

分布型流出モデルに関する研究

-確率微分方程式の導入-

Study on Distributed Runoff Model

-An Application of Random Differential Equation-

工藤睦信*

藤田睦博**

清水康行***

竹本 晃****

by Mutsunobu KUDO, Mutsuhiro FUZITA,

Yasuyuki SHIMIZU, Akira TAKEMOTO

A drainage basin consists of hillslopes and channels. Hillslopes are the main regions at which rainfall is converted into runoff discharge and channels are the region where the runoff discharge from subbasins is synthesized and transported to the outlet of the basin. Hydrologic response is influenced not only by hillslope response but also by channel network response. The properties of hillslopes and channel networks such as slope length, slope gradient and distance from sub-basin to the outlet are best described by statistical method. This paper aims at evaluating stochastic hydrological response by introducing random differential equations.

Key words: River network, Stochastic Response, Random Differential equation, Storage Function Model

1 はじめに

近年の気象レーダが建設省によって全国的規模で整備されるにともない、気象レーダより得られる降雨情報を流出解析に利用する研究が、数多く発表されている。これらの研究の一つの分野が、分布型流出モデルの構築である^{1), 2), 3)}。従来の地上観測雨量が地点での観測値であるのに対して、気象レーダの降雨情報は面的な情報に相当している。降雨量の空間分布が分かるので、これに対応する流出モデルが必要となる。流域を n 個のサブ流域に分割して、流域末端における流出量 $Q_n(t)$ を求める場合を考えよう。 $Q_n(t)$ を一般に次式で記述することができる。

$$Q_n(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t - t_{Li}) \quad (1)$$

$q_i(t)$: i 番目の流域からの流出量 t_{Li} : i 番目目の流域からの遅れ時間

流域の分割数 n をどのように定めると合理的であるかという問題、すなわち、スケール問題が実用的にも重要であるし、水文学的にも興味ある問題である。式(1)の左辺で流域の分割数 n が流域末端における流出量

* 正会員 日本国土開発株式会社 土木部
(107) 東京都港区赤坂4-9-9

** 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科
(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

*** 正会員 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科

**** 学生会員 北海道大学工学部土木工学科

に及ぼす影響を考慮して、添え字 n を付け加えている。一般的に言えば、流域の分割数 n は降雨量の空間分布特性と流域特性に基づいて決定されるべきものであるが、ここでは先ず流域特性のみに注目して考察する。流域を分割する際、河道網の構造に基づいて分割せざるを得ない。したがって、結果として得られるサブ流域の面積 A_i は大小様々である。また、式(1)の遅れ時間 t_{Li} は、 i 番目のサブ流域から流域末端に到る河道長 L_i の関数である。また、実流域の河道網のパターンも様々で、本論文では A_i, L_i を確率変数として扱う。この結果、式(1)の $q_i(t - t_{Li})$ もまた確率変数となる。本論文ではこの A_i, L_i の確率特性を考察したものである。

2 河道網における集水過程

式(1)を、次のように展開する。

$$Q_n(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t - t_{Li}) = \sum_{i=1}^n \left\{ q_i(t) - t_{Li} \frac{dq_i}{dt} \right\} = \sum Q_{si}(t) \quad (2)$$

式(2)において $Q_{si}(t), q_i(t), t_{Li}$ を平均値と平均値からの偏差に分けて考える。

$$Q_s(t) = \bar{Q}_s(t) + \tilde{Q}_s(t) \quad (3) \quad q_i(t) = \bar{q}(t) + \tilde{q}(t) \quad (4) \quad t_{Li} = \bar{t}_L + \tilde{t}_L \quad (5)$$

式(3)～(5)を用いて、式(2)を書き直すと次式を得る。

$$\bar{Q}_s + \tilde{Q}_s = \bar{q} + \tilde{q} - \frac{d}{dt} \{ (\bar{q} + \tilde{q})(\bar{t}_L + \tilde{t}_L) \} \quad (6)$$

式(6)の期待値をとり、さらに式(6)から式(7)を差し引くと、式(7), (8)を得る。

$$\bar{Q}_s = \bar{q} - \bar{t}_L \frac{d\bar{q}}{dt} \quad (7) \quad \tilde{Q}_s = \tilde{q} - \frac{d}{dt} (\bar{q}\tilde{t}_L + \bar{t}_L\tilde{q} + \tilde{q}\tilde{t}_L) \quad (8)$$

