

VOF法を用いた自由液面の数値解析手法

Numerical Analysis of 2-dimensional Fluid Flow with Free Surface
using VOF technique

* **

米山 望 ・ 守屋祥一

By YONEYAMA Nozomu and MORIYA Shoichi

A computer code for analyzing 2-dimensional fluid flow with free surface has been developed. The main features of this computer code are (1) the modification of a VOF technique with improved numerical accuracy of stress boundary condition and the mass conservation law on free surface, and (2) the introduction of a $k-\epsilon$ model in which an attenuating behavior of turbulent intensity near free surface can be expressed.

The results of verification show that the numerical solutions agree well with the experimental data for free surface shape and velocity profiles.

Keywords: Free Surface, Numerical Analysis, VOF technique

1. まえがき

水力、火力、原子力等の発電プラントでは、自由液面を持つ水路系や機器内において、液面振動、碎波、吸い込み渦などの液面現象に起因した様々な問題が発生する可能性がある。一般に液面現象は、設備等の設計段階で問題となる現象の発生を十分な精度で予測することが難しい。

その原因の一つには、自由液面の挙動が、模型縮尺、流体物性値などに大きく依存するため、縮小模型による実験結果から設備で起きる現象を単純には予測できないことが考えられる。冷却剤として高温のナトリウムを用い、実スケールも実験可能範囲をかなり超えている「高速増殖炉内のナトリウムの流動」はその典型的な例である。

一方、実験では不可能な条件の現象を把握するための計算機を用いた数値解析手法は、高精度が期待できるものが従来から提案されてきたが、計算時間やメモリ等の制約であまり実用的でなかった。しかし、近年の計算機の高速度化、低廉化に伴い、それらの手法をEWSレベルでも容易に

* 正会員 電力中央研究所 水理部流体グループ (〒277-11我孫子市我孫子1646)

** 電力中央研究所 水理部流体グループ (〒277-11我孫子市我孫子1646)

扱える段階になってきている。そのため、実験と高精度な数値解析を組み合わせることにより、より正確な現象予測手法が、今後ますます発達するものと考えられる。

本研究は、自由液面の挙動予測を支援するための2次元自由液面解析コードを開発するとともに、検証計算を行いコードの妥当性を明らかにした。本コードの自由液面の表現法は、LANLで開発されたSOLA-VOF^[1]の考え方をベースに質量保存条件や境界条件設定を厳密化したものを用いた。また、乱流場を適切に計算できるように、液面での乱流量に減衰を考慮したk-εモデルを導入している。

2. 基礎式

基礎式は、連続式、運動方程式、k-方程式、ε-方程式からなる。

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = G_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial(-\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{D}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{D}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4)$$

$$-\overline{u_i u_j} = D \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (5)$$

$$D = C_\mu f_s(z) \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (6)$$

ここで、 U_i ；平均流速の成分、 u_i ；乱れ速度ベクトルの成分、 k ；乱れエネルギー、 ε ；乱れエネルギー散逸率、 G ；単位体積あたりの外力、 D ；渦動粘性係数、 ν ；動粘性係数である。 f_s ；自由液面近傍の水深方向の乱れの減少による渦動粘性係数の減少を表す関数。添字は1または2の値をとり、1はx方向、2はz方向（鉛直方向）を示す。 k 及びε-方程式(3)(4)中の諸定数の値は表1に示すように標準的なものを用いており、 $C_\mu, C_{\varepsilon 2}$ の関数形は以下のようにした^[2]。

$$C_\mu = C_{\mu\infty} \left(1 + 3.45 / \sqrt{Re_T} \right) \left\{ 1 - \exp(-\Delta z_b^+ / 70) \right\} \quad (7)$$

$$C_{\varepsilon 2} = C_{\varepsilon 2\infty} \left\{ 1 + \frac{2}{9} \exp \left[- \left(\frac{Re_T}{6} \right)^2 \right] \right\} \left\{ 1 - \exp(-\Delta z_b^+ / 5) \right\} \quad (8)$$

