

開水路流れの $k-\varepsilon$ 乱流モデルによる三次元数値解析法

Three-Dimensional Numerical Model of Open Channel

Flow Using $K-\varepsilon$ Turbulence Model

富所 五郎*

田中 康雄**

By Goro TOMIDOKORO and Yashuo TANAKA

A three-dimensional numerical model using the $k-\varepsilon$ turbulence model for open channel flow is proposed, which is based on the Galerkin finite element method using the shape function to be the product of the localized polynomial for the horizontal direction and the cosine function for the vertical direction. In this model, the computer storage, computing time and necessary data are remarkably reduced. The validity of this model is shown by numerical examples for the open channel flow with rough wall having a logarithmic velocity distribution and the flow over rigid vegetation.

Keywords: open channel flow, $k-\varepsilon$ turbulence model, FEM

1. はじめに

河川などの開水路における流れの三次元性は、合流部や湾曲部で顕著に現れ、これらの現象の解析には何らかの形で三次元性を考慮しなければならない。また、最近の河川改修では多自然型川づくりが試みられているが、この施策を推進するためには、植生を有する流れの特性の、より高度の把握を必要とする。

このために本研究はより厳密な数値解法として、空間変数の形状関数に水平方向の三角形一次要素と鉛直方向の余弦関数の積である関数を用いる Galerkin 有限要素法を、 $k-\varepsilon$ 乱流モデルの流れの基礎式に適用する三次元数値解析法を提案するものである。そして本解析モデルの妥当性を、粗面对数則に従う場合と直立性の植生を有する開水路流れ¹⁾に適用して検討するものである。

2. 流れの基礎式

$k-\varepsilon$ 乱流モデルの直立性植生を有する開水路流れの基礎式は以下のように簡単化される。まず、流れは水平方向に卓越するとして、鉛直方向の運動方程式に静水圧分布を仮定し、得られた式を他の運動方程式に

* 正会員 工博 信州大学教授 工学部社会開発工学科

(〒380 長野市若里 500 電話(0262)-26-4101)

** 正会員 工修 愛知県豊橋土木事務所 技師

(〒444 豊橋市関谷町 190)

代入して圧力 P を消去する。つぎに、連続式を水底から水面まで積分する。さらに、連続式を水底から z まで鉛直方向に積分して w を u, v の関数とする²⁾。以上より基礎式は、 $u, v, k, \varepsilon, \zeta$ を未知量とする以下の準三次元モデルの連立微分方程式となる³⁾。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L \cdot u + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = g \cdot I_x - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - F_x + D \cdot u \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + L \cdot v + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = g \cdot I_y - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - F_y + D \cdot v \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} v \cdot dz = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + L \cdot k + w \cdot \frac{\partial k}{\partial z} = E \cdot k + A_v \cdot H - \varepsilon - C_f k F_o \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + L \cdot \varepsilon + w \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = E \cdot \varepsilon + C_1 C_{\mu} k \cdot H - A + \frac{\varepsilon}{k} C_1 C_f F_o \quad (5)$$

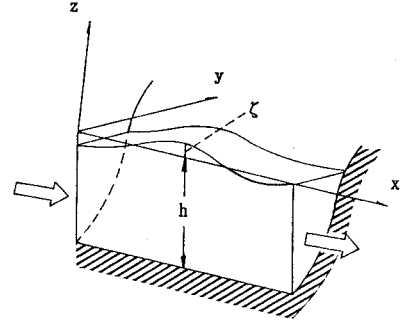


図-1 座標の定義

ただし、

$$w = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} u \cdot dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} v \cdot dz, \quad L = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial}{\partial z}),$$

$$A_v = C_{\mu} \cdot \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad A = C_2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad F_x = \frac{1}{2} C_D \lambda u \sqrt{u^2 + v^2}, \quad F_y = \frac{1}{2} C_D \lambda v \sqrt{u^2 + v^2}, \quad F_o = F_{x0} u + F_{y0} v, \quad H = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2$$

