

常・射流が混在する2次元浅水流の数値計算法

Numerical Model for 2-Dimensional Shallow Flow Including
Sub- and Super-Critical Conditions

岡部健士* 山下秀基** 天野裕仁***

By Takeshi OKABE, Hideki YAMASHITA and Hirohito AMANO

The purpose of this study is to improve the method for calculating 2-dimensional shallow flow in which sub- and super-critical conditions coexist. The flow is described by using equations of mass and momentum conservation, which incorporate arbitrary curve-linear space coordinates. As a numerical solution method, MacCormack's time-splitting finite difference scheme is recommended. Some problems in practical application of this model are discussed from several points of view. An experiment is performed by using a flume with gradually expanding width and sudden change in bed slope. The applicability of the numerical model is tested by comparing experimental and calculated results.

keywords : 2-dimensional shallow flow, flow transition, numerical solution,
MacCormack's scheme

1. まえがき

河川平面流況の数値計算法に関する研究はかなり長年にわたって続けられており、すでに有用なノウハウが多数集積されている。しかし、とくに最近の多自然型川づくりを始めとする複雑な河道形状の維持・管理計画において、しばしば必要となる常・射流が混在した流れの数値計算法については、実用上の観点よりさらに検討を要する問題が残されているように思われる。

河道の幾何条件の複雑さに起因して生じる常・射流混在流れの一数値計算法として、一般座標系について記述された保存形式の基礎方程式をMacCormackの時間分割・陽的差分法によって数値解析する方法が注目されている。本法は、境界条件の取り扱いの簡便さや流れの遷移区間の解の鋭敏さにおいて他の方法より優れていることから、その発展に期待が寄せられているが未だに汎用化の段階までには達していない。

本研究では、保存方程式とMacCormack法に基づく2次元浅水流の数値解法の諸問題について多面的な検討を加えた。また、従来は差分格子や数値粘性などの計算理論に重点が置かれ、解の精度に関する検討が充分でなかったことを鑑み、本研究では、支配断面、平面形状が曲線となる跳水そして剥離が同時に発生している流れの計測実験を行い、この結果と計算結果との比較を通して本計算法の妥当性を検討した。

* 正会員 工博 徳島大学助教授 工学部建設工学科

(〒770 徳島市南常三島町 2-1)

** 学生会員 徳島大学大学院 建設工学専攻 (同上)

*** 学生会員 徳島大学工学部 建設工学科 (同上)

2. 基礎式¹⁾

基礎式として、一般曲線座標系について記述されたSt. Venant方程式を用いる。物理面上の直交直線座標を (x, y) 、これと非線形な関係にある写像面の座標を (ϕ, ψ) 、さらに ϕ, ψ 座標値の (x, y) 座標における偏微係数を $\phi_x, \phi_y, \psi_x, \psi_y$ とするとき、St. Venant方程式は次式のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \psi} = \mathbf{D}_\phi + \mathbf{D}_\psi \quad (1)$$

ここに、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{h}{J} \\ \frac{u^x h}{J} \\ \frac{u^y h}{J} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{u^\phi h}{J} \\ \frac{1}{J} [u^x u^\phi h - (\phi_x T_{xx} + \phi_y T_{xy})] \\ \frac{1}{J} [u^y u^\phi h - (\psi_x T_{yx} + \psi_y T_{yy})] \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{u^\psi h}{J} \\ \frac{1}{J} [u^x u^\psi h - (\phi_x T_{xx} + \phi_y T_{xy})] \\ \frac{1}{J} [u^y u^\psi h - (\psi_x T_{yx} + \psi_y T_{yy})] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} g h (S_{0x}^\phi - S_{fx}^\phi) \\ \frac{1}{J} g h (S_{0y}^\phi - S_{fy}^\phi) \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} g h (S_{0x}^\psi - S_{fx}^\psi) \\ \frac{1}{J} g h (S_{0y}^\psi - S_{fy}^\psi) \end{bmatrix}$$

$$S_{0x}^\phi = -\phi_x \frac{\partial H}{\partial \phi}, \quad S_{0x}^\psi = -\psi_x \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad S_{0y}^\phi = -\phi_y \frac{\partial H}{\partial \phi}, \quad S_{0y}^\psi = -\psi_y \frac{\partial H}{\partial \psi}$$

