

フィルタード・ポイント過程による 日流出量の確率応答

Stochastic Response of Daily Runoff Based
on a Filtered Point Process

岳 生*・端野 道夫**・名倉 陽子***

By Sheng YUE, Michio HASHINO and Yohko NAGURA

The statistics of a daily rainfall-runoff process are theoretically derived from the characteristic function of a filtered point process. The counting process of a point process (daily rainfall) is represented by one of binomial, Poisson, and negative binomial probability distributions according to the ratio of mean to variance. Marks of the point process are magnitudes of daily rainfall. As an pulse-response function a tank model is adopted. The application of the proposed model to daily rainfall-runoff data at Motoyama in Kochi Prefecture is shown.

Keywords : filtered point process, daily rainfall-runoff process,
response function

1. はしがき

水工計画等への利用を目的として、間欠的生起特性を有する日単位の降雨時系列から適当な線形応答関数を介して、日流出量時系列の積率特性を推定する方法が、Weiss¹⁾、神田²⁾によって研究されている。彼らの研究の基礎は、フィルタード・ポイント過程の最も単純な場合に置いている。このモデルはショット・ノイズ過程と呼ばれ、日降水の計数過程の確率分布はポアソン分布に、日降水量の確率分布は指数分布に従うとし、応答関数としては、一つの指数関数を採用したものである。

実際のデータと流出現象を考えると上述のショット・ノイズモデルの3つの基本仮定には無理があると考え、本論文では、①日降水発生の計数過程の確率分布は、その平均と分散の大小関係を基に、二項分布、ポアソン分布、負の二項分布のいずれかの確率分布で表す。②日降水量は実測データの3次の積率までを考慮する。③応答関数として、3段のタンクモデルを用い、流出量の積率を与える式を誘導する。

なお、ショット・ノイズ過程を含むフィルタード・ポアソン過程の一般的記述は Parzen³⁾、Snyder⁴⁾に詳しいが、ポアソン過程を一般化して、フィルタード・ポイント過程として流出量の積率を与える式の誘導は著者らの知る限り、本論文が初めてである。また、後述のように、3段のタンクモデルの応答関数の積率

* 学生員 工修 徳島大学大学院工学研究科 (〒770 徳島市南常三島町2-1)
** 正 員 工博 徳島大学教授 工学部建設工学科 (同上)
*** 学生員 徳島大学大学院工学研究科 (同上)

計算、特にひずみ係数を与える3次の積率計算では、多くの項を持つ多項式の3乗の定積分を実施せねばならず、手計算での解析解の誘導は不可能に近いと、本論文では数式処理システムREDUCEを援用する。

2. フィルタード・ポイント過程としての流出量とその積率

2.1 定義

日降水時系列 $x_t (t \geq t_0)$ をマート・ポイント過程とし、 n 番目の降水発生日を τ_n 、日降水量（マーク）を u_n とする。また、日降水発生の計数過程 $N_t (t \geq t_0)$ は日降水量 u_n と独立であるとする、フィルタード・ポイント過程としての流出量 $y_t (t \geq t_0)$ は次式のように、日降水量に対する応答の重ね合わせの形で与えられる。

$$y_t = \sum_{n=1}^{N_t} u_n \cdot h(t - \tau_n) \quad (1)$$

ここに、 $h(s)$ 単位日降水量に対する流出量のパルス線形応答関数である。特に、 N_t は発生率 λ のポアソン過程、 u_n は平均 θ_u の指数分布に従う確率変数とし、応答関数として $h(s) = \exp(-\theta_y s)$ なる指数関数を採用した場合をショット・ノイズ過程といい、3つのパラメータ $\lambda, \theta_u, \theta_y$ によって規定される。

本論文では、1カ月程度の期間 (t_0, T) における日降水回数 N_T が従う確率分布として、ポアソン分布に固定するのではなく、その平均 M_N と分散 V_N の大小関係によって、二項分布、ポアソン分布、負の二項分布のいずれかを採用することにする。すなわち、

$$1) M_N > V_N \text{ のとき二項分布: } \Pr(N_T = n) = \{k!/n!/(k-n)!\} \cdot p^n \cdot q^{k-n}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

$$2) M_N = V_N \text{ のときポアソン分布: } \Pr(N_T = n) = (1/n!) \cdot \exp(-\Lambda) \cdot \Lambda^n, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

$$3) M_N < V_N \text{ のとき負の二項分布: } \Pr(N_T = n) = \{(-k)!/n!/(k-n)!\} \cdot p^k \cdot (-q)^n, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