ここに、 ζ は水面上昇量、 u, v, w は x, y, z 軸方向の流速成分、 k, ε は乱れのエネルギーと散逸率、 g は重力加速度、 A_h, A_v は水平、鉛直渦動粘性係数、 I_x, I_y はそれぞれ x, y 方向の平均勾配で、 E は D の A_v を A_v/σ に代えた式である。また、 F_x などは植生の抵抗による項で、 λ は植生の密生度、 C_D は植生の抵抗係数である³⁾。さらに、 k, ε 方程式中の係数については標準値を用いる。座標軸については、図-1に示す。

3. 流れの基礎式の離散化

3.1 時間変数についての離散化

上の基礎式を空間変数に対して離散化を行うために、次のような近似関数を考える。

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i \cdot \cos\{B_p(z-\zeta)\} \cdot u_{pi}, & v &= N_i \cdot \cos\{B_p(z-\zeta)\} \cdot v_{pi} \\ k &= N_i \cdot \cos\{B_p(z-\zeta)\} \cdot k_{pi}, & \varepsilon &= N_i \cdot \cos\{B_p(z-\zeta)\} \cdot \varepsilon_{pi} \\ \zeta &= N_i \cdot \zeta_i \end{aligned} \right\} B_p = \frac{p-1}{\zeta+h} \pi \quad (p=1, 2, \dots, m) \quad (i=i, j, k) \quad (6)$$

ここに、 $N_i = N_i(x, y)$ は三角形一次要素の形状関数、 m は展開項数である。また、 A_v など z 方向に変化する他の物理量についても u と同様の近似を行う。式(6)を代入した基礎式(1), (2), (4), (5)に重み関数として $N_i \cos\{B_p(z-\zeta)\}$ を、式(3)に N_i を掛け、重み関数の定義域内で積分すると、単一要素の場合の離散化方程式は、つまり要素方程式は

$$\begin{aligned} M_{pqij} \dot{u}_{qj} + (RX_{pqrij} \cdot u_{qj} + RY_{pqrij} \cdot v_{qj}) u_{rk} \\ = g \cdot I_x \cdot D_{pi} - g \cdot EX_{pij} \zeta_j - DF_{pqij} \cdot F_{xqj} + \{A_h (KX_{pqij} + KY_{pqij}) + A_{vrk} KZ_{pqrij}\} u_{qj} + FX_{pi} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} M_{pqij} \dot{v}_{qj} + (RX_{pqrij} \cdot u_{qj} + RY_{pqrij} \cdot v_{qj}) v_{rk} \\ = g \cdot I_y \cdot D_{pi} - g \cdot EY_{pij} \zeta_j - DF_{pqij} \cdot F_{yqj} + \{A_h (KX_{pqij} + KY_{pqij}) + A_{vrk} KZ_{pqrij}\} v_{qj} + FY_{pi} \end{aligned} \quad (8)$$

$$M_{ij} \dot{\zeta}_j + CX_{qij} \cdot u_{qj} + CY_{qij} \cdot v_{qj} = 0 \quad (9)$$

$$M_{pqij} \dot{k}_{qj} + (RX_{pqrij} \cdot u_{qj} + RY_{pqrij} \cdot v_{qj}) k_{rk} = A_h (KX_{pqij} + KY_{pqij}) k_{qj} \\ + 1/\sigma \cdot KZ_{pqrij} \cdot (k_{qj} \cdot A_{vrk}) + FK_{pqijk} \cdot A_{vqk} + HZ_{pqrij} \cdot A_{vqj} \cdot H_{rk} - M_{pqij} \cdot \epsilon_{qj} + DF_{pqij} \cdot F_{rk} \quad (10)$$

$$M_{pqij} \dot{\epsilon}_{qj} + (RX_{pqrij} \cdot u_{qj} + RY_{pqrij} \cdot v_{qj}) \epsilon_{rk} = A_h (KX_{pqij} + KY_{pqij}) \epsilon_{qj} \\ + 1/\sigma \cdot KZ_{pqrij} \cdot (\epsilon_{qj} \cdot A_{vrk}) + FE_{pqijk} \cdot A_{vqk} + C_1 \cdot C_\mu \cdot HZ_{pqrij} \cdot k_{qj} \cdot H_{rk} \\ - C_2 \cdot M_{pqij} \cdot A_{qj} + DF_{pqij} \cdot F_{eqj} \quad (11)$$