ただし、 t = 時間、 h, H = 水深および水位、 u^x, u^y = 物理面上の x および y 方向の流速、 u^ϕ, u^ψ = 流速ベクトルの ϕ および ψ 軸方向の反変成分、 g = 重力加速度、 $(S_{0x}^\phi, S_{0x}^\psi, S_{0y}^\phi, S_{0y}^\psi)$ 、 $(S_{fx}^\phi, S_{fy}^\phi, S_{fx}^\psi, S_{fy}^\psi)$ 、 $(T_{xx}, T_{xy}, T_{yx}, T_{yy})$ = 一般曲線座標に変換された水位勾配、河床摩擦勾配、および乱流せん断応力の水深方向積分値、 J = 座標変換のヤコビアンである。なお、河床摩擦勾配はManning則や対数則等の抵抗則を導入すれば流速や水深等の関数として定式化され、乱流せん断力は混合長型あるいは拡散型の構成則を用いれば速度勾配と関係づけられる。

3. MacCormack法に基づく数値計算法

3. 1 計算法の基本

基礎式の数値解法として、Garcia²⁾、清水ら¹⁾、中谷ら³⁾も検討しているMacCormackの陽的差分法に基づくtime-phase splitting schemeを採用する。この方法は、ある時間ステップ Δt 内において(1)式を、

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \phi} = \mathbf{D}_\phi \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \psi} = \mathbf{D}_\psi \quad (3)$$

のようにphase分割し、両者を Δt より更に小さい時間ステップ Δt_ϕ および Δt_ψ で解いた結果を接続してゆくものである。すなわち、(2)および(3)式に関するMacCormackの差分演算子をそれぞれ $L_\phi(\Delta t_\phi)$ および $L_\psi(\Delta t_\psi)$ とするとき、 (ϕ, ψ) 平面上の任意の点 (i, j) における $(n+1)$ 時間ステップの解 $\mathbf{A}_{i,j}^{n+1}$ は、 n 時間ステップの解 $\mathbf{A}_{i,j}^n$ より、次式に基づいて求められる。

$$\mathbf{A}_{i,j}^{n+1} = [L_\psi(\Delta t_\psi)]^m [L_\phi(\Delta t_\phi)]^\ell [L_\psi(\Delta t_\psi)]^\ell [L_\phi(\Delta t_\phi)]^m \mathbf{A}_{i,j}^n \quad (4)$$

ここに、 ℓ および m は L_ϕ および L_ψ の繰り返し回数であり、 $\Delta t_\phi = \Delta t / (2m)$ 、 $\Delta t_\psi = \Delta t / (2\ell)$ である。

差分演算子 L_ϕ , L_ϕ は, さらに予測子・修正子の2段階に分かれる。ここで, 求積法(コントロールボリューム法)の観点より両者の物理的意義を考えてみよう。例として L_ϕ に着目する。図-1は ϕ 軸を横断方向にとった場合において, 解析対象領域を節点に対応したコントロールボリュームに細分割した状況の模式図である。なお, $k=1$ および N のコントロールボリュームは, 他の点のものの1/2である。いま, 予測子では後退差分, 修正子では前進差分を用いるも

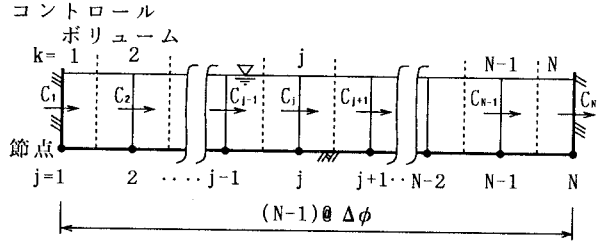


図-1 ϕ 軸方向のコントロールボリューム

のとして物理量の ϕ 方向フラックス C_j が解に及ぼす効果をみたとき, $C_1 \sim C_N$ が, 予測子では $k=2 \sim N$ のコントロールボリュームの物理量を, 修正子では $k=1 \sim (N-1)$ のものを変化させると解釈すれば, 解析領域全体に関する物理量の保存則が保証される。なお, $D_{\phi, j}$ が解に及ぼす影響は, コントロールボリュームごとに評価されるので特に問題とならない。ここで注意を要することは, $k=1$ および N のコントロールボリュームは他の点のものの1/2であるという点である。 L_ϕ における直前のステップの解を $(A_{i, j})^0$, 予測子・修正子の解を $(A_{i, j})^P$ および $(A_{i, j})^C$ とすれば,