ここで、 $Re_T = k^2 / \nu \varepsilon$ 、 $\Delta z_b^+ = u_* (z - z_b) / \nu$ である。

また、式(6)で渦動粘性係数 D を求める際に用いている $f_s(z)$ については後述する。

計算は基礎式を無次元化した後、離散化して行い、メッシュは乱流量(k, ε)、圧力 p をメッシュの中央に、流速(U, W)を境界に配置する標準的なスタッガード配置とした(図1参照)。

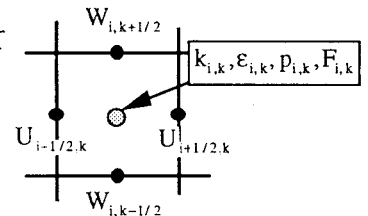


図1 メッシュの配置

3. VOF法(Volume of Fluid method)について

ここでは、VOF(Volume of Fluid)法の概要と本コードでの改良点を示す。

3.1 VOF法（ここではSOLA-VOF）の概要

SOLA-VOFは、各計算セル内の流体が占める割合 F を計算し、その集まりとして液面を表現する。 F は 0 から 1 の値をとり、 $F = 0$ を空（気体）セルと呼ぶ。 $0 < F < 1$ をセルのうち一面でも空セルと接しているものを表面セル、そうでないものを内部（流体）セルと呼ぶ。表面セルはその計算セル内での液面の傾きを 4 つ (0[水平], $\pi/2, \pi, 3\pi/2$) に分類する。また、流体が通過できない障害物などを表すセルを物体セルと呼ぶ（図 2 参照）。流速の計算は、内部セル間、表面セル

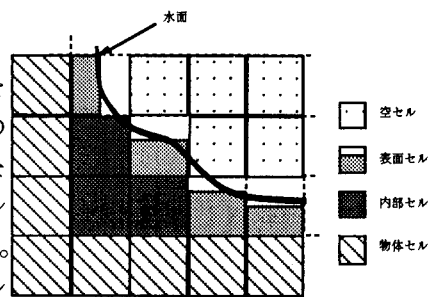


図 2 セルの説明

間、及び内部セル-表面セル間で(2)式を用い、その他必要な流速は境界条件として与えた。

このようにして表した液面形状は、 F 値を各セル境界で定義されている流速値にしたがって移動させ変形される。この移流計算は通常の移流方程式

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad (9)$$

を各セルごとに積分した式を離散化して行う。この際、 F が 0 から 1 の間の値をとることから、セル境界からの流出入量をセルの種類や向きなどを考慮して定めるドナ-アクセプタ法を用いる。また、圧力の境界条件は、表面セルの圧力 $p_{i,k}$ を、その表面位置での圧力 p_{surf} と表面セルに接する流体セルの圧力値（例えば、 $p_{i,k-1}$ ）を用いた外挿補間により与えている。

3.2 本コードでの改良点

3.2.1 質量保存条件の厳密化

上述のSOLA-VOFでは内部セルの F 値が 1 未満になることを許容しているため、1 未満の内部セルが流体内全体に不可逆的に拡散する。その結果として、液面が膨張し質量保存を満たさなくなる。本コードでは、これを防ぐため各セルの定義を以下のように変更した。内部セルを単に空セルに接しないセルとし、表面セルを少なくとも一面で流体セルまたは物体セルに接する $0 < F < 1$ のセルとした。これにより、内部セルは、連続式の打ち切り値で生ずる微小な誤差を無視することで、周囲のセル、 $(i, k \pm 1)$ 及び $(i \pm 1, k)$ が内部セルである限り、 $F = 1$ であり続けることができる。一方、周囲に表面セルが存在する場合にはある条件で 1 未満の内部セルが発生することがある。それには 2 つのケースがあり、それぞれ以下のように対処した。① F 値を移流した結果、図 3 のように 1 未満の内部セルが生じた場合、そのセルに接する表面セルの値を内部セル側にスライドした。また、② 表面セルの流体が存在しない側の流速値 U_b は、圧力の収束計算の対象ではないため、そのセルが次時間ステップで内部セルになる場合に、連続式を満たさない（つまり、 $F \neq 1$ の）内部セルになる可能性がある。このため、あらかじめ連続式を用いて U_b を与えた（図 4）。