$$(q=1, 2, \dots, m, \quad r=1, 2, \dots, m \quad j=i, j, k \quad k=i, j, k)$$

となる。ここに、 $u_{qj}, v_{qj}, \xi_j, k_{qj}, \epsilon_{qj}$ の上付き (・) は、時間微分を示し、 $i=j, k, p=1, 2, \dots, m$ である。以上の式は、 $u_{qj}, v_{qj}, \xi_j, k_{qj}, \epsilon_{qj}$ を未知量とする連立常微分方程式である。要素が多数存在する場合には、上式の各項を各要素ごとに求め、重み関数にしたがって重ね合わせると、上式と同様の式が得られる。以下に上式の各係数を示す。

$$M_{pqij} = \int_s C_a N_i N_j d \cdot ds, \quad M_{ij} = \int_s N_i N_j \cdot ds, \quad RX_{pqrij} = \int_s N_i \{ N_j \frac{N_k}{\partial x} \frac{d}{4} (T_a + T_b + T_c + T_d) + (\frac{\partial N_j}{\partial x} d + N_j \frac{\partial d}{\partial x}) N_k T \} \cdot ds$$

$$D_{pi} = \int_s C_b N_i d \cdot ds, \quad EX_{pi} = \int_s C_b N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot ds, \quad KZ_{pqrij} = - \int_s N_i N_j N_k B_p B_q \frac{d}{4} (-T_a + T_b + T_c - T_d) \cdot ds$$

$$KX_{pqij} = - \int_s \{ T_e \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d - T_f (N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j) \frac{\partial d}{\partial x} \frac{1}{4} + T_f N_i N_j \{ (\frac{\partial d}{\partial x})^2 (\frac{d}{6} B_p^2 - \frac{1}{4d}) - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{d}{2} B_p^2 \} \\ + T_g \{ \frac{\partial h}{\partial x} (-1)^{p+q} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \} \cdot \{ -N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} B_p^2 + \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j B_q^2 + N_i N_j \frac{\partial d}{\partial x} \frac{4}{d} B_p^2 B_q^2 T_h \} T_h \} \cdot ds \\ + n_x \int_s N_i [T_e \frac{\partial N_j}{\partial x} d - T_f N_j \frac{\partial d}{\partial x} \frac{1}{4} + T_g N_j \{ \frac{\partial h}{\partial x} (-1)^{p+q} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \} B_q^2 T_h] \cdot dl$$

$$CX_{qij} = \int_s C_c \cdot N_i (N_j \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial x} d) \cdot ds = 0, \quad FX_{pi} = \int_s N_i \tau_{xi} (-1)^p \cdot ds, \quad HZ_{pqrij} = - \int_s N_i N_j N_k \frac{d}{4} (T_a + T_b + T_c + T_d) \cdot ds$$

$$FK_{pqijk} = \int_s N_i N_j N_k \{ k_{sj} - k_{bj} \cdot (-1)^p (-1)^q \} \cdot ds, \quad FE_{pqijk} = \int_s N_i N_j N_k \{ \epsilon_{sj} - \epsilon_{bj} \cdot (-1)^p (-1)^q \} \cdot ds$$

$$\left(\begin{array}{ll} p+q-r=1; T_a=1.0 & p+q-r \neq 1; T_a=0.0 \\ p-q-r=1; T_b=1.0 & p-q-r \neq 1; T_b=0.0 \\ -p+q+r=1; T_c=1.0 & -p+q+r \neq 1; T_c=0.0 \\ p+q+r=3; T_d=1.0 & p+q+r \neq 3; T_d=0.0 \\ q=1 \text{ and } [p=r=1; T=0.0, p=r>1; T=-0.25] \\ q=1 \text{ and } [p \neq r; T=B_r^2/(B_p^2-B_r^2)] \\ q>1; T=0.25(T_a+T_b-T_c) B_r/B_q \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} p=q=1; T_e=1.0 \quad T_f=0.0 \quad T_g=0.0 \quad T_h=0.0 \\ p=q>1; T_e=0.5 \quad T_f=1.0 \quad T_g=0.0 \quad T_h=0.0 \\ p \neq q; T_e=0.0 \quad T_f=0.0 \quad T_g=1.0 \quad T_h=1.0/(B_p^2-B_q^2) \\ p=q=1; C_a=1.0, \quad p=q>1; C_a=0.5, \quad p \neq q; C_a=0.0 \\ p=1; C_b=1.0 \quad p \neq 1; C_b=0.0 \quad q=1; C_c=1.0 \quad q \neq 1; C_c=0.0 \end{array} \right)$$