$$(A_{i, j})^P = (A_{i, j})^0 - \frac{\Delta t \phi}{\Delta \phi} \left[(C_{i, j})^0 - (C_{i, j-1})^0 \right] + \Delta t \phi ((D_\phi)_{i, j})^0 \quad (5)$$

$$(A_{i, j})^C = \frac{1}{2} \left\{ (A_{i, j})^P + (A_{i, j})^0 - \frac{\Delta t \phi}{\Delta \phi} \left[(C_{i, j+1})^P - (C_{i, j})^P \right] + \Delta t \phi ((D_\phi)_{i, j})^P \right\} \quad (6)$$

であるが, 上述のことを鑑みれば, $J=1$ あるいは N のときには(4)および(5)式中の $\Delta \phi$ を $(\Delta \phi/2)$ とする必要がある。このような修正を施さない場合, 計算上, 解析領域外に余分なコントロールボリュームを設定していることになる。これは, 換言すれば, 解析領域外への物理量の輸送を認めることとなり, 例えば, 解析領域の上下流端での流量が一定の条件化で, その間の水容積次第に減少するというような, 不合理な解がもたらされる。以上のことは, 通常開いた境界を持つ ϕ 軸についても同様である。

3. 2 境界条件

境界には, 側壁としての固体境界と解析領域の上下流端断面としての開境界がある。まず, 固体境界には, no-slip conditionあるいはslip conditionが適用されるが, 計算領域を横断方向にかなり細かくしない限り, slip-condition ($u^\phi \neq 0$)の方が妥当であると思われる。この場合, 境界条件は $u^\phi = 0$ であるが, 上述の計算方法(保存則の成立が保証されるもの)は, ひとまず $u^\phi \neq 0$ のを与える。そこで, これを単純に $u^\phi = 0$ と修正すると, 解析領域全体に関する保存条件が破壊されることは明白である。合理的な解を得るには $u^\phi = 0$ とすることによる運動量の欠損分を他の点に振り分ける必要がある。その具体的な方法は新たな課題であるが, 後に示す計算例においては, 以下のように処理を行った。

例として, $j=1$ の点について述べる。(5)式の計算の結果, 求められた $j=1$ の点の流速 u^x, u^y を $u^\phi = 0$ の条件で u^x, u^y に修正したものとする。このとき, 修正前後で

(x方向の運動量方程式)

$$\left[(u_x - u_x) \frac{h}{J} \right]_{j=1} \equiv \Delta a_2 \quad (7)$$

(y方向の運動量方程式)

$$\left[(u_y - u_y) \frac{h}{J} \right]_{j=1} \equiv \Delta a_3 \quad (8)$$

のような、運動量の残差が生じる。そこで、この残差を、上述したようにコントロールボリュームの大きさを考慮しながら、 $k=2$ のコントロールボリュームに付加した。つまり、 $j=2$ の点の物理量は、修正後の物理量を $(A_{i,j})^P$ として、次式のように修正される。

$$(A_{i,2})^P=(A_{i,2})^P+\frac{\Delta A}{2} \tag{9}$$

ここに、

$$\Delta A=\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \end{bmatrix} \tag{10}$$

である。

一方、開境界については、上流端において流入流量 Q が条件として与えられ、下流端では水位が条件として与えられる。2次元流れに関しては、さらに流速や水位の横断分布の条件も必要であるが、これらの設定方法を一般的に論議することは困難で、取り扱う問題に応じて適宜決定するしかない。