以上の工夫により F が 1 未満の内部セルによる F 値の拡散や液面の膨張を防ぎ、安定した計算を行うことが出来た。

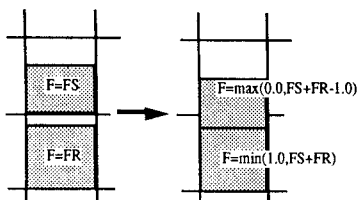


図 3 ケース①の対処法

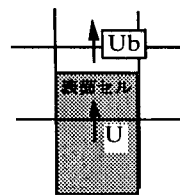


図 4 ケース②の対処法

3.2.2 液面での応力境界条件の厳密化

応力境界条件は、次式で表される。

$$\sigma_{ij}n_j = 0 \quad \text{ただし、} \quad \sigma_{ij} = -(p_{\text{surf}} - p_{\text{atm}} - T_{\text{surf}})\delta_{ij} + v\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (10)$$

ここで、 $\mathbf{n}=(n_j)$ ；表面の法線ベクトル、 $p_{\text{surf}}, p_{\text{atm}}, T_{\text{surf}}$ ；それぞれ表面圧力、大気圧、表面張力である。

(ただし、本コードは表面張力及び気体圧力を考慮していないため $p_{\text{atm}}=T_{\text{surf}}=0$ としている。)

本コードでは、液面での応力境界条件を計算に反映させるため、液面境界での圧力値と流速値の一部を上式を用いて与えた。この際、液面の勾配 γ を定める必要がある。これに関しては、Nicholら[3]がMAC法に、武本ら[4]が高さ関数法に同じ方法を適用している。それは周囲のセルの配置から勾配 γ を $\pi/4$ 刻みに分類するものであり、表面セル内の液面の水平からの傾きを θ とすれば、①表面セルが2面で空セルに接しているとき $\gamma = \theta \pm \pi/4$ 、②一面のみで空セルに接しているときおよび3面で接しているとき $\gamma = \theta$ としている。本コードにも同様な方法を適用にしたが、①の $\gamma = \theta \pm \pi/4$ となる条件に関してを若干変更し、表面セルが2面で空セル接するだけでなく、残りの2面は内部セルでなくてはならないとした。これは勾配を過大評価することを防ぐためである。

表面セル内の液面位置での圧力 p_{surf} は、この γ を用いて(10)式から得られる式を用いて、

$$\gamma = \theta \pm \pi/4 \text{ の時、} \quad p_{\text{surf}} = \pm v\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (11)$$

$$\gamma = \theta \text{ の時、} \quad p_{\text{surf}} = 2v\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \quad (12)$$

(ただし、 i は和をとらず、表面の向きに応じて $i=1$ または 2 をとる)

とした。

また、流速に関して、図4のように表面セル間の流速 U を計算する際に必要な U_b は、 $\gamma = 0$ として(10)式から得られる式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0 \quad (13)$$

を用いた。

4. 乱流計算について

本コードは、乱流解析も行えるように $k-\epsilon$ モデルの導入した。モデルは標準的なものであるが、ここでは液面境界条件についてのみ述べる。乱れ強度は液面に近づくにつれて非等方的に減衰する。それゆえ、等方性を仮定している $k-\epsilon$ モデルは、壁境界同様、何らかの補正が必要になり、そのための手法が幾つか提案されている。本コードは、細田ら[5]が行っているように、 k 及び ϵ を液面に対称条件とし、渦動粘性係数に水面に近づくにつれて減少するような関数

$$fs(z) = 1.0 - \exp\left(-B \frac{(h-z)\epsilon_s}{k_s^{3/2}}\right) \quad (14)$$

(ここで、添字 s は自由表面での値を示し、 B は定数である。)

を乗じることで、液面での乱れの減衰を表現した。この関数は水面 ($z=h$) で0をとり液面から遠ざかるにつれ1に近づく。定数 B は実験で定めるべきであるが今回はコードの開発に重点を置いて、細田らと同じ $B=10$ を用いた。