$Q_s(t)$ の分散 σ_{Q^2} は、式(8)より得られる。

$$\sigma_{Q^2} = \sigma_q^2 + \sigma_{tL^2} \left(\frac{d\bar{q}}{dt} \right)^2 + E \left\{ \left(\frac{d\tilde{q}}{dt} \right)^2 \right\} (\bar{t}_L^2 + \sigma_{tL^2}) - \bar{t}_L \frac{d\sigma_q^2}{dt} \quad (9)$$

ここに、 $\bar{t}_L, \sigma_{tL^2}$ および $\bar{q}, \sigma_q^2$ は、遅れ時間とサブ流域からの流出量の平均値と分散を示す。式(9)の誘導に当たって、 $E(\tilde{q}\tilde{t}_L), E(\tilde{t}_L d\tilde{q}^2/dt)$ などの相関係数を0としている。

2.1 河道網の特性と集水過程

流域の地形要素と流出特性の関連については、これまでにいくつかの研究がある^{4, 5, 6)}。藤田によると、リンク～マグニチュード方式による河道網区分を採用して図-1に示すような河道網パターンとその生起確率が得られている。() 内の数値は対応する河道網パターンの生起する確率を示している。 m はマグニチュードを示し、河道網の水源の数に等しい。また、水源～合流点、合流点～合流点間の河道をリンクと呼んでいる。水源～合流点間の河道を外部リンク、合流点～合流点間の河道を内部リンクと区別する場合もある。いま、図-2に示すように任意のマグニチュード m の河道網において最下流の合流点で河道網を二つの河道網に切断し、一方の河道網のマグニチュードが i 、他の河道網のマグニチュードが $(m-i)$ となる確率を $p(i, m)$ とする。 $p(i, m)$ は次式で与えられる。

$$\begin{cases} p(1, m) = \frac{m}{2m-3} \\ p(i, m) = \frac{2(2i-3)! m! (m-2)! (2m-2i-2)!}{(i-2)! (m-i)! (2m-3)! (m-i-1)!} & 2 \leq i \leq [m/2], m \neq 2i \\ p(n, 2n) = \frac{8n}{(4n-2)!} \left\{ \frac{(2n-1)! (2n-3)!}{n! (n-2)!} \right\}^2 \end{cases} \quad (10)$$

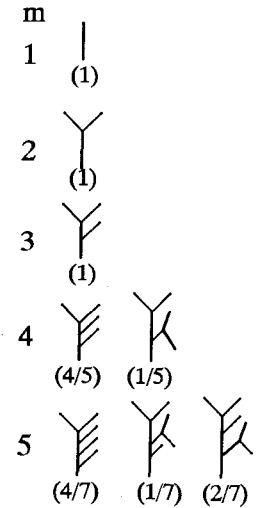


図-1 河道網のパターン

河道網における集水過程を考える場合、図-3に示すように河道網の末端から等しいリンク数だけ離れているサブ流域の数を定義しておくことと便利である⁷⁾。ここで、サブ流域は各リンクに付随している流域と定義する。図-3はマグニチュード4の河道網を対象にしており、リンクA, B, C, Dは河道網の末端よりそれぞれ1, 2, 3, 4個だけリンクを遡った位置にある。このようなリンク数は、対象とする河道網のマグニチュードあるいは図-1に示す河道網パターンによって異なる。 $C(m, j)$ をマグニチュード m の河道網において、河道末端より j 個だけリンクを遡った位置にあるサブ流域数と定義する。 $C(m, j)$ に関して次式を得る。

$$C(m, j+1) = \sum_{i=1}^{[m/2]} p(i, m) \{C(i, j) + C(m-i, j)\} \quad (11)$$

$$2 \leq j \leq m-1, m \geq 4$$

$$C(m, 1) = 1, C(m, 2) = 2, C(m, j) = 0, m < j$$

マグニチュード m の河道網は $(2m-1)$ のリンクより構成されているので、 $C(m, j)$ は次式を満足している。

$$\sum_{j=1}^m C(m, j) = 2m-1$$

(12) 図-2 最下流の合流点で2分された河道網

したがって、次式で定義される関数 $G(m, j)$ は、マグニチュード m の河道網における河道網末端より j 個のリンク数だけ遡った位置にあるサブ流域数の確率密度関数と考えることができる。

$$G(m, j) = \frac{C(m, j)}{2m-1}$$

(13)

式(2)における遅れ時間 t_{Li} は、 i 番目のサブ流域から河道網の末端までに到る河道長を L_i 、流れの伝播速度を V （ここでは問題を単純にするために一定値とする）とすると次のように書くことができる。

$$t_{Li} = L_i / V$$

(14)