3. 3 適用上の諸問題

(a) 時間ステップの決定方法

時間ステップ Δt_ϕ および Δt_ϕ は、全計算点においてC.F.L.条件を満たすように算定しなければならない。後の計算例においては、両者の許容最大値を清水ら¹⁾の式で計算したが、これらをそのまま用いたのでは数値不安定が発生し易く、また、許容値よりも小さくしすぎても解が不安定になり、結局、その7割程度の値に基づくのが最善であることがわかった。

(b) 人工粘性

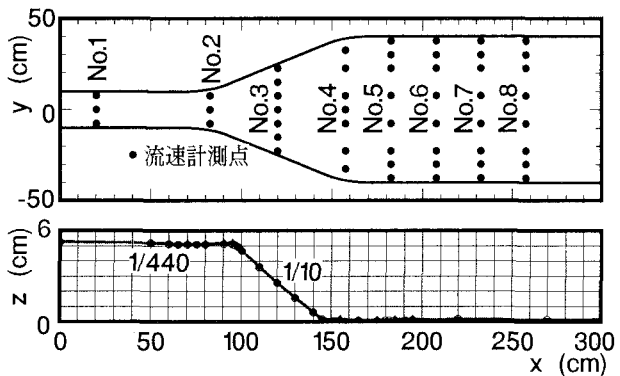
基礎式の離散化や計算上の打ち切り誤差等に起因する数値不安定を除去する手段として、T.V.D.型⁴⁾や拡散型⁵⁾等の人工粘性を付加する方法が提案されており、その有効性が認められている。本研究において、T.V.D.型あるいは拡散型の人工粘性を適用してみたところ、T.V.D.型人工粘性の方がより有用なことが明らかにされた。

4. 適合性の検討

漸変流の仮定に基づくSt. Venant方程式の数値解が、多様な現実の常・射流混在流れをどの程度の確に再現できるかは非常に興味深いところであるが、これに関する実測データの集積は必ずしも十分ではない。本研究では、河床勾配の急変と堰の存在により、流れの遷移点の平面形状が曲線的になるとともに、逆流域も発生する流況を実験的に観測し、この資料に基づいて計算法の適合性を検討した。

4. 1 実験概要

図－2に実験水路の平面・縦断形状を示す。水路幅は、上流区間で20cmであるが、中間部の約1mの区間で80cmまで拡大している。水路床の縦断勾配は上流区間では約1/440の緩勾配で



図－2 水路の形状および流速の測定点

あるが、拡幅区間内で約1/10に急増し、
 広幅区間ではほぼ水平となっている。
 水路床には、全面にわたって平均粒径
 1.5mmの均一砂をラッカーニスで転圧し
 ながら貼り付けた。この粗面の相当砂
 粒粗度 k_s は、別途に実施した等流実
 験の結果より、 $k_s = 1.2\text{mm}$ と決定され
 た。実験では、 $Q = 5.14\text{ l/sec}$ の定常
 流量を、下流端水深を2.45cmの一定値
 に保つ条件で通水しつつ、水位と流速
 ベクトルの水平2成分を計測した。水位
 計測は、縦断方向に10~50cmのピッ
 チで設定した横断面内の3~7点で実
 施した。また、とくに跳水（波状跳水
 に近い）の発生部分については、その
 開始点と波状になった水面の峰と谷の
 曲線形状を測定した。一方、流速計測
 は、図-2の黒点で示された合計52箇
 所において、水路床からの高さの異な
 る6点を選び実施した。計測器具とし
 ては、直径5mmの小型電磁流速計と口
 径1mmの極細ピトー管を適宜使い分け
 た。

4. 2 実験結果

水位の縦断形状、水深方向に平均化された流速ベクトルそして跳水の平面形状を図-3（a）および（b）に示す。水位の縦断形としては、水路中心線上と、左右の側壁からそれぞれ水路幅の1/10の距離だけ内側の地点のものを描いている。また跳水の平面形状については、常流側から順に、跳水の開始点、第1の峰、第2の峰および跳水の完了点を結ぶ曲線を示している。