5. 計算の流れ

計算の流れの概略を箇条書きに示す。

- ①時刻 $t=ndt$ での諸量 u, w, p, k, ε を既知とする。
- ②時刻 $t=(n+1)dt$ での流速場の暫定値 $\tilde{u}, \tilde{w}$ および k, ε を離散化した基礎式から求める。
- ③流体セルの連続式(1)の誤差が基準値以下になるように圧力と流速を修正する。この修正はSIMPLE法に基づき、圧力の誤差方程式はSOR法で解く。
- ④修正された流速場 u^{n+1}, w^{n+1} に従って、 F^{n+1} を求める。
- ⑤ F^{n+1} に従い、新しい液面形状を定め、流速場及び乱流量の境界条件を更新し、①に戻る。

6. 計算結果と考察

本コードをダムブレイク現象と矩形容器内の流動に適用し、コードの妥当性を検証した。

6.1 ダムブレイク現象の層流計算

計算を行った座標系および初期形状を図5に示す。越流堰がない場合の崩壊の先端到達距離と時間の関係を、越流堰らによって行われた実験結果¹⁰⁾と比較して図6に示す。図には計算結果を右に0.28ずらしたものをプロットした。これはNicholら¹³⁾が行っているように、実験では流体を瞬時に解放することが不可能なため、崩壊が始まるまでの僅かな時間を考慮してずらしたものである。同図から実験と計算はほぼ一致したことがわかる。越流堰がある場合の崩壊の様子を時間ごとに示したのが図7であり、流れを定性的に再現できており、本コードが複雑に変形する様子を計算できることが分かった。

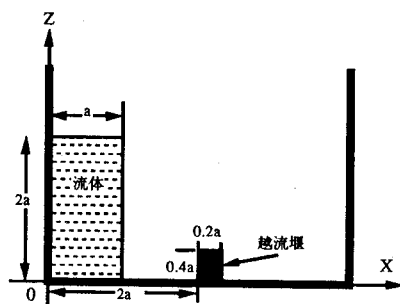


図5 ダムブレイクの座標系

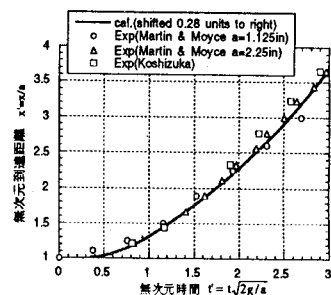


図6 先端到達距離の比較

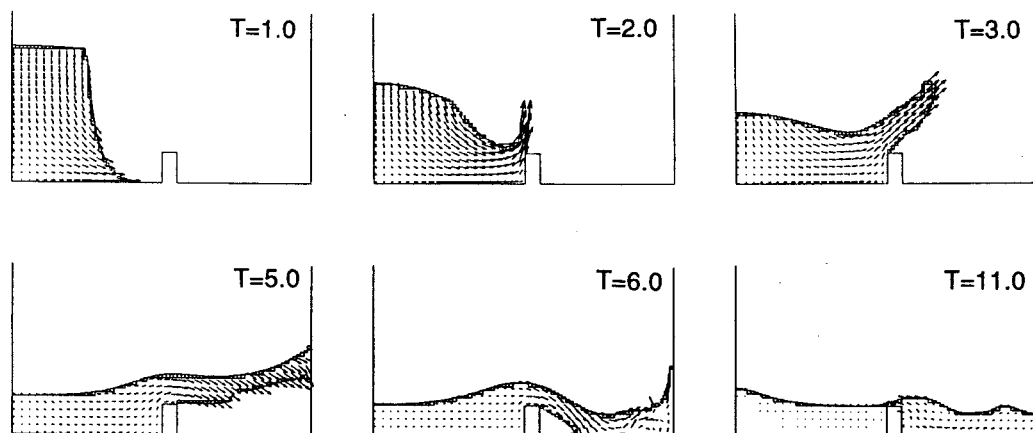


図7 越流堰を置いた場合の崩壊の様子 (Tは無次元時間、矢印は 無次元流速ベクトル)