ここに、 $k, p, q (=1-p)$ は二項分布、負の二項分布の、 Λ はポアソン分布のパラメータであり、平均 $E(N_T) \equiv M_N$ 、分散 $V(N_T) \equiv V_N$ との関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} 1) \text{ 二項分布のとき} & \quad M_N = kp, \quad V_N = kpq & \quad \therefore M_N > V_N \\ 2) \text{ ポアソン分布のとき} & \quad M_N = V_N = \Lambda & \quad \therefore M_N = V_N \\ 3) \text{ 負の二項分布のとき} & \quad M_N = kq/p, \quad V_N = kq/p^2 & \quad \therefore M_N < V_N \end{aligned} \quad (5)$$

日降水量 u_n の平均、分散、歪み係数はデータから与えられるものとする。

2.2 特性関数の誘導

流出量 y_t の確率分布の特性関数 $\phi_{y_t}(z) = E[\exp(izy_t)]$ は、条件付き期待値を用いれば次式のように定義される。

$$\phi_{y_t}(z) = \Pr(N_T = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(N_T = n) \cdot E[\exp[iz \cdot \sum_{m=1}^n u_m h(t - \tau_m)] | N_T = n] \quad (6)$$

ここで、期待値の中の $\sum$ の値は、発生時刻 $\tau_m, (m=1, 2, \dots, n)$ をランダムに並べ替えても不変であり、また、 n が与えられたときの発生時刻 $\tau_m, (m=1, 2, \dots, n)$ は互いに独立で同一分布に従うとする。このことより、それらの共通な確率密度関数は次式で与えられる。

$$f_{\tau_t}(\tau) = \lambda_{\tau} / \left(\int_{t_0}^T \lambda_{\sigma} d\sigma \right) \equiv \lambda_{\tau} / E(N_T) \quad (7)$$

ここに、 λ_{τ} は時刻 τ における降水日発生率である。さらに、マーク変数である $u_m, (m=1, 2, \dots, n)$ もまた互いに独立で同一の分布に従うことから次式が得られる^{3) 4)}。

$$E[\exp[iz \cdot \sum_{m=1}^n u_m h(t-\tau_m)] | N_T=n] = \{E(N_T)^{-1} \int_{t_0}^T \lambda_\tau E[\exp(iz \cdot u \cdot h(t-\tau))] d\tau\}^n \quad (8)$$

したがって、(8)式を(6)式に代入すれば、フィルタード・ポイント過程 y_t の特性関数が得られる。

$$\phi_{y_t}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N_T=n) \cdot \{E(N_T)^{-1} \int_{t_0}^T \lambda_\tau E[\exp(iz \cdot u \cdot h(t-\tau))] d\tau\}^n \quad (9)$$

N_T の具体的な確率分布として、(2), (3), (4)式で示される、二項分布、ポアソン分布、負の二項分布を(9)式に用い、 $t < \tau$ のとき $h(t-\tau)=0$ であることを考慮すれば、それぞれの場合の特性関数が得られる。すなわち、

$$1) N_T \text{ が二項分布に従うとき} \quad \phi_{y_t}(z) = \{1 + k^{-1} \int_{t_0}^t \lambda_\tau E[\exp(iz \cdot u \cdot h(t-\tau))] - 1\} d\tau\}^k \quad (10)$$

$$(k = \int_{t_0}^T \lambda_\tau d\tau / p \equiv E(N_T)/p, \quad p = V(N_T)/E(N_T))$$

$$2) N_T \text{ がポアソン分布に従うとき} \quad \phi_{y_t}(z) = \exp\left\{\int_{t_0}^t \lambda_\tau E[\exp(iz \cdot u \cdot h(t-\tau))] - 1\right\} d\tau\} \quad (11)$$

$$(E(N_T) \equiv \int_{t_0}^T \lambda_\tau d\tau)$$

$$3) N_T \text{ が負の二項分布に従うとき} \quad \phi_{y_t}(z) = \{1 - k^{-1} \int_{t_0}^t \lambda_\tau E[\exp(iz \cdot u \cdot h(t-\tau))] - 1\} d\tau\}^{-k} \quad (12)$$

$$(k = p \int_{t_0}^T \lambda_\tau d\tau / q \equiv pE(N_T)/q, \quad p = E(N_T)/V(N_T))$$

