

滑面固定床上における堆積限界掃流輸送量

A Formula for The Maximum Rate of Bed-load Transport
on Smooth and Fixed Bed

岡部健士*・穴瀬康雄**・山下秀基**

By Takeshi OKABE, Yasuo ANASE and Hideki YAMASHITA

This paper describes a new formula for the calculation of the maximum rate of bed-load transport on smooth and fixed beds. The transport rate in unit width is expressed as the product of the volume of the moving particles on unit area of bed surface and their mean advancing velocity. Both the factors are formulated by considering, more strictly than previous studies, the interference between fluid and moving particles, the variation in friction coefficient of the particles with their velocity and so on. The results of calculation with the proposed formula show fairly good agreement with existing flume data.

Keywords: bed-load, fixed bed, transport rate, mixing length

1. まえがき

貯水池の土砂バイパスや基岩露出の可能性がある山地河川などの土砂移動問題を取り扱う場合、固定床断面の流送土砂量に対する適確な計算モデルが必要となる。固定床断面の流砂量特性は複雑であるが、単純には、まず、流れが土砂の堆積のない状態で輸送し得る最大の流送量（以下、堆積限界掃流輸送量と呼ぶ）を求め、つぎに、これと上流からの土砂供給量を比較して、前者が後者より小さければ堆積が生じるので移動床としての取り扱いをし、逆に大きければ、wash loadと同様に後者がそのまま通過すると考えればよい。

固定床上の堆積限界掃流輸送量については、すでにIshihara et al.¹⁾, Pedroli²⁾らの実験的研究、ならびに嶋・早川³⁾, 椿・平野・渡辺⁴⁾および道上⁵⁾の理論的研究がある。しかし、いずれにおいても、流砂に作用する流体力の代表流速の取り扱いに厳密さを欠いている点、あるいは流砂に作用する底面抵抗に及ぼす粒子移動速度の影響が十分考慮されていない点など、いくつかの問題が残されている。そこで、本研究では、改めて限界掃流輸送量の定式化を目的とした理論的考察を行った。なお、この種の問題に対するアプローチには、種々の方向性が考えられるが、本研究では、実用上の観点より、輸送量方程式の基本形を誘導する際には道上⁵⁾の流砂量理論を基礎とし、流砂を伴う固定床上の流れの流速分布式については岩垣⁶⁾の混合長理論を参考にした。

* 正会員 工博 徳島大学助教授 工学部建設工学科 (〒770 徳島市南常三島町2-1)

** 学生員 徳島大学大学院 工学研究科建設工学専攻 (同上)

2. 堆積限界掃流輸送量式の基本形

河床の単位幅当りの限界掃流輸送量 q_T は、まず、

$$q_T = V \cdot v_s \quad (1)$$

のように表すことができる。ここに、 V ：河床単位面積当りに存在する流砂の容積、 v_s ：砂礫粒子群の平均移動速度である。

はじめに、単位面積当りの容積 V について考える。ところで、道上⁵⁾は飛砂を伴う空気流の流速分布に関するBagnold⁷⁾の実験結果を参考に、底面付近のせん断応力分布を図-1のようにモデル化した。底面付近では、みかけのせん断応力 τ_0 が、流れに作用するもの τ_f と流砂に作用するもの τ_G とに分割されるとともに、底面上では、流れのせん断応力が砂礫粒子の移動限界掃流力 τ_c に等しいと仮定されている。このようなせん断応力分布のモデルに基づき、移動砂礫に関する力の釣合式を記述するとつぎのようになる。

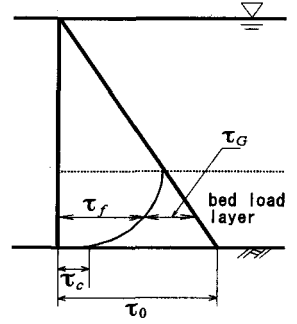


図-1 せん断応力の説明図

$$\tau_0 - \tau_c = \mu_m (\sigma - \rho) g V \quad (2)$$

ここに、 μ_m ：砂礫粒子の動摩擦係数、 σ ：砂の密度、 ρ ：水の密度、 g ：重力加速度である。

つぎに、砂礫粒子の平均移動速度について考える。一つの砂礫粒子に着目すると、流体が砂礫に及ぼす抗力と底面摩擦力の釣合関係から、次式を得る。

$$\frac{1}{2} \rho C_{Dm} (u_b - v_s)^2 K_2 d^2 = \mu_m (\sigma - \rho) g K_3 d^3 \quad (3)$$

