	路床	Froude数	平均流速 (m/s)	平均水深 (m)	摩擦速度 (m/s)	f_{ave}
Run 132	1	1.49	1.466	0.098	0.0819	0.0031
Run 245	2	1.16	1.155	0.104	0.0536	0.0022
Run 247	2	1.18	1.167	0.101	0.0494	0.0018

を見ると、路床1では、見かけの抵抗係数は平坦路床の抵抗係数の2倍程度になることがあること、解析結果と実験結果との適合性は十分ではないが、実験結果の特性をほぼ再現していることがわかる。

図-6には、 ε をパラメータとしたときの f_{ave}/f と a/λ の関係を示した。波状路床の波形こう配 a/λ の増加とともに、見かけの抵抗係数も増加することがわかる。

次に、水面形に関する解析と実験の比較を示したのが図-7～図-9である。比較に用いられた実験の水理諸量を表-2に示す。図-7には線形解も示した。これは f_{ave} が f の約1.7倍の例であり、線形解は実験結果と適合しない。図-7から図-9を通して、2次の解を考慮した解析結果は実験結果にはほぼ適合していることがわかる。

次に、底面せん断応力分布が計測されているRun 245と247について、解析結果と実験結果の比較を示したのが図-10 (a), (b)である。解析結果は実験結果と適合せず、とくに解析結果の振幅がかなり小さい。そこで次に、河床波の発生限界の理論解析に導入された、水深の増減による加速・減速の効果を考慮して、解析結果の改良を試みる。

5. 加速・減速効果の導入

水深の増減による流速の加速・減速に伴い、流速分布および底面せん断応力が変化する。この効果を次の式(23)を用いて評価することで、河床波の発生限界および領域区分が試みられた^{7,8)}。

$$\frac{\tau_b}{\rho} = f \frac{q^2}{h^2} \left(1 - \tilde{\alpha} \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad (\tilde{\alpha}: \text{定数}) \quad (23)$$

そこで本研究でも、底面せん断応力の評価に式(23)を用いて、モデルの改良を試みる。摂動解の修正はわずかなので、省略する。

式(23)の $\tilde{\alpha}$ を20として、Run 245とRun 247のせん断応力分布を示したのが図-11 (a), (b)である。実験結果との適合性は十分とはいえないが、式(2)を用いた場合よりかなり改善されている。図-12 (a), (b)に

は、式 (23) を用いたときの水面形を示した。式 (2) を用いた場合とほとんど変化せず、式 (23) を用いることの水
面形への影響はほとんど見られない。

6. おわりに

本研究は、鉛直加速度を考慮した水面形方程式の摂動解を用いて、upper regimeにある波状路床上の流れの基本的特性を考察したものである。本研究の範囲では、抵抗則および水面形に関して、2次の摂動解を用いて実験結果をほぼ再現できたが、底面せん断応力分布については、少なくとも流速の加速・減速効果をモデル中に考慮する必要性が示された。今後、より広範囲の水理条件での解析と実験の比較を行っていきたい。

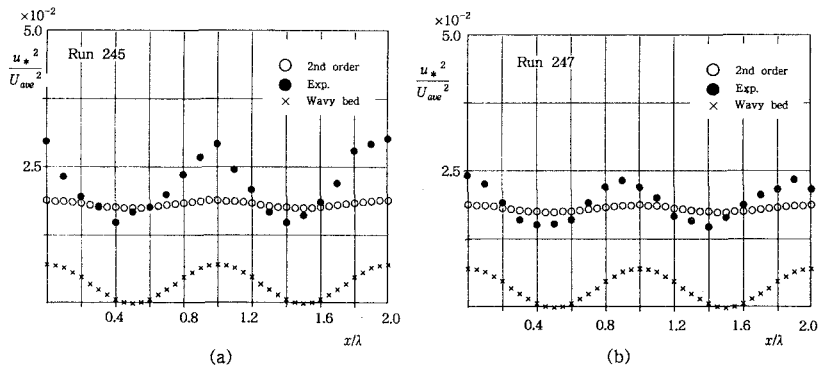


図-10 底面せん断応力分布の比較

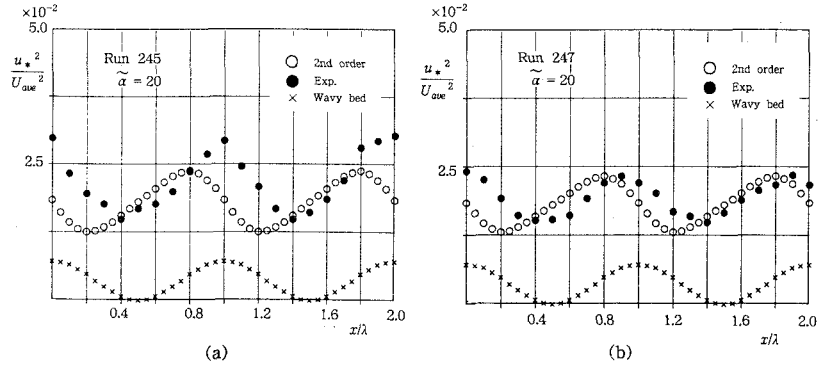


図-11 加速・減速効果を考慮した底面せん断応力分布

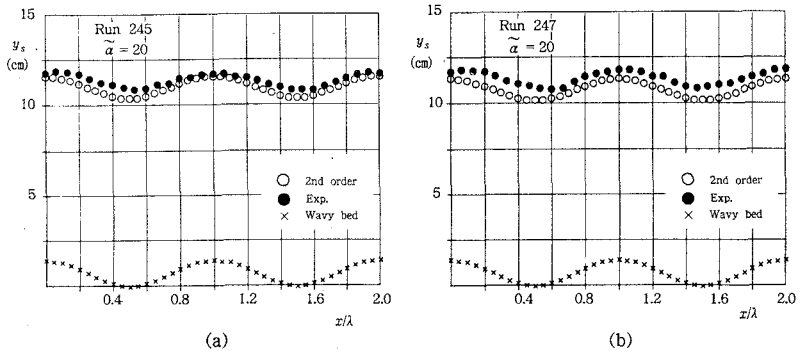


図-12 加速・減速効果を考慮した水面形

[参考文献]

- 1) Iwasa, Y. and Kennedy J.F.: Free surface shear flow over a wavy bed, Proc. ASCE, No.94, HY - 2, pp.431 - 454, 1968.
- 2) 林 泰造・大西光陽: せん断流モデルによる2次元河床波発生 of 理論的研究, 第25回水理講演会論文集, pp.85 ~92, 1981.
- 3) Kobayashi, N.: Turbulent flows over a wavy boundary and formation of bed forms in erodible channels, Dissertation for the degree of Ph D. at MIT, 1979.
- 4) Yuen, A.F.H. and Kennedy, J.F.: A laboratory investigation of free surface flows over wavy beds, IIHR Report No.121, Iowa Inst. Hydr. Res., Univ. Iowa, 1971.
- 5) 細田 尚・余越正一郎・岩佐義朗: 三次元波状路床上の流れに関する解析, 広島大学工学部研究報告, 第32巻 第1号, 1983, pp.47~51.
- 6) 細田 尚・多田彰秀: 鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析, 水工学論文集 第38巻, 1994, pp.457 - 462.
- 7) 椿東一郎・斎藤 隆: 流れによる Sand Wave の発生限界, 九州大学工学集報, 第40巻5号, pp.741~748, 1967.
- 8) Nakagawa, H. and Tsujimoto, T.: Sand bed instability due to bed load motion, Proc. ASCE, Vol. 106, HY 12, pp.2029~2051, 1980.