2. 3 流出量の積率

時点 $t(t_0 \leq t \leq T)$ における流出量 y_t の n 次のキュムラントを γ_n とすれば、 $\phi_{y_t}(z)$ より γ_n を計算する式 $i^n \gamma_n = (d^n \ln \phi_{y_t}(z) / dz^n)$, ($z=0$) を(10), (11), (12)式に適用すれば、次式が得られる。

$$\gamma_1(y_t) = E(u) \cdot \int_{t_0}^t \lambda_\tau h(t-\tau) d\tau \quad (13)$$

$$\gamma_2(y_t) = E(u^2) \cdot \int_{t_0}^t \lambda_\tau h(t-\tau)^2 d\tau \pm \gamma_1(y_t)^2 / k \quad (14)$$

$$\gamma_3(y_t) = E(u^3) \cdot \int_{t_0}^t \lambda_\tau h(t-\tau)^3 d\tau \pm 3\gamma_2(y_t)\gamma_1(y_t)/k - \gamma_1(y_t)^3/k^2 \quad (15)$$

また、 y_t の共分散関数 $\text{Cov}(y_t, y_{t+j})$ は次式のようになる。

$$\text{Cov}(y_t, y_{t+j}) = E(u^2) \cdot \int_{t_0}^t \lambda_\tau h(t-\tau) \cdot h(t+j-\tau) d\tau \pm \gamma_1(y_t)^2 / k \quad (16)$$

ここに、複号 $\pm$ の正符号は、 N_T が負の二項分布に、負符号は N_T が二項分布に従う場合を示し、 N_T がポアソン分布に従う場合は(14)~(16)式における k を含む項を無視した場合になる。なお、(13)~(15)式で、 $h(t-\tau)=1$ とおけば、マート・ポイント過程（複合分布）としての日降水時系列 x_t のキュムラントを与えることを付記する。

3. 用いるパルス線形応答関数の構造とそのべき乗積分の計算法

実際の河川流域からの流出量は、表面流出、中間流出（早い、遅い）、地下水流出等の、低減特性の流出成分が含まれていることを考え、図-1に示すような3段の直列タンクモデルを設定し、比較的簡単にそのパルス応答関数 $h(s)$ の形を求め易いような、タンクの構造を採用する。図-1に記すようなタンクの孔の大きさを示す記号を用いると、その線形応答関数 $h(s)$ は次式のようになる。

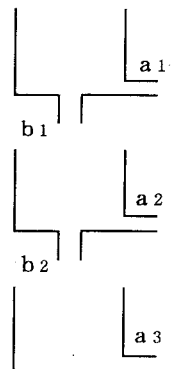


図-1 タンクの構造

$$h(s) = D_{01} + D_{11} \exp(-C_1 s) + D_{21} \exp(-C_2 s) + D_{31} \exp(-C_3 s), \quad (0 \leq s < 1) \quad (17.a)$$

$$h(s)=D_{02}+D_{12}\exp(-C_1s)+D_{22}\exp(-C_2s)+D_{32}\exp(-C_3s), \quad (1 \leq s) \quad (17.b)$$

ここに、 $C_1=a_1+b_1$ 、 $C_2=a_2+b_2$ 、 $C_3=a_3$ 、 $D_{01}, D_{11}, D_{21}, D_{31}, D_{02}, D_{12}, D_{22}, D_{32}$ はパラメータ a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 の関数であるが、具体的な形は省略する。(17)式から明らかなように、 $h(s)$ は低減係数の異なる指数関数の和で与えられることになる。