また、 $RY_{pqrij}, EY_{pij}, FY_{pij}, KY_{pqij}, CY_{qij}$ は、 $RX_{pqrij}, EX_{pij}, FX_{pij}, KX_{pqij}, CX_{qij}$ における $\partial/\partial x, \tau_{xi}, n_x$ の x を、 y にかえた式である。ここに、 l は要素の辺長、 τ_{xi}, τ_{yi} はそれぞれ底面せん断応力

$$\tau_o = \rho g n^2 (u^2 + v^2) d^{1/3} \quad (n \text{ は Manning の粗度係数}) \quad (12)$$

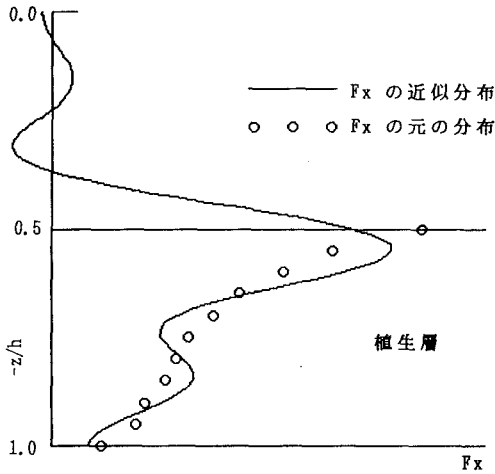
を水の密度で割った i 点の x, y 成分値、 $k_{sj}, k_{bj}, \epsilon_{sj}, \epsilon_{bj}$ はそれぞれ k, ϵ の水面、水底における微分項、 n_x, n_y は要素の境界に立てた単位法線ベクトルの x, y 成分である。ただし、 n_x, n_y を含む項は、要素内部で打ち消し合うので、境界のみを考えればよい。上式中において、要素内で変化する物理量については、 A_v, H, A は u 等と同様に、 d は ξ と同様に近似する。また、 A_h は要素内で一定値とした。さらに植生による抵抗項、 F_x, F_y および $C_{fk} (F_x u + F_y v) = F_k, \quad \epsilon/k \cdot C_1 C_f \epsilon (F_x u + F_y v) = F_\epsilon$ とおかれた F_k, F_ϵ は u 等と同様に近似するが、これらの項を離散化する事によって現れる DF_{pqij} については、次節において詳しく述べる。

3.2 形状抵抗項の算定

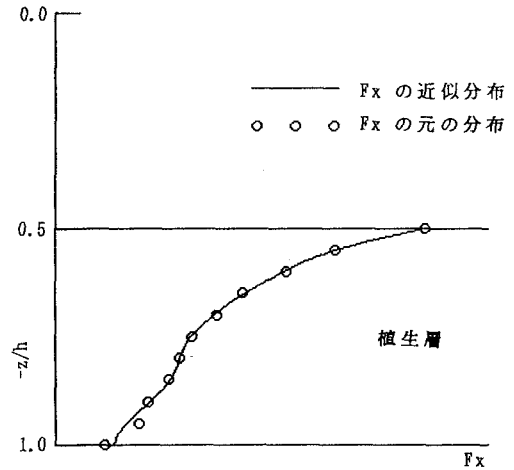
植生が水面に達しない場合の植生による形状抵抗項の分布は、図-3に示すように、植生の存在する水深に