したがって、 $\bar{t}_L, \sigma_{L^2}$ に関して次式を得る。

$$\bar{t}_L = E(L_i) / V$$

(15)

$$\sigma_{L^2} = \{E(L_i^2) - E^2(L_i)\} / V^2$$

(16)

実流域におけるリンク長はマグニチュードに依存しているので、この平均値と分散を $\bar{L}(m), \sigma_{L^2}(m)$ と表す。式(15), (16)を式(13)を用いて書き改めると次のようになる。

$$\bar{t}_L = \sum_{j=1}^m (j-1) \bar{L}(m) G(m, j) / V \quad (17)$$

$$\sigma_{L^2} = \sum_{j=1}^m (j-1) \sigma_{L^2}(m) G(m, j) / V^2$$

(18)

$\bar{t}_L, \sigma_{L^2}$ を求めるには、 $\bar{L}(m), \sigma_{L^2}(m)$ を知る必要がある。これらに関しては早川、藤田ら³⁾によって次式が提案されている。

$$\bar{L}(m) = \frac{1.273 A^{0.6}}{1 + \bar{M}_m}$$

$$\bar{A}(m) = \frac{A}{2m-1}$$

(19)

$$\sigma_{m1^2} = \sigma_m^2 \left\{ \frac{2m-1}{2m_1-1} \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{2m-1}{2m_1-1} - 1 \right) \gamma \right\}$$

(20)

γ : 定数

式(19)において、 A は流域の全面積(km^2)で、 $\bar{M}_m$ は本流の合流する平均支流数である。 $\bar{M}_m$ は次式を用いて計算できる。

$$\bar{M}_m = \sum_{i=1}^{[m/2]} p(i, m) (\bar{M}_{m-i} + 1)$$

$$m \geq 4, \bar{M}_1 = 0, \bar{M}_2 = 1, \bar{M}_3 = 2$$

(21)

式(20)は、マグニチュード m における河道網のリンク長やリンクに付随する面積(サブ流域の面積)の分散 σ_m^2 が既知なとき、河道網を任意のマグニチュード m_1 に変更したときのリンク長やサブ流域の面積を示し

ている。すなわち、同一の流域でも1/25000と1/50000の地形図を用いたのでは河道網のマグニチュードが異なる。式(20)はどちらかの地形図を用いて σ_m^2 が既知であると、他の地形図を用いたときそのマグニチュード m_i さえ既知ならばその $\sigma_{m_i}^2$ を推定できることを示している。早川³⁾は、面積に関して $\gamma=0.7$ 、長さに関して $\gamma=0$ とすると実流域への適合度がよいことを報告している。図-4は豊平川上流部の定山溪ダムにおけるデジタルマップ(50mメッシュデータ)を用いて(閾値を設定して疑似河道網を作成)解析したマグニチュードとサブ流域の面積、河道長の1~4次モーメントの関係を示している。図中の1st, 2nd~4thは、1~4次モーメントを示している。また、図には式(19), (20)の理論値も示しているが、内部リンクの河道長や面積に関しては理論式の適合性がよい。これは閾値を設定して疑似河道網を作成するとき外部リンクと内部リンクの特性が異なることによる。地形図よりリンク長やそれに付随する面積を測定する際にも、同様なことが言える。地形図における水線記号は、平水時流水幅1.5m以上、図上長1cm(1万分の1地形図)あるいは2cm(5万分の1地形図)以上の河道を対象としている。したがって、外部リンクと内部リンクに関する諸量に差が生じることになる。次に、河道網のマグニチュード m とサブ流域の河道長や面積の確率密度関数を図-5に示す。図の横軸、縦軸の β_1, β_2 は、それぞれ基準化された河道長や面積の3, 4次モーメントを示している。図では外部リンクと内部リンクに分けて解析しているが、いずれの場合もマグニチュードの増加とともにガンマ分布もしくは対数正規分布に漸近している。確率分布型としては、Johnsonの S_U 分布に属している。

2.2 サブ流域からの流出過程

本論文はサブ流域の面積を確率変数とした取扱いをしているので、流出モデルとしては空間軸も含む分布定数系のモデルを用いる必要がある。流域の規模を示す斜面長、斜面幅などは分布定数系の流出モデルの境界条件に関係しており、これらを確率変数として取り扱うことは難しい。また、一般に分布定数系の流出モデルは与えるべきパラメータの数も多い。一方、分布定数系の流出モデルを集中定数系のモデルに置換する手法としては藤田⁸⁾、松林⁹⁾の研究がある。藤田は Kinematic Wave 理論を基礎として、次の貯留関数を得ている。

$$S = \frac{m}{m+1} \left(\frac{L_s}{\varepsilon} \right)^{1/m} q^{1/m} \quad L_s : \text{斜面長} \quad (22)$$