さて、利水計画等への利用を考え、流出量時系列 $\{y_t\}$ を半旬程度の一定期間 J (日) で平均化する。

$$Y_t = J^{-1} \int_{t-J}^t y_s ds \quad (18)$$

このとき、(18)式に(1)式を代入すれば、

$$Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} u_n \cdot h_J(t - \tau_n) \quad (19)$$

ここに、 $h_J(s)$ は次式で与えられる(日単位)。

$$\begin{aligned} 1) \quad 0 < s < 1 \text{ のとき} \quad h_J(s) &= h_{J1}(s) = J^{-1} \int_0^s h_1(\sigma) d\sigma \\ &= E_{001} + E_{01} \cdot s + E_{11} \exp(-C_1 s) + E_{21} \exp(-C_2 s) + E_{31} \exp(-C_3 s) \end{aligned} \quad (20.a)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 1 < s < J \text{ のとき} \quad h_J(s) &= h_{J2}(s) = J^{-1} \left\{ \int_0^1 h_1(\sigma) d\sigma + \int_1^s h_2(\sigma) d\sigma \right\} \\ &= E_{002} + E_{02} \cdot s + E_{12} \exp(-C_1 s) + E_{22} \exp(-C_2 s) + E_{32} \exp(-C_3 s) \end{aligned} \quad (20.b)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad J < s < (J+1) \text{ のとき} \quad h_J(s) &= h_{J3}(s) = J^{-1} \left\{ \int_{s-J}^1 h_1(\sigma) d\sigma + \int_1^s h_2(\sigma) d\sigma \right\} \\ &= E_{003} + E_{03} \cdot s + E_{13} \exp(-C_1 s) + E_{23} \exp(-C_2 s) + E_{33} \exp(-C_3 s) \end{aligned} \quad (20.c)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad (J+1) < s \text{ のとき} \quad h_J(s) &= h_{J4}(s) = J^{-1} \int_{s-J}^s h_2(\sigma) d\sigma \\ &= E_{004} + E_{14} \exp(-C_1 s) + E_{24} \exp(-C_2 s) + E_{34} \exp(-C_3 s) \end{aligned} \quad (20.d)$$

ここに、 $E_{00i}, E_{0i}, E_{1i}, E_{2i}, E_{3i}, (i=1, 2, 3, 4)$ は $D_{0j}, D_{1j}, D_{2j}, D_{3j}, (j=1, 2)$ の関数であり、パラメータ a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 の関数でもある。

したがって、平均化した流出量 Y_t のキュムラントと共分散は(13)～(15)で、 y_t を Y_t に、 $h(s)$ を $h_J(s)$ に置き換えた式で与えられる。

降水日発生率 λ_t が期間 $[t_0, T]$ で $\lambda_t = \text{一定}$ であるとし、 $t_0 = \infty$ と置くと、平均化された Y_t のキュムラントと共分散が得られる。そのとき、応答関数 $h_J(s)$ についてのべき乗の定積分を実施しなければならない。この定積分は次数 n と多項式の項数が増えるにつれて、急激に煩雑となり、手計算での解析解の誘導はほとんど不可能になり、ここではパソコン上で作動する数式処理システム REDUCE を援用した。解析結果を省略するが共分散では FORTRAN 形式で約150行、3次のキュムラントでは約260行を要した。

4. 適用例

高知県の早明浦ダム流域(472 km²)を対象とし、ダムサイト直下流の本山での日降水量データよりダム流入量のキュムラント(平均、分散、歪み係数)を推定し、観測流量のそれと比較する。

4. 1 本山の月別日降水特性と5日平均流量特性

1953年～1989年の欠測期間を除く約32年間のデータより求めた各月の日降水回数 N_T の平均 M_N 、分散 V_N と日降水量 r の平均 M_r 、分散 V_r 、歪み係数 C_r 、自己相関係数 ρ_r と5日平均流量 $Y(\text{mm/day})$ の平均 M_Y 、分散 V_Y 、歪み係数 C_Y 、自己相関係数 ρ_Y を表-1に示す。この表によれば、1ヶ月の日降水回数(0.5mm/day以上)の分布は二項分布もしくは負の二項分布が適切であることが窺える。特に、6、8、9月は平均より分散の方が大きく、負の二項分布が適切であるといえる。日降水量の積率では、8、9月の分散が極めて大