において急に現れる。このような急激な分布を、三角関数を用いたフーリエ級数展開によって近似すると、図-2のようになり、植生の存在しない上層においてかなり強いギブス現象が現れ、誤差が大きい。そこで、この誤差を小さくするために、ここでは F_x, F_y 等のフーリエ級数展開近似を植生の存在する水深の形状抵抗のみを用いて行う。このとき植生より上の部分では大きな誤差がでるが、重み付き残差式のこの項の積分範囲を水底より植生の頂部 ($-z_p$) までとして、この誤差を取り除くことができる。このとき式(10), (11)の DF_{pqij} は次のようになる。

$$DF_{pqij} = \int_{z_p}^0 N_i N_j C \cdot ds, \quad \left(\begin{array}{l} p=q=1; C=d-z_p \quad p \neq q=1; C=\frac{1}{2}(d-z_p) - \frac{1}{2(p+q-2)\pi} \sin\{(p+q-2)\pi \frac{z_p}{d}\} \\ p \neq q; C=-\frac{1}{2(p-q)\pi} \sin\{(p-q)\pi \frac{z_p}{d}\} - \frac{1}{2(p+q-2)\pi} \sin\{(p+q-2)\pi \frac{z_p}{d}\} \end{array} \right)$$



(全水深で F_x を近似)
図-2 F_x の近似分布(1)



(植生のある水深で F_x を近似)
図-3 F_x の近似分布(2)

3.3 時間変数についての離散化

3.1で求めた空間変数についての離散化方程式(7)~(11)は、時間微分項とその他の項に分け、左辺の時間微分項以外をすべて右辺に移行して、要素全体について重ね合わせると、

$$M \cdot \frac{d}{dt} V = F \quad (13)$$

となる。ここに、 M は M_{pqij} , M_{ij} を成分とする質量行列、 V は $u_{qj}, v_{qj}, \xi_j, k_{qj}, e_{qj}$ の未知量を成分とする列行列、 F は V の関数の列行列である。式(13)は t に関する連立一次常微分方程式となり、種々の時間積分法を用いて解かれる。本研究では陽的時間積分法の一つである two-step Lax-Wendroff法を用いる。この解法は、二段階よりなり、第一ステップ、第二ステップがそれぞれ

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = M^{-1} \cdot F_t, \quad V_{t+\Delta t/2} = V_t + \Delta t/2 \cdot K_1 \\ K_2 = M^{-1} \cdot F_{t+\Delta t/2}, \quad V_{t+\Delta t} = V_{t+\Delta t/2} + \Delta t/2 \cdot K_2 \end{array} \right\} \quad (14)$$

である。ここに、 Δt は時間刻み幅を示す。

4. 解析結果及び考察

4.1 粗面对数則に従う開水路流れ

流速分布が粗面对数則に従う流れの解析モデルは水深 0.1m、勾配 0.001 の長方形断面開水路である。この解析では、植生による項を零とし、初期値として u は粗面对数則、 k, e は半理論式による値を与える。

A_h は一定値 ($0.12\text{m}^2/\text{s}$) とし、摩擦速度 $u_* = 3.13\text{cm/s}$ で、 k, ϵ の関数として求められる A_v は、水面での乱れの減衰を考慮して $f = -z/h + 0.5$ ($0.0 \leq -z/h \leq 0.5$) を掛けて水面付近で小さくしている。展開項数は 11 とし、解析水深は 0.095m とした。結果を図-4~7 に示す。図-5 では水面と水底近くの値の差が大きく、ギップス現象が現れ計算値が少し波打っている。しかし、図-4 ではその差が小さいため、先の現象の影響は目立たない。図-6 では A_v が k, ϵ から計算されることからギップス現象の影響が激しく見える。しかしながら、図-7 の流速ではこの影響はあらわれず、 $-z/h = 0.95$ の点の値だけが大きめになっているものの、全体として解析解に良く一致している。