ここに、 d ：砂礫粒子の代表粒径、 C_{Dm} ：砂礫粒子が運動状態にある際の抗力係数、 u_b ：流体力の代表流速、 K_2 ：面積係数、 K_3 ：体積係数である。ただし、ここでは砂礫に作用する回転モーメントやMagnus効果の影響については考慮していない。また、砂礫粒子の移動限界 ($v_s = 0$) の状態では、次式が成立する。

$$\frac{1}{2} \rho C_{Dc} (u_{bc} - 0)^2 K_2 d^2 = \mu_c (\sigma - \rho) g K_3 d^3 \quad (4)$$

ここに、 C_{Dc} ：砂礫粒子が移動限界状態にある際の抗力係数、 u_{bc} ：移動限界状態での流体力の代表流速、 μ_c ：砂礫粒子の静止摩擦係数である。(3)および(4)式よりの v_s 表示式を求めれば、

$$\frac{v_s}{u_*} = \frac{u_b}{u_*} - \sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_c} \frac{C_{Dc}}{C_{Dm}} \frac{u_{bc}}{u_*}} \quad (5)$$

となる。ここに、 u_* ：流れのみかけの摩擦速度 ($= \sqrt{\tau_0 / \rho}$)、 u_{*c} ：移動限界摩擦速度 ($= \sqrt{\tau_c / \rho}$)、そして、 u_b 、 u_{bc} としては、河床からの高さ $y = d$ の流速を用いるものとするとともに、固定床は滑面と考えることにすれば、 u_b / u_* および u_{bc} / u_{*c} はそれぞれ粒子レイノルズ数 $u_* d / \nu$ および $u_{*c} d / \nu$ の関数になっているものと期待される。ただし、その関数形は流砂の有無によって変化するものと考えなければならない。すなわち、

$$\frac{u_b}{u_*} = f\left(\frac{u_* d}{\nu}\right) \quad (6), \quad \frac{u_{bc}}{u_{*c}} = f_c\left(\frac{u_{*c} d}{\nu}\right) \quad (7)$$

ここに、 ν ：水の動粘性係数、 $f(u_* d / \nu)$ および $f_c(u_{*c} d / \nu)$ は、それぞれ流砂が存在する場合および存在しない場合の流速分布関数である。そして、2つの流速分布関数のうち $f_c(u_{*c} d / \nu)$ に対しては、つぎのような滑面对数則の適用が可能と思われる。

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{K} \ln(Y) + 5.5 \quad (8), \quad \text{ただし、} Y = \frac{u_* y}{\nu} \quad (9)$$

ここに、 K ：Kármán定数 ($= 0.4$)。

一方、 $f(u_* d / \nu)$ としては、流砂の存在を考慮した分布形を考える必要があるが、現状では利用できないものがないので次節において検討する。最後に、(1)、(2)および(5)式に基づいて q_T を無次元表示した結果を示すと次式のようなものである。

$$\frac{q_T}{u_* d} = \frac{1}{\mu_c} \left(\frac{1}{\mu_m / \mu_c} \right) (\tau_* - \tau_{*c}) f \left(\frac{u_* d}{\nu} \right) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_c}} \sqrt{\frac{C_{Dc}}{C_{Dm}}} \frac{f_c(u_* d / \nu)}{f(u_* d / \nu)} \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}} \right\} \quad (10)$$

なお、上式は、関数 f と f_c が同形で、 $\mu_m = \mu_c$ 、 $C_{Dc} = C_{Dm}$ とみなすときに道式と一致する。しかし、Ishihara et al. による実験結果¹⁾などを参照すれば流砂の流速分布に及ぼす影響がかなり大きいことは明らかであるし、粒子の摩擦係数や流体抵抗係数も一定ではなく、著者らの考察におけるように、それぞれ粒子の運動状態や流体との相対速度によって変化すると考えておくのがより妥当であろう。

(10)式を実用化するためには、関数 f を定式化するとともにパラメータ τ_{*c} 、 μ_c 、 μ_m / μ_c および C_{Dc} / C_{Dm} の特性を明らかにしておく必要がある。これらのうち f については、次節で述べるようにある程度理論的な考察が可能であったが、その他のパラメータについては理論的な取り扱いがきわめて困難なように思われた。そこで、本研究では、本文3.3ならびに4.で述べるように、既往の実験結果などを参考にしつつ経験的にその特性を把握した。