きいことと7、8、9月で0.2～0.4程度の自己相関係数があることが分かる。これは主として（前線及び）台風により、一時に大量のまとまった降水がもたらされることに帰因していると思われる。歪み係数がいずれの月も2を越えていることから指数分布（歪み係数2）よりも歪んだ分布をすることが分かる。

表一 1 月別日降水特性と5日平均流量の積率特性（単位：mm・day）

月	M _N	V _N	M _r	V _r	C _r	ρ _r	M _Y	V _Y	C _Y	ρ _Y
1	7.6	9.1	8.4	137.3	3.965	0.041	1.4	0.9	1.038	0.788
2	8.6	11.2	10.4	206.0	4.749	0.059	2.2	3.3	1.921	0.641
3	10.9	8.1	13.4	282.5	3.695	0.016	3.6	4.1	1.562	0.487
4	12.6	12.0	19.7	582.8	3.220	0.000	5.6	15.4	2.312	0.360
5	12.6	11.1	18.2	450.8	3.727	0.106	5.4	20.7	4.773	0.272
6	12.9	15.4	24.7	1193.8	4.518	0.090	7.4	54.4	2.583	0.374
7	14.6	12.3	22.3	1303.2	5.300	0.381	8.4	111.3	3.455	0.233
8	16.0	27.0	29.1	2808.9	5.326	0.253	10.4	351.3	3.482	0.217
9	15.0	17.9	33.9	3724.1	4.462	0.411	13.4	634.6	3.762	0.225
10	11.5	12.2	16.5	738.1	5.690	0.044	4.2	52.5	6.926	0.174
11	8.3	8.5	15.7	903.6	7.058	0.011	2.6	8.6	4.463	0.436
12	6.9	6.6	8.3	121.9	3.978	-0.121	1.4	0.8	1.396	0.625

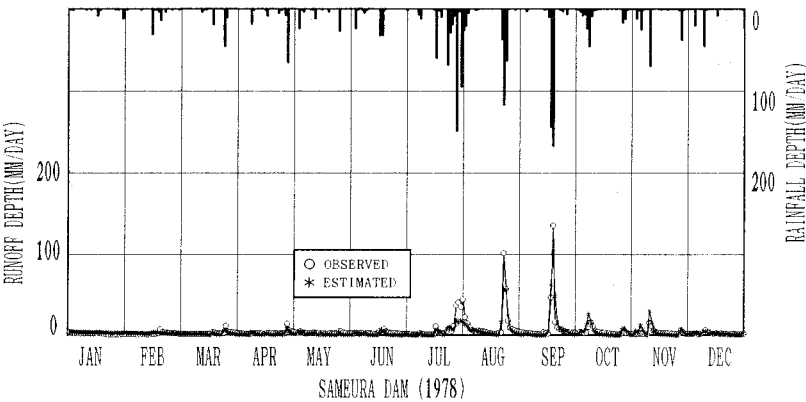
5日平均流量の積率特性では、他月とは異なり、1月と12月の分散は平均よりも小さいことと自己相関係数が高い(0.625～0.788)ことが目に付く。この原因として、上流に位置する発電用貯水池の放流操作といった人為的影響の外に積雪、融雪も考えられる。一方、8、9月を中心に、6～10月では分散が大きく、このため、自己相関係数も0.2程度の小さい値をとる。

4. 2 応答関数のパラメータ同定

タンクモデルのパラメータ a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 を同定する際に、これ以外に二つのパラメータを加えた。その一つは月平均気温を用いて流域蒸発散量を Hamon 式により推定するときの補正係数 f_s であり、二つ目は流域の代表降水量とするための、本山降水量の補正係数 f_r である。解析期間として、年間を冬期(12-2月)、台風期(7-10月)とその他(3-6, 11月)の三つに分割し、それぞれについて、シンプレックス法によるパラメータ同定を1977-1989年の各年に実施した。その平均を表一 2 に示す。