この式に含まれる、係数 m, ε はKinematic Wave 式の運動の式 $h = \varepsilon q^m$ に現れる定数である。また、松林⁹⁾は不飽和浸透流式を基本として、次の貯留関数を得ている。

$$S = \left(\frac{L_s}{K_s D s \sin \alpha} \right)^{1/\beta} D(\theta_s - \theta_r) q^{1/\beta} \quad (23)$$

K_s, D, α はそれぞれ飽和透水係数、土層厚、斜面の傾斜角を示している。また、 β は不飽和透水係数式に現

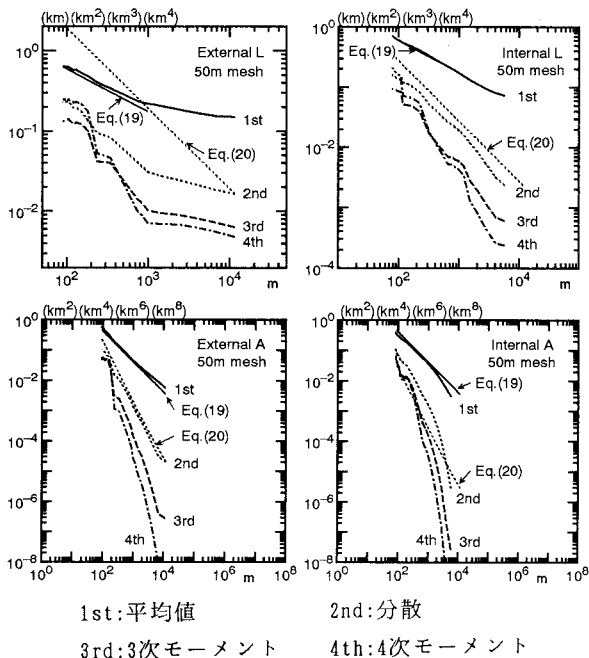
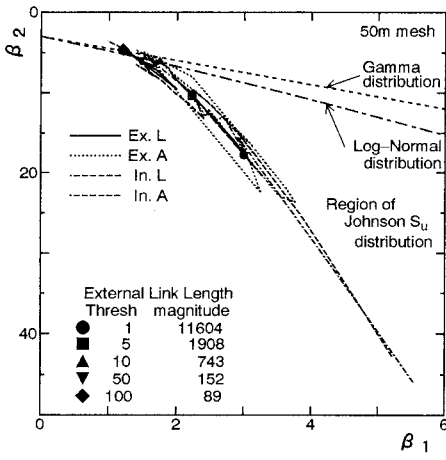


図-4 マグニチュードとリンク長とその面積の統計量



Ex: 外部リンク In: 内部リンク
図-5 リンクに関する諸量の確率分布特性

れる係数である ($K=K_s\{(\theta-\theta_r)/(\theta_s-\theta_r)\}^\beta$)。

式(22), (23)ともに貯留量 S は長さの次元、流出量 q は[長さ/時間]の次元を持っている。いま、Hackの式 $L_m=CA^n$ (L_m :本流長, A :面積, C, n :定数)が、サブ流域でも成立すると考えると L_m は斜面幅に相当することになる。矩形流域を想定すると斜面長 L_s は、次式で与えられる。

$$L_s = \frac{A^{1-n}}{2C} \quad (24)$$

Hackの式によると、係数 n の値は0.6程度なので L_s はサブ流域面積の0.4乗に比例している。流域の地形特性、地質特性は貯留係数に含まれている。各サブ流域毎に式(22)の ε や式(23)の K_s, D, β の値を与えることは難しいが、実用的には代表的な値を採用せざるを得ない。一方、サブ流域の面積や斜面勾配は、地形図より測定できる。これらの量はサブ流域毎に異なっている。ここでは、貯留係数を確率変数としたときの、流出量の確率応答について考える¹⁰⁾。最も簡単な貯留関数法は、次式で与えられる。

$$\frac{dS}{dt} + q = r \quad (25) \quad S = K q^P \quad (26)$$

q :流出量 r :降雨量 K :貯留係数 P :貯留指数

式(26)において K を確率変数と考えると、 q もまた確率変数となる。これらを平均値と平均値からの偏差に分けて考える。

$$K = \bar{K} + \tilde{K}, \quad E(\tilde{K}) = 0 \quad (27) \quad q = \bar{q} + \tilde{q}, \quad E(\tilde{q}) = 0 \quad (28)$$