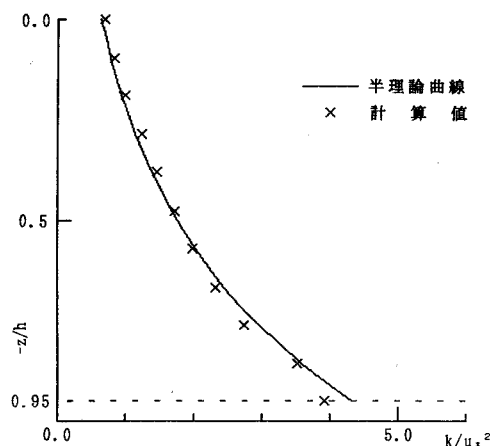


図-4 乱れエネルギーの分布

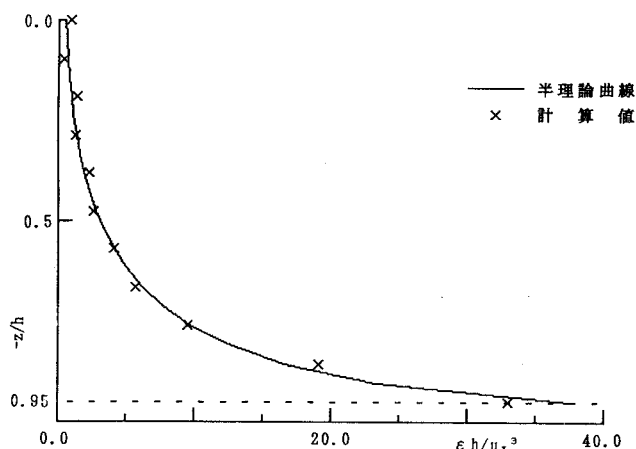


図-5 乱れ散逸率の分布

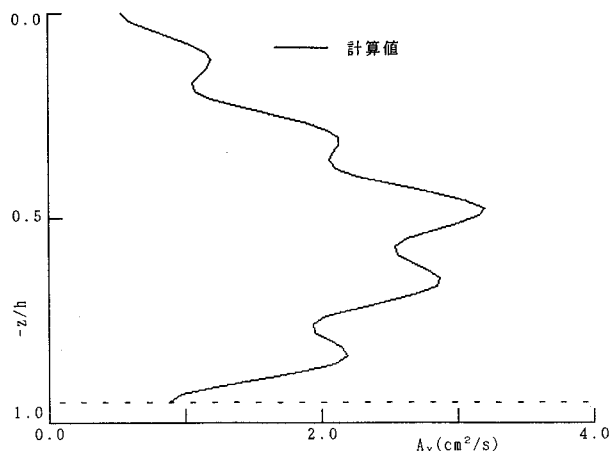


図-6 鉛直渦動粘性係数の分布

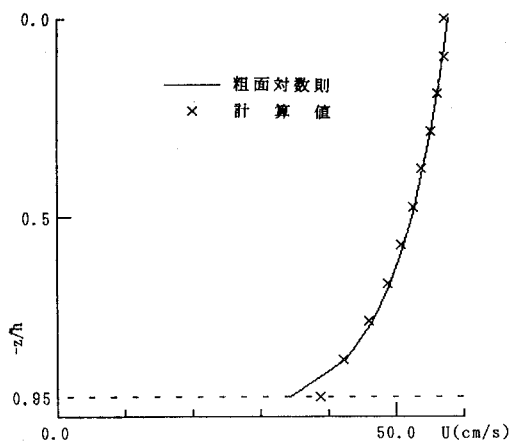


図-7 流速分布

4.2 直立性の植生を有する開水路流れ

次に、辻本らが実験を行った直立性の植生を有する開水路流れ¹⁾に、本解析モデルを適用する。実験は、長さ12m、幅0.4m、水路勾配1/1000の直線水路に、植生モデルとして高さ4.6cm、直径を0.15cmの竹製円柱を2cm間隔で正方配置して、ここに水深9.5cm、平均流速13.25cm/sで通水して行われている。図-8~11に、 C_D を1.46、 $C_{f k}, C_{f \epsilon}$ を辻本らのそれぞれ 0.10, 0.16 に対して 0.076, 0.198、これ以外の係数は標準値としたときの数値解析結果を示す。ここでの摩擦速度は、径深と動水勾配より求めたのではなく、植生の存在を考慮して式(12)において流速を底面流速として底面せん断応力を求めて、これより $u_* = 0.447\text{cm/s}$ としている。図-8, 9 に見られるように、植生の抵抗が水深の1/2程度まで存在するために k, ϵ の値のピークが底面より上方

に移動し、しかもその変化が粗面对数則に従う流れに対して小さい。このために、図-10 では図-6のギップス現象が見られない。図-11においては、数値解析結果はほぼ実験値に一致している。