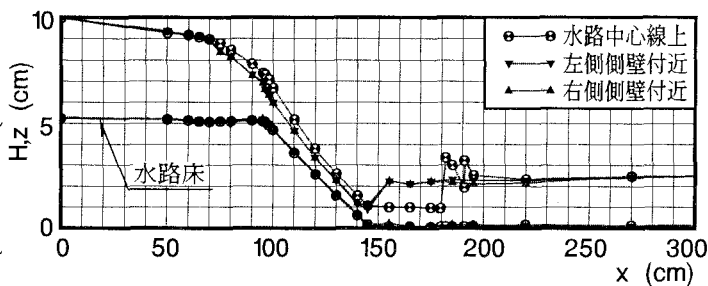
流れは、No.2の直上流で常流から射流へ遷移し、急勾配斜面上を射流状態で通過したのち、図に示すように湾曲した形状で跳水して常流へ遷移している。また、流れの横断形状は、射流区間において中央部が盛り上がるという特徴が認められる。一方、流速ベクトル図においては、急勾配区間で放射状に拡がった流れが、跳水区間で急激に絞り込まれ、その後、再度徐々に拡散して一様流に移行する様相が見受けられる。なお、図には明瞭に示されていないが、跳水区間の下流の左右側壁付近（約 $x = 150 \sim 250\text{cm}$ ）に最大幅約5cmの逆領域が存在している。また、水路幅の拡大開始直後のNo.2断面で、側壁近傍の流速が水路中央部のものよりわずかに大きい傾向も認められる。

4. 3 計算結果ならびに実験値との比較検討

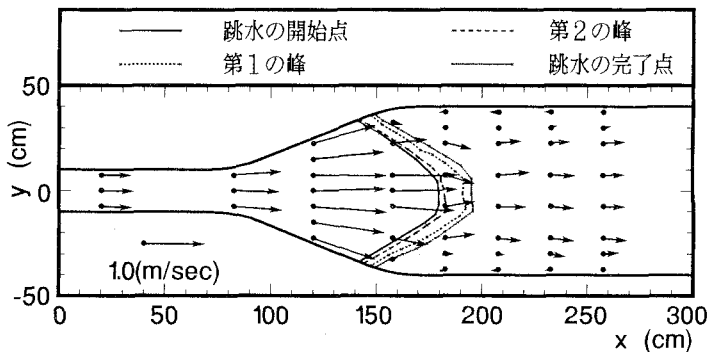
計算結果の適合性は、3章で述べた基礎式の数値解析手法のみでなく、計算格子の構成方法や乱流せん断応力の構成則、さらには河床や側壁の抵抗則の選定法など多岐にわたる因子によって左右される。しかし、乱流せん断応力や河床抵抗の問題は、流体力学的課題として別途検討すべきものなので、ここでは主として計算格子の構成方法に注目した検討の結果を紹介する。

（a）計算例1

実際河川の流況解析を行う場合、河道の形状データは、通常、河幅オーダーのピッチで測定した横断面形



（a）水路床および流れの縦断形状の計測結果



（b）流速ベクトルおよび跳水部の平面形状の計測結果

図-3 実験の計測結果

状の形で与えられる。しかし、流況の再現性や数値安定性を考えるとき、上述の計算ピッチは大きすぎることは明白で、適宜いわゆる断面内挿が行われる。このときの最も単純な方法は、流況変化の著しい区間に、より小さい均一ピッチの内挿断面を入れる方法であろう。図-4は、このような均一ピッチの断面内挿を想定した際の計算メッシュと計算結果を示すものである。ここに、水位縦断形状としては水路中心線沿いのものと左右の側壁からそれぞれ1メッシュ内側の点のものを描いている。また計算では、河床面の摩擦勾配を粗面对数則に基づき、乱流せん断応力を渦動粘性係数の定義式に基づいて算定するとともに、側壁の摩擦抵抗応力(τ_0)も $\tau_0 = 0.005 \rho U_\phi^2$ のような経験式⁶⁾により評価した。なお、これらの計算条件は後述の計算例でも同様である。