また、ベキ乗型の確率変数 q^P に関して、次の近似式を用いる。

$$(\bar{q} + \tilde{q})^P = \alpha \bar{q} + \beta \tilde{q} \quad (29)$$

Brasら¹¹⁾は、上式の両辺の誤差の平均値を0、分散を最小にする係数 α, β として次式を提案している。

$$\alpha = \bar{q}^{P-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} P(P-1) \frac{E(\tilde{q}^2)}{\bar{q}^2} + \frac{1}{6} P(P-1)(P-2) \frac{E(\tilde{q}^3)}{\bar{q}^3} + \right\} \quad (30)$$

$$\beta = \frac{\bar{q}^{P+1}}{E(\tilde{q}^2)} \left\{ P \frac{E(\tilde{q}^2)}{\bar{q}^2} + \frac{1}{2} P(P-1) \frac{E(\tilde{q}^3)}{\bar{q}^3} + \frac{1}{6} P(P-1)(P-2) \frac{E(\tilde{q}^4)}{\bar{q}^4} + \right\} \quad (31)$$

式(26)~(29)を用いて、式(25)を書き直すと次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \{ \alpha \bar{K} \bar{q} + \beta \bar{K} \tilde{q} + \alpha \bar{q} \tilde{K} + \beta \tilde{K} \tilde{q} \} + \bar{q} + \tilde{q} = r \quad (32)$$

式(32)の期待値をとると

$$\frac{d}{dt} \{ \alpha \bar{K} \bar{q} + \beta E(\tilde{K} \tilde{q}) \} + \bar{q} = r \quad (33)$$

さらに、式(32)から式(33)を差し引くと次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \{ \beta \bar{K} \tilde{q} + \alpha \bar{q} \tilde{K} + \beta \tilde{K} \tilde{q} - \beta E(\tilde{K} \tilde{q}) \} + \tilde{q} = 0 \quad (34)$$

式(33)が平均流出量 $\bar{q}(t)$ を求める基本式になっているが、これを求めるには相関係数 $E(\tilde{K} \tilde{q})$ の値が必要になる。 $E(\tilde{K} \tilde{q})$ は、式(34)の両辺に $\tilde{K}$ を乗じて期待値をとると得られるが、この式を解くためにはさらに高次の相関係数 $E(\tilde{K}^2 \tilde{q})$ が必要になる。いま、 $E(\tilde{K}^4 \tilde{q})$ 以上の相関係数を無視して、これらの式をまとめると次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \{ \alpha \bar{K} \bar{q} + \beta y_1 \} + \bar{q} = r \quad (35) \quad \frac{d}{dt} \{ \beta \bar{K} y_1 + \alpha \sigma_K^2 \bar{q} + \beta y_2 \} + y_1 = 0 \quad (36)$$

$$\frac{d}{dt} \{ \beta \bar{K} y_2 + \alpha \mu_{K3} \bar{q} + \beta y_3 - \beta \sigma_K^2 y_1 \} + y_2 = 0 \quad (37)$$

$$\frac{d}{dt} \{ \beta \bar{K} y_3 + \alpha \mu_{K4} \bar{q} + \beta y_4 - \beta \mu_{K3} y_1 \} + y_3 = 0 \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt} \{ \beta \bar{K} y_4 - \beta \mu_{K4} y_1 \} + y_4 = 0 \quad y_i = E(\tilde{K}^i \tilde{q}), \quad i=1,2,3,4 \quad (39)$$

ここに、 $\sigma_{K^2}, \mu_{K3}, \mu_{K4}$ は、貯留係数の2～4次モーメントを示している。平均流出量 $\bar{q}$ は、式(35)～(39)の連立微分方程式の解として与えられる。式(34)を変形すると次式を得る。

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} + f(t)\tilde{q} = \frac{1}{K\beta} \{ y_5(t) - \tilde{K}g(t) - \tilde{y}_5(t) \} \quad (40)$$

$$f(t) = \frac{1}{K\beta} \left(\bar{K} \frac{d\beta}{dt} + 1 \right) \quad (41) \quad g(t) = \frac{d(a\bar{q})}{dt} \quad (42)$$

$$y_5(t) = \frac{d\beta E(\tilde{K}\tilde{q})}{dt} \quad (43) \quad \tilde{y}_5(t) = \frac{d(\beta \tilde{K}\tilde{q})}{dt} \quad (44)$$

式(40)を解いて次式を得る。

$$\tilde{q} = e^{-\int f(t)dt} \int \frac{1}{K\beta} \{ y_5(\tau_1) - \tilde{K}g(\tau_1) - \tilde{y}_5(\tau_1) \} e^{\int f(\tau_2)d\tau_2} d\tau_1 \quad (45)$$