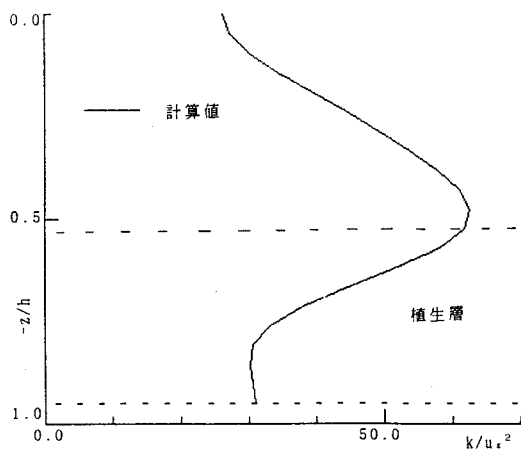


図-8 乱れエネルギーの分布

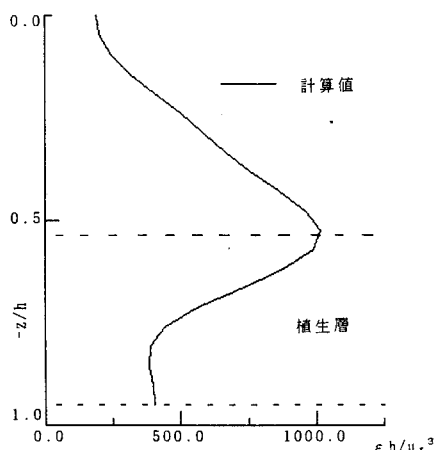


図-9 乱れ散逸率の分布

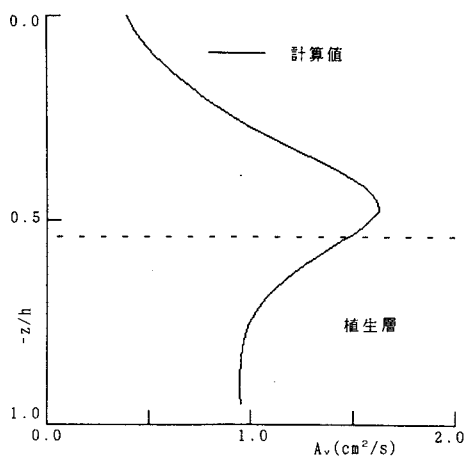


図-10 鉛直渦動粘性係数の分布

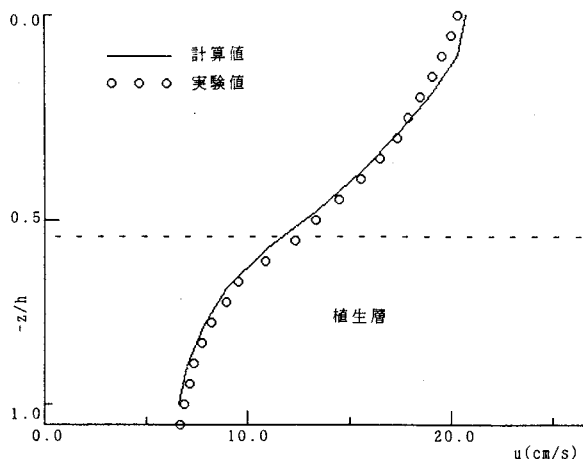


図-11 流速分布

5. おわりに

本研究は、開水路流れの $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いた三次元数値解析法を提案し、この妥当性を、粗面对数則に従う場合と直立性の植生を有する開水路流れに適用して検討したものであるが、以上の結果より、本解析モデルの妥当性がほぼ証明された。今後は、流れの三次元性の顕著な合流部や湾曲部を含む河川等に適用して本解析モデルの有効性を検討するとともに、非剛性の植生を有する流れへの発展をはかりたい。

【参考文献】

- 1) 辻本哲郎、北村忠紀： 直立型植生を有する開水路流れ，土木学会中部支部研究発表会講演概要集，pp.142-143，1990.
- 2) 富所五郎、荒木正夫、吉田宏：開水路の流れの三次元数値解析法、第29回水理講演会論文集、pp.7 27-732, 1985.
- 3) 辻本哲郎、北村忠紀、岡田敏治： 直立性植生上の流れの特性と $k-\epsilon$ 乱流モデルの適用，土木学会中部支部研究発表会講演概要集，pp.196-197，1991.