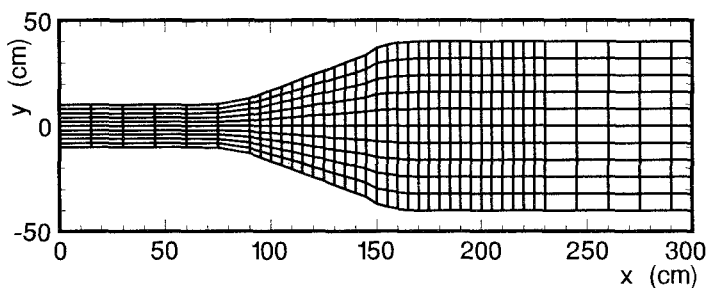
さて、流速ベクトルの分布は概ね良く再現されているが、跳水区間の下流の逆流域の長さは実験値よりかなり短い。また、No. 7, No. 8断面の流速の横断方向分布は実験結果よりかなり一様化している。一方、水位の縦断形状も、全体としては実験結果にかなり近いものとなっている。ただし、跳水部周辺の水面形の計算値は、実測のものよりかなり鈍化したものとなっている。

また、縦断方向の格子間隔の急変部において、計算による水面形に不自然な凸部が現れている。

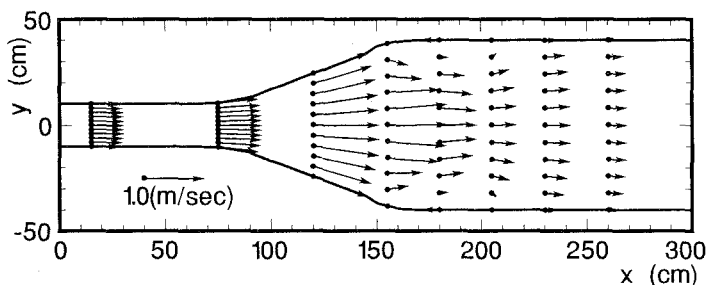
(b) 計算例2

計算例1の結果の一部に、不自然な水面形が現れた原因は、格子間隔を急変させたことによるものと思われる。そこで、計算例2では図-5(a)に示すように、縦断方向の格子間隔が徐々に変化するよう修正を加えた。計算結果を図-5(b)および(c)に示している。

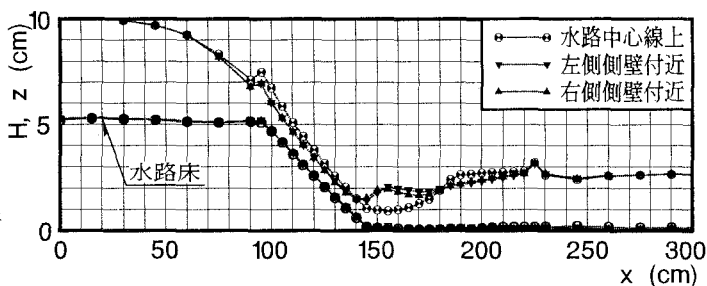
はじめに、水位の縦断形状においては、計算例1でみられたような水面形の不自然さが解消されている。また跳水区間で水面形の再現性も若干改善されているが、跳水による水面の急上昇の様相が細部まで良好に再現されるまでには至っていない。一方、流速ベクトルについてみると、まず、計算例1では再現性が良くなかった逆流域の長さに改善がみられるが、No. 7より下流の流速分布の計算結果が実測のものより一様化する傾向は変わらない。さらに詳しくみたとき、No. 7および No. 8の逆流域に接する主流の流向が計算値と実測値で微妙に食い違っている。