3. 流砂を伴う流れの流速分布式

3.1 理論的考察

ここでは、混合長理論に基づき、滑面固定床上で堆積限界状態の流砂を伴う流れの流速分布を定式化する。

まず、プラントルの混合長 ℓ を用いれば、流体内せん断応力 τ と速度勾配 du/dy の関係が次式のように表される。

$$\tau = \rho \nu \frac{du}{dy} + \rho \ell^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (11)$$

そして、 τ と ℓ の分布については図-1と岩垣⁶⁾の理論を参考にして、図-2のようにモデル化する。すなわち、流れの全領域を、

(領域1) $0 \leq y \leq \delta_L$,

(領域2) $\delta_L \leq y \leq \alpha d$,

(領域3) $y \geq \alpha d$

の3領域に分割し、それぞれに対して τ と ℓ を下記のように仮定する。

(領域1) $\tau = \tau_c$, $\ell = 0$ (12a)

(領域2) $\tau = \tau_s = (\tau_c + \tau_0)/2$, $\ell = \kappa'(y - \delta_L)$ (12b)

(領域3) $\tau = \tau_0$, $\ell = \kappa(y - \alpha d) + \ell_0$ (12c)

ここに、 α : 流砂の存在が流れに直接的な影響を及ぼす範囲に関する係数、 ℓ_0 : 流砂による乱流混合の促進もしくは抑制を評価するための付加的混合長、 δ_L : 粘性底層厚さ、 κ' : ℓ_0 により修正されるKármán定数である。これらのうち、 κ' は、 $y = \alpha d$ における ℓ の値の連続条件から、つぎのように表される。

$$\kappa' = \kappa + \frac{\ell_0 / d}{\alpha - \frac{u_{*c} \delta_L / \nu}{u_* d}} \quad (13)$$

なお、図-2では、 $\alpha d > \delta_L$ と仮定されているが、条件によっては $\alpha d \leq \delta_L$ の場合もあり得る。そして、この場合には、もちろん ℓ や τ のモデル化の方法なども変える必要がある。しかし、この点については説明の都合上後述することにして、

さて、領域1は、いわゆる粘性底層に相当するものであり、no-slip conditionのもとでの(11)式の解はつぎようになる。

$$(\text{領域1}) \quad U = U_{*c}^2 Y \quad (14)$$

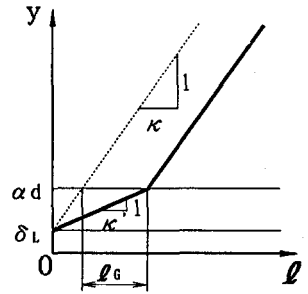
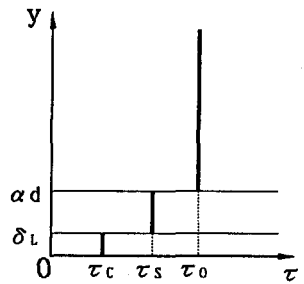


図-2 せん断応力と混合長の仮定

$$\text{ただし, } U = u/u_* \quad (15a) \quad , \quad U_{*c} = u_{*c}/u_* \quad (15b)$$

一方、領域2および3においては、 ℓ が y の一次関数で表されており、それぞれを形式的に $\ell = ay + b$ のように記述すると、2つの領域に共通した一般解として次式を得る。

$$U = \frac{1}{a} g(L) + \text{const.} \quad (16)$$

$$\text{ここに, } g(L) = \ln \left\{ 2L + 2\sqrt{L^2 + \frac{1}{4}} \right\} + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{L^2 + \frac{1}{4}} \right) \quad (17a) \quad , \quad L = \frac{\sqrt{\tau/\rho} \cdot \ell}{v} \quad (17b)$$

ついで、各領域の境界における流速の連続条件から(16)式の積分定数を求めると、領域2および領域3の流速分布が以下のように記述される。

$$(\text{領域2}) \quad U = \frac{U_{*s}}{\kappa'} g(L_2) + R_{*cb} U_{*c} \quad (18)$$

$$\text{ただし, } L_2 = \kappa' U_{*s} \left(Y - \frac{R_{*cb}}{U_{*c}} \right) \quad (19a) \quad , \quad U_{*s} = \frac{\sqrt{(u_{*c}^2 + u_*^2)/2}}{u_*} \quad (19b) \quad , \quad R_{*cb} = \frac{u_{*c} \delta_L}{v} \quad (19c)$$

$$(\text{領域3}) \quad U = \frac{1}{\kappa} g(L_3) + A \quad (20)$$

$$\text{ただし, } L_3 = \kappa \left(Y - \frac{R_{*cb}}{U_{*c}} \right) + \frac{R_{*cg}}{U_{*c}} \quad (21a) \quad , \quad R_{*cg} = \frac{u_{*c} \ell_G}{v} \quad (21b)$$