表一 2 タンクモデルの同定されたパラメータ

期間(月)	a ₁	b ₁	a ₂	b ₂	a ₃
1-2, 12	0.147	1.820	0.113	0.287	0.026
3-6, 11	0.730	1.833	0.136	0.025	0.022
7 - 10	2.929	3.380	0.892	0.188	0.227



図一 2 ハイドログラフの1例

図一 2 に計算日流量の実測日流量(mm/day)に対する適合性の 1 例を示す。全般的にはほぼ良好であるが、台風期では高水ピーク付近及び低水部で過小気味の傾向が見られる。本来、流出機構に明確な季節変化はないと思われるが、採用すべき応答関数は線形でなければならないという理論上の前提条件がある。このため、非線形性の強い表面流出成分が卓越する頻度が高くなる期間では、それがパラメータ値にしわ寄せされた形となって現れているようである。

4. 3 流量時系列の積率

便宜上、本山降水量 r を流域代表降水量 u としているが、平均値だけでなく、分散、歪み係数まで補正係数を導入することにし、それらを α_M 、 α_V 、 α_C 、とする。すなわち、3. で述べた方法による日降水量の $E(u)$ 、 $E(u^2)$ 、 $E(u^3)$ の計算において本山降水量 r の平均、分散、歪み係数にそれぞれ α_M 、 α_V 、 α_C を乗じて 5 日平均流量のキュムラント $\gamma_1(Y_1)$ 、 $\gamma_2(Y_1)$ 、 $\gamma_3(Y_1)$ がそれらの実測値に一致するように逆算した。各月の逆算された補正係数を表一 3 に示す。また、用いた応答関数から計算される 5 日平均流量の自己相関係数も併記する。この表によれば、9 月を除いて全般的に逆算された補正係数はほぼ妥当な値と思われるが、9 月の分散の補正係数 α_V が過大のようである。また、7 月—10 月の 5 日平均流量の自己相関係数は実測値のそれに比べ小さくなっている。このようなことから、7 月—10 月では、非線形性の強い表面流出成分が卓越する頻度が高く、ここで採用した直列 3 段タンクの線形応答関数では十分に表面流出成分を表現できていないようであり、表面流出成分に対するタンクモデルの構造と応答関数についての改良が必要であろう、また、それに対応して Y_1 のキュムラントの理論解を修正しなければならないことを示唆していると考ええる。

5. まとめ

日降水時系列から日流出量時系列に変換する、最も単純なモデルであるショット・ノイズ過程を発展させて一般化して、フィルタード・ポイント過程として（タンクモデル型の応答関数を用い）流出量の積率を与える式を誘導した。実流域の日降水・日流量資料で理論解の検証をしたが、表面流出成分が卓越しない期間ではほぼ妥当な結果を得た。しかし、表面流出成分が卓越する期間での応答関数（タンクモデルの構造）の改良と理論解の修正が必要である。最後に、本研究は河川整備基金助成金（代表：端野道夫）による研究の一部であることを記し、謝意を表します。

参考文献

- 1) Weiss, G.: Shot noise models for the generation of synthetic streamflow data, WRR, Vol. 13, No.1, 1977, pp.101-108.
- 2) 神田 徹：ショット・ノイズ過程の基礎特性と流量時系列への適用性，第27回水理講演会論文集，1983, pp.435-442.
- 3) Parzen, E.: Stochastic Processes, Holden-Day, San Francisco, 1962.
- 4) Snyder, D.L.: Random point processes, John Wiley & Sons, 1975.

表一 3 逆算された本山降水量特性の補正係数と推定 5 日平均流量の自己相関係数

月	α_M	α_V	α_C	$E(\rho_Y)$
1	0.784	0.081	0.224	0.378
2	0.883	0.450	0.731	0.381
3	0.749	0.267	1.183	0.540
4	0.599	0.676	1.484	0.508
5	0.614	1.319	2.748	0.510
6	0.694	1.253	1.113	0.497
7	0.780	0.888	1.141	0.126
8	0.668	1.329	1.069	0.124
9	0.756	1.975	1.334	0.125
10	0.597	1.040	1.853	0.125
11	0.543	0.410	1.061	0.503
12	0.801	0.088	1.435	0.407