6.2 矩形容器内流動の乱流計算

当所で実施したガス巻き込み基礎試験^[7]で用いた矩形容器内の流動計測結果と本コードを用いた乱流計算結果を比較した。試験装置の形状、流れの概要を併せて図8に示す（試験条件は、代表流速 $U_{in}=0.833\text{m/s}$ 、長さ $Bo=8\text{cm}$ で $Re=6.67\times 10^4$, $Fr=0.94$ ）。水平方向流速分布の比較の結果はほぼ一致した（図9）。また、液面形状の計算結果を実験の断面平均値と比較した結果は概ね適合した（図10）。しかし、局所的に実験と異なる点があり、特に $x'=0$ での勾配の大きな違いなど関しては、今後検討していきたい。

また、同じ装置を対象に Re を一定にして Fr 数を変化させる計算を行った結果、 Fr 数に応じて液面が変化することを確認できた（図11）。

7. おわりに

本研究で、乱流も評価できる2次元自由液面解析コードを作成した。また、検証計算を行いコードの妥当性を確認した。今後は、本研究で認められた実験と差異を減らすため、表面張力モデルの導入、乱流境界条件の厳密化を行い解析精度の向上を図るとともに、窪み渦、自励振動等の液面現象への本コードの適用性を明らかにしていく予定である。

参考文献

- [1]B.D.Nichols,他2名:Volume of Fluid(VOF) method for the Dynamics of Free Boundaries,LA-8355,1980.
- [2]明,笠木:低レイノルズ数k-eモデルの再評価、第3回生研NSTシンポジウム論文集,25-29,1988.
- [3]B.D.Nichols and W.Hirt:Improved Free Surface Boundary Conditions for Numerical Incompressible-Flow Calculations, Journal of computational physics 8,434-448,1971.
- [4]武村,他2名:任意形状のセキを越える流れの数値解法,38-47,Trans,JSIDRE,1980.
- [5]細田,岩佐他:無巻きトンネル内の流れの抵抗則について,京都大学防災年報,第34号B-2,1991.
- [6]越塚他:砕波を伴う非圧縮性粘性流れ解析のための粒子法の開発,粒子法研究会(第1回)報告書,39-43,1994.
- [7]守屋,米山:自由液面からのガス巻き込み評価手法の検討,電中研研究報告U93004,1993.

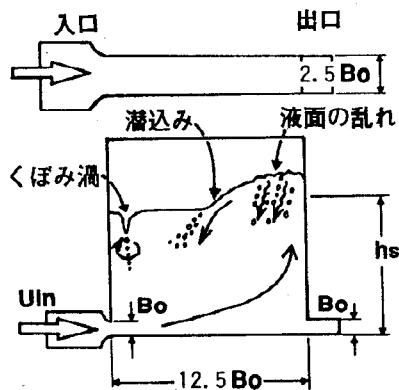


図8 矩形容器内の流れの概要

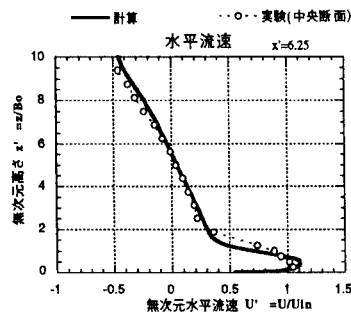


図9 内部流速の実験との比較

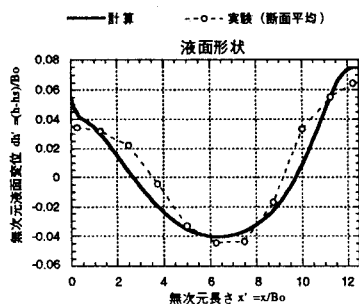


図10 液面形状の実験との比較

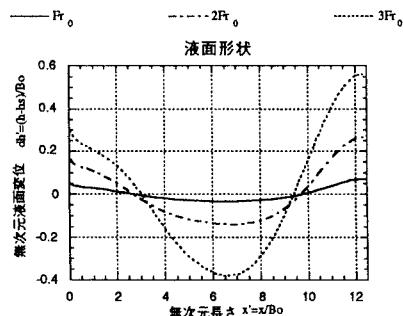


図11 液面形状への Fr 数の影響
($Re=6.67\times 10^4$, $Fr_0=0.94$)