であり、定数 A はつぎのように表される。

$$A = \frac{U_{*s}}{\kappa'} g(U_{*s} L_4) + R_{*cb} U_{*c} - \frac{1}{\kappa} g(L_4) \quad (22)$$

$$\text{ただし, } L_4 = \kappa \left(\alpha D - \frac{R_{*cb}}{U_{*c}} \right) + \frac{R_{*cb}}{U_{*c}} \quad (23a) \quad , \quad D = \frac{u_* d}{v} \quad (23b)$$

ところで、領域3において $L \gg \frac{1}{2}$ のとき(17a)式のように定義された関数 $g(L)$ は、次式のように近似できる。

$$g(L) \approx g'(L) = \ln(4L) - 1 \quad (24)$$

また、 $y \gg \delta_L$ において L_3 は、 $L_3 \approx L_3' = \kappa Y$ のように近似できる。そして、移動限界状態においては、(20)式の近似式

$$U = \frac{1}{\kappa} g'(L_3') + A \quad (25)$$

が、(8)式と一致するものとする、 R_{*cb} が次式のように決定される。

$$R_{*cb} = 6.825 \quad (26)$$

つぎに、先に触れた $\alpha d \leq \delta_L$ となる場合について考える。まず、 $0 \leq y \leq \delta_L$ の領域では、 $\ell = 0$ 、 $\tau = \tau_c$ と仮定すれば、(14)式と同一の分布式が得られる。一方、 $y > \delta_L$ の領域については、単純に $\ell = \kappa y$ 、 $\tau = \tau_0$ と仮定するとともに、(11)式の粘性項を無視すれば、つぎのような分布式が得られる。

$$U = \frac{1}{\kappa} \ln(Y) + \left\{ R_{*cb} U_{*c} - \frac{1}{\kappa} \ln(R_{*cb}/U_{*c}) \right\} \quad (27)$$

ただし、 R_{*cb} の値は、(26)式に示されるものではなく、 $u_* = u_{*c}$ の場合に(27)式が(8)式と一致するように決めれば、 $R_{*cb} = 11.64$ となる。

3.2 実験結果に基づく検討

(1) 実験概要

3.1節において定式化した流速分布式の適合性を詳細に検討する際の基礎資料を得るために水路実験を行った。実験には、全長14.6m、全幅0.6mの鋼製・滑面水路を用い、表-1に示す水理条件のもとで、外径1mmのピトー管を使用して流速の鉛直分布を測定した。ところで、外径 ϕ_p のピトー管を用いる場合、原理上 $y < \phi_p/2$ の範囲における流速を知ることはできない。しかし、図-3に示すように、ピトー管を路床に接触させた状態(位置)から微小なピッチ Δy で逐次引き上げつつ差圧 $\Delta P_i (i = 1, 2, \dots)$ を計測するならば、面ABCの

重心位置 $y_L \approx y_i - \phi_p / 2 + \Delta y / 2 + (4 - \pi) \phi_p / 8$ における差圧 ΔP_L が、次式により近似的に求められる。

$$\Delta P_L = \Delta P_U - \frac{\phi_p}{\Delta y} (\Delta P_{i+1} - \Delta P_i) \quad (28)$$

ここに、 ΔP_U は面ADCの重心位置

$y_U \approx y_{i+1} + \phi_p / 2 - \Delta y / 2 - (4 - \pi) \phi_p / 8$ における差圧で、 ΔP_i の一連の資料に基づき、内挿法で推定するものとする。