式(45)の両辺をそれぞれ2乗して、期待値をとると $q(t)$ の分散 σ_q^2 が得られる。

$$\frac{d\sigma_q^2}{dt} + 2f(t)\sigma_q^2 = \frac{2}{K^2\beta} \{ \sigma_{K^2}g(t)U_1 + y_6(t)U_1 + g(t)U_2 - y_5(t)U_3 \} + U_{10} \quad (46)$$

$$\frac{dU_1}{dt} + f(t)U_1 = \frac{g(t)}{\beta} \quad (47) \quad \frac{dU_2}{dt} + f(t)U_2 = \frac{y_6(t)}{\beta} \quad (48)$$

$$\frac{dU_3}{dt} + f(t)U_3 = \frac{y_5(t)}{\beta} \quad (49) \quad \frac{dU_4}{dt} + f(t)U_4 = \frac{d(\beta U_1)}{\beta dt} \quad (50)$$

$$\frac{dU_5}{dt} + f(t)U_5 = \frac{y_8(t)}{\beta} \quad (51) \quad \frac{dU_6}{dt} + f(t)U_6 = \frac{d(\beta U_5)}{\beta dt} \quad (52)$$

$$\frac{dU_7}{dt} + f(t)U_7 = \frac{d(\beta U_3)}{\beta dt} \quad (53) \quad \frac{dU_8}{dt} + f(t)U_8 = \frac{y_7(t)}{\beta} \quad (54)$$

$$\frac{dU_9}{dt} + f(t)U_9 = \frac{d(\beta U_8)}{\beta dt} \quad (55) \quad y_{i+4}(t) = \frac{d\beta E(\tilde{K}^i \tilde{q})}{dt}, \quad i=1,2,3,4$$

$$U_{10} = \frac{2}{K^4\beta} \left\{ \frac{d(\beta U_1)}{dt} (\mu_{K4}U_4 + U_6 - \mu_{K3}U_7) + \frac{d(\beta U_3)}{dt} (\sigma_{K^2}U_7 - \mu_{K3}U_4 - U_9) + U_4 \frac{d(\beta U_5)}{dt} - U_7 \frac{d(\beta U_8)}{dt} \right\} \quad (56)$$

式(46)の誘導において $E\{\tilde{K}^i \tilde{y}_5(\tau_1) \tilde{y}_5(\tau_2)\}$, $i \geq 2$ を無視している。また、式(46)の σ_q^2 を求めるには、式(35)～(39), (46)～(56)を連立させて解かねばならない。

次に、式(9)の $E\left\{\left(\frac{d\tilde{q}}{dt}\right)^2\right\}$ は式(46)を用いると次式のように表される。

$$E\left\{\left(\frac{d\tilde{q}}{dt}\right)^2\right\} = \frac{1}{(K\beta)^2} \left[\sigma_{K^2}g^2(t) + E\{\tilde{y}_5^2(t)\} - y_5^2(t) + 2g(t)y_6(t) \right] + \frac{2f(t)}{K\beta} \left\{ y_1(t)g(t) + \frac{\beta}{2} \frac{E(\tilde{K}\tilde{q}^2)}{dt} + E(\tilde{K}\tilde{q}^2) \frac{d\beta}{dt} \right\} + f^2(t)\sigma_q^2 \quad (57)$$

式(57)の右辺第2, 6, 7項以外の項は、既に求められている。2, 6, 7項は、式(40)を用いて計算できる。結果のみに示すと以下ようになる。

$$E\{\tilde{y}_5^2(t)\} = \beta^2 \left(\frac{dy_1}{dt} \right)^2 + \beta \frac{d\beta}{dt} \frac{dU_{11}}{dt} + U_{11}^2 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \quad (58)$$

$$\frac{dU_{11}}{dt} + 2f(t)U_{11} = U_{10} + \frac{2}{K^2\beta} \{ \mu_{K3}gU_1 + y_7U_1 + gU_8$$

$$- \sigma_{K^2}(gU_8 + y_5U_1) - y_6U_3 - y_5U_2 \} \quad U_{11}(t) = E(\widetilde{K}\widetilde{q}^2) \quad (59)$$

次に、誘導した式の解として得られる $\bar{q}, \sigma_{q^2}$ をチェックしておく必要がある。貯留係数 K に図-6に示すような矩形分布を与えて、矩形乱数を発生させ式(22), (23)を直接解いて各時刻毎に流出量の平均値と分散を求めた。降雨量については、次式に示すような一定降雨を与えた。

$$r(t) = \begin{cases} \bar{r} & 0 \leq t \leq t_r \\ 0 & t > t_r \end{cases} \quad (60)$$