(a) 計算メッシュ



(b) 流速ベクトルの計算結果



(c) 流れの縦断形状の計算結果

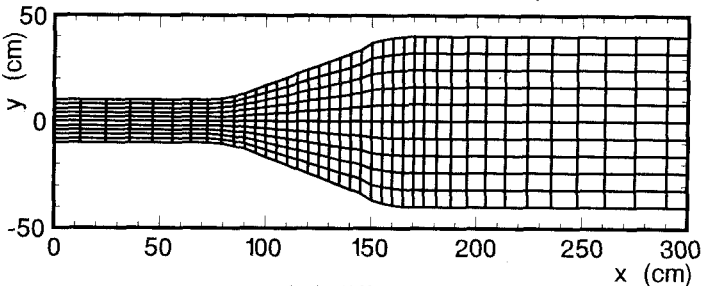
図-4 計算例1の計算結果

これは、図-3 (a) の水路中心線上の水面形に見られる跳水後の著しい盛り上がりが、計算では十分に再現されていないことによる。また、実際の流れには、図-6 のような2次流が存在し、流れが3次元性の強いものとなっているが、浅水流として取り扱う本計算では、もちろん、このことを考慮していないためでもある。

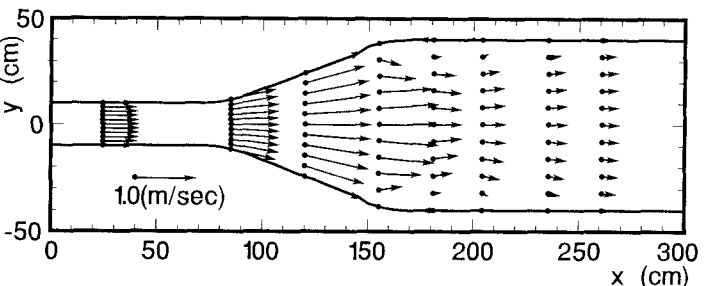
(c) 計算例3

1つの試みとして、図-7 (a) に示すような跳水の平面形状に合わせたメッシュによる計算を行ってみた。ここに、曲がった横断方向の格子線は全て円弧であり、その曲率は、跳水発生区間で最大で上・下流に移るにつれて逐次小さくなり直線に収束するように定められている。

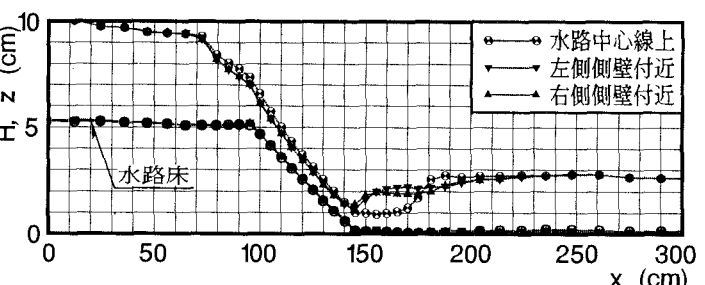
計算結果を図-7 (b) および (c) に示す。流速ベクトルの分布状況は、計算例2のものほとんど同様であるが、逆流域と主流が接触する領域の流向の再現性に若干の改善が認められる。一方、水位の縦断形状においては、とくに水路中心線沿いの水面が跳水区間の下流で一旦盛り上がる様子が明瞭に現れ、適合性が向上している。ただし、これは格子間隔が跳水区間で細分化された結果でもある。



(a) 計算メッシュ



(b) 流速ベクトルの計算結果



(c) 流れの縦断形状の計算結果

図-5 計算例2の計算結果

5. まとめ

本文では、MacCormack法に基づく2次元浅水流の数値解法における適用上の問題点として、特に、次の2点に注目した。1つは、数値解析上の特異点である物理境界に対して多くの計算手法があり、その方法によっては、物理量の保存性を崩してしまうこと。もう一つは、従来の研究が差分格子や数値粘性などの計算理論に重点が置かれ、解の精度に関する検討が充分でなかったことである。

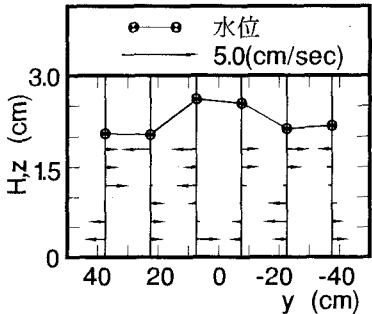


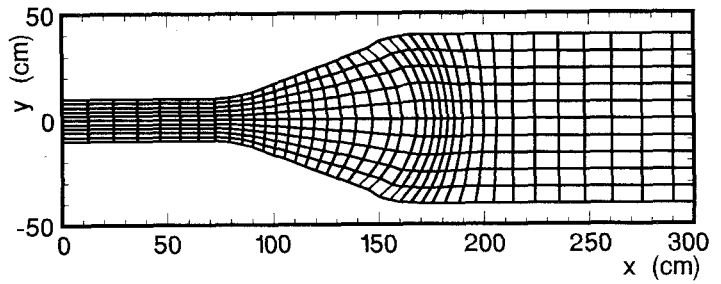
図-6 No.6断面の横断方向流速の2次流成分(実験結果)