ここで与えた降雨量は計算を簡単にするためと思われるが、実はそうではなくチェックのために厳しい条件を与えている。いま、式(26)で $P=1$ の場合について考える。ある矩形乱数 K が与えられると、その解は容易に得られる。

$$q = \begin{cases} \bar{r} \{1 - \exp(-t/K)\} & 0 \leq t \leq t_r \\ \bar{r} \{ \exp(t_r/K) - 1 \} \exp(-t/K) & t > t_r \end{cases} \quad (61)$$

したがって、降雨の継続時間 t_r が充分大きいと $q(t)$ は定常解の $\bar{r}$ に漸近する。 K に他の乱数値が与えられても同じことが言える。 $q(t)$ の分散は定常解に到る過渡応答時と降雨終了時の減水部で値を持ち、定常時では0となる。すなわち、この傾向は、 $P \neq 1$ の場合も同じである。一方、本論文で提案している平均流量とその分散を求める理論式は一種の近似式である。これは、式(29)あるいは $\bar{q}, \sigma_{q^2}$ を求める際に無視した高次のモーメントを考えると明かである。理論的には $q(t)$ の分散が正、0、正と変化していても、近似の程度が良好でなければ計算上は負の分散が得られることになる。この意味で、式(60)の矩形降雨波形は理論式のチェックに最適であると考えられる。シュミレーションでは、図-7および式(60)で次の値を設定した。

$$A=4, B=6, \bar{r}=5(\text{mm/hr}), t_r=15(\text{hr}) \quad (62)$$

図-7は式(26)で $P=0.6, 0.8, 1.0$ として、シュミレーションの結果(破線)と理論式の結果(実線)を比較したものである。両者はよく一致している。なお、式(30), (31)の α, β に関しては、第1項のみを採用している。

式(22), (23)において $m=K=2$ とし、式(24)の n を通常用いられている0.6に設定すると、式(22), (23)の貯留関数は、次式で与えられる。

$$S = BA_m^{0.2} q^{0.5} \quad B: \text{定数} \quad (63)$$

係数 B は式(22), (23)によると面積以外の地形や地質によってその値が定まるが、ここでは一定値として扱う。 A_m は河道網のマグニチュードを m としたときのサブ流域の面積である。 A_m をその平均値 $\bar{A}_m$ と平均値からの偏差 $\widetilde{A}_m$ に分けて考えると、式(29)の関係式を用いると次式を得る。

$$K_m = \bar{K}_m + \widetilde{K}_m = BA_m^{0.2} = B(\alpha_1 \bar{A}_m + \beta_1 \widetilde{A}_m) \quad (64)$$

K_m はマグニチュード m の流域のサブ流域に関する貯留係数である。また、係数 α_1, β_1 は式(30), (31)にお

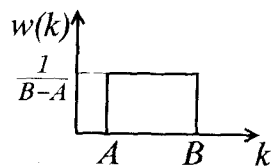


図-6 貯留係数の確率分布

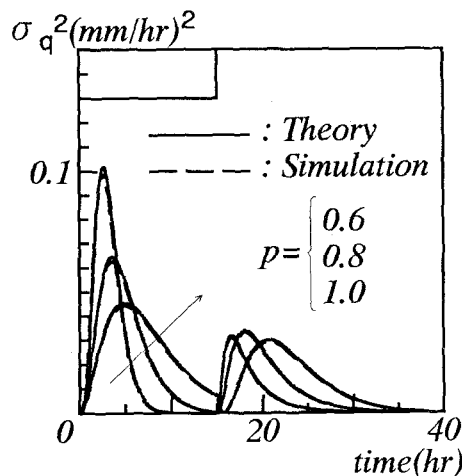
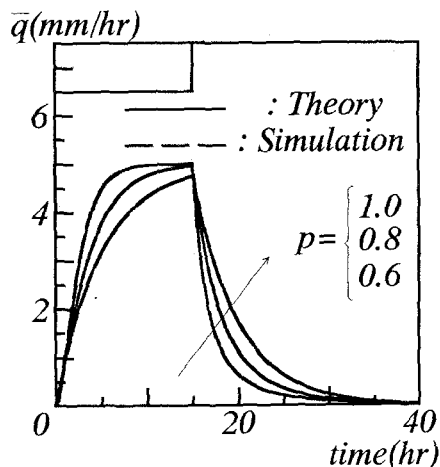