前者に対しては、MacCormack法の差分演算子の物理的意義を、コントロールボリューム（求積）法の観点より検討した上で、アルゴリズム上、保存則に抵触しない解析方法のフレームワークを提示した。また、後者に対しては、流れの遷移および剥離が同時に発生している流れの計測実験を行い、その再現計算を通して、本計算法の妥当性ならびに、計算格子の構成方法による解の精度への影響について検討した。

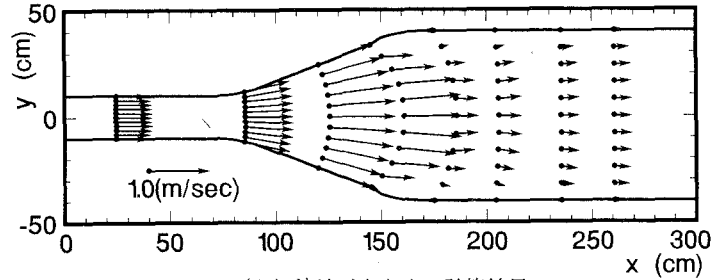
再現計算から、対象領域で水理学的に流れが不連続な範囲に対して計算メッシュを密にとることによって、本計算法がかなり信頼性の高い結果をもたらすことが明らかとなった。しかし、強い2次流が発生場合は、再現性の低下は必然的に起こるものと思われる。そのため、それ以上の精度を要求するなら、本計算法に、何らかの2次流の評価手法を導入する必要がある。このような観点から、今後、実用的な2次流の評価方法について研究を進めていきたいと考えている。

[参考文献]

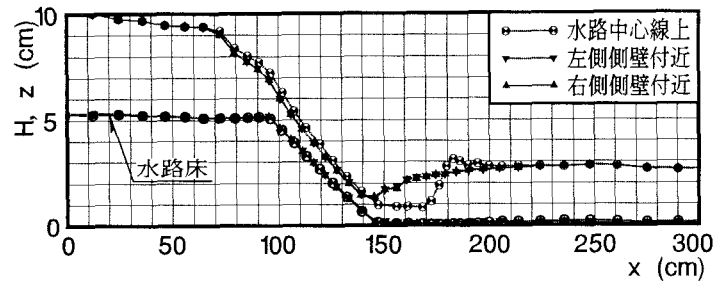
- 1) 清水康行・山下恭正・山下彰司・宗田徳彦：一般曲線座標系を用いた常・射流混在流れの計算，河川に関する調査・試験・研究報告書，北海道開発局土木研究所，PP.93-108, 1992.
- 2) R.Garcia and R.Kawawita: Numerical solution of the St.Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme : International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.6, 1986.
- 3) 中谷 剛・増田尚弥：水制工による急縮流の数値計算に関する研究，第49回土木学会年講，Ⅱ(A)，pp.340-341, 1994.
- 4) D.M.Causon: High Resolution Finite Volume Scheme and Computational Aerodynamics, Non-Linear Hypabolic Equation Theory, Computation Methods and Applications, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol.24, pp.63-74, 1989.
- 5) 岡部健士・天羽誠二・石垣昌邦：常流・射流の遷移を伴う不等流の数値計算法について，水工学論文集第36巻，pp337-342, 1992.
- 6) 清水康行：沖積河川における流れと河床変動の予測手法に関する研究，北海道大学学位論文，第3章，1991.



(a) 計算メッシュ



(b) 流速ベクトルの計算結果



(c) 流れの縦断形状の計算結果

図-7 計算例3の計算結果