図-7 理論値とシュミレーション値の比較

いて $\bar{q} \rightarrow \bar{A}_m, \tilde{q} \rightarrow \tilde{A}_m, P=0.2$ としたものである。したがって、 K_m の1~4次モーメントは次のようになる。

$$\bar{K}_m = B \alpha_1 \bar{A}_m \quad \sigma_{K_m} = (B \beta_1)^2 \sigma_{A_m}^2 \quad (65)$$

$$\mu_{K_m3} = (B \beta_1)^3 \mu_{A_m3} \quad \mu_{K_m4} = (B \beta_1)^4 \mu_{A_m4} \quad (66) \quad \sigma_Q^2 (\text{mm/hr})^2$$

$\sigma_{A_m}^2, \mu_{A_m3}, \mu_{A_m4} : A_m$ の2~4次モーメント

図-4の結果を用いるとマグニチュードとサブ流域の面積の1~4次モーメントが与えられているので、係数 B の値さえ定めると式(65), (66)の計算ができる。したがって、式(9)の流出量に関する項を全て求めることができる。また $\bar{t}_L, \sigma_{tL}^2$ についても図-4を用いると、マグニチュードごとにこれらの値を得ることができる。図-8は式(17), (18)で $V=1.5 \text{ (m/s)}$ 、式(64)で $B=1.5$ さらに降雨量については図-7と同じ波形を用いて式(9)計算した結果を示している。矩形降雨波形を用いているので図-7に似た分散が得られている。

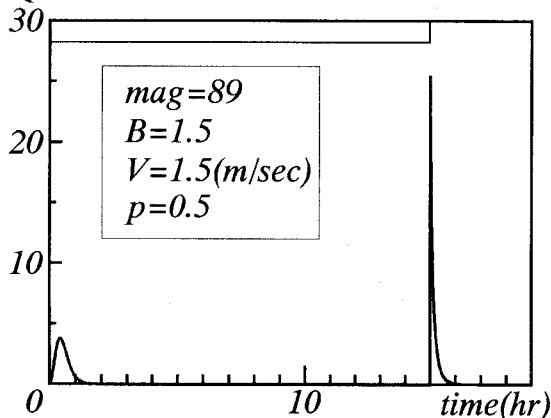


図-8 式(9)の σ_Q^2 の時間変化

3 まとめ

本論文ではサブ流域からの流出量の2次モーメントまでを求める理論式を提案した。図-8は河道網のマグニチュードによって変化するので、その変化の程度におよぼす式(9)の各項の影響を理論的に評価できる。ただし、ここでは、雨量の空間分布を考えておらず、流域全体にわたって一様な降雨波形を想定している。したがって、本理論を実際に利用するにはいくつかの課題が残されている。

なお、本研究は文部省科学研究費総合研究(A)(課題番号04302044, 代表宝馨)の補助を受けた。記して謝意を表する。

<参考文献>

- 1) 陸旻皎, 小池俊雄, 早川典生; 分布型水文情報に対応する流出モデルの開発, 土木学会論文集, 第411/II-12, 135-142, 1989
- 2) 吉野文雄, 吉谷純一, 堀内輝亮; 分布型流出モデルの開発と実流域への適用, 土木技術資料, Vol. 32, No. 10, 54-59, 1990
- 3) 早川博, 藤田睦博; 流域の河道構造を考慮した流出特性, 水工学論文集, 第35巻, 155-160, 1991
- 4) 友杉邦雄; 河域地形構成要素平面量の分布特性に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第19号B, 1976
- 5) 高棹琢馬, 椎葉充晴; 河川流域の地形を考慮した出水系モデルに関する研究, 土木学会論文集, 第248巻, 69-82, 1976
- 6) 藤田睦博; 河道網における支流の分布特性に関する研究, 土木学会論文集, 第246, 35-45, 1976
- 7) 館谷清, 藤田睦博; 河道網特性と貯留関数法に関する研究, 水文・水資源学会誌, Vol. 2, No. 2, 41-48, 1989
- 8) 藤田睦博; 斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究, 土木学会論文集, Vol. 314, 1981
- 9) 松林宇一郎, 高木不折, 古田正; 不飽和浸透流理論に基づく斜面浸透流出モデルの集中化について, 土木学会論文集, No. 497/II-28, 11-20, 1994
- 10) 工藤睦言, 藤田睦博; 貯留型流出モデルの確率応答-貯留係数が不規則関数の場合-, 水文・水資源学会研究発表会要旨集, 60-61, 1993
- 11) Bras, R. L. and Geogakakos, K. P.; Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Streamflow Forecasting-A Statistical Linearization Approach-, Third Int. Symp. on Stochastic Hydraulics, 95-105, 1980