(2) 計算値と実測値との比較・検討

3.1節で提案した流速分布式による計算を行うには、パラメータとして τ_{*c} 、 α および l_G を与える必要がある。このうち τ_{*c} については、すでに Maione⁸⁾、道上⁵⁾らの式があるが、その定義が必ずしも統一されていない。そこで、新たに、 $q_T / u_* d = 10^{-3}$ を移動限界状態と定義し、既存の資料を再整理した結果、図-4を得た。そして、この結果を次式によって代表させることにした。

$$d < 0.1548 \text{ cm} : \tau_{*c} = \frac{0.45}{(u_* d / \nu)} \quad (29a)$$

$$d > 0.1548 \text{ cm} : \tau_{*c} = \frac{0.0585}{(u_* d / \nu)^{0.4}} \quad (29b)$$

つぎに、 α については、実測したいずれの流速分布においても、粒径の1.2倍程度の高さを境に流速分布形が異なる傾向が認められたことから、 $\alpha = 1.2$ が適当と判断した。最後に、 l_G については、実験値と計算値との比較を通してその特性を把握することにした。

図-5は、 $l_G = 0$ とした際の計算値 (実線) と実験値 (描点) を比較したものである。いずれの実験ケースにおいても、 $0 < Y < \alpha d$ の領域での適合性は概ね良好であるが、 $Y \gg \alpha d$ の領域についてみると、 τ_{*c} が小さいケースにおいて適合性があまり良くない。ところで、限界掃流輸送量式の (10) 式との関連では、 $Y = D$ の流速が重要であり、この限りにおいては、実用上 $l_G = 0$ とした取り扱いで十分と思われるが、流砂を伴う流れの抵抗則までも的確に推定するためには、 l_G は変化するものとして取り扱うほうがよい。そこで、RUN A-1 および RUN B-1 について l_G の最適値を試行錯誤的に探索した結果、それぞれのケースについて $l_G / d = +0.035$ および $+0.16$ を得た。図中の破線は、これらの l_G を用いた計算結果を示すものである。 l_G を変化させることにより $Y > \alpha d$ の領域の流速勾配の変化を良好に再現できることがわかる。しかし、現段階においては実験ケース数が少ないので、 l_G / d の特

表-1 実験諸元

ケース名	粒径 (cm)	勾配	水深 (cm)	$qr (\text{cm}^2/\text{s})$	流量 (ℓ/s)
RUN A-1	0.085	0.0025	2.475	0.023	5.7
RUN A-2	0.085	0.0025	4.225	0.076	12.45
RUN B-1	0.170	0.0025	2.300	0.020	5.38
RUN B-2	0.170	0.0025	3.750	0.074	10.53

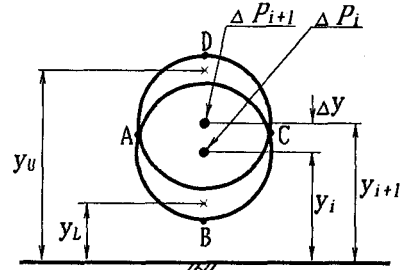


図-3 参考図

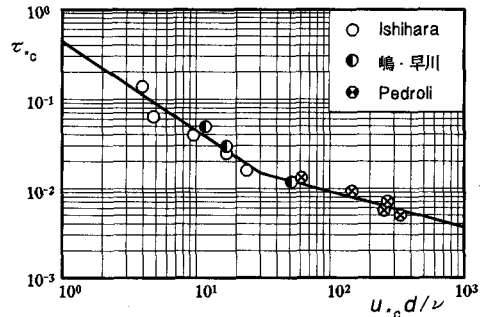


図-4 τ_{*c} と $u_* d / \nu$ の関係

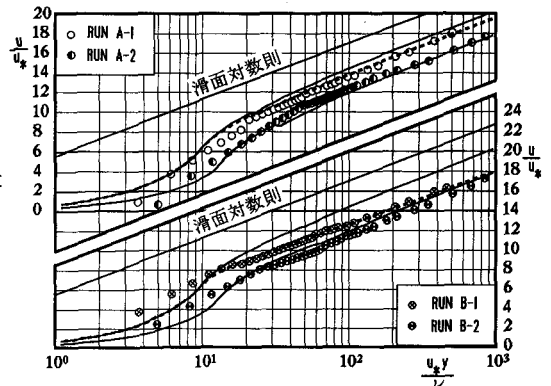


図-5 流速分布の実測値と計算値の比較
(著者らの実験)

性を明らかにできておらず、この点については、今後の課題としている。なお、図中で計算曲線の一部に不連続的な箇所が現れているのは、 R_{ed} を(26)式のように決定する際に、領域3の流速分布式を(25)式のように近似したこと起因している。今後、この点についても改善を加える必要がある。

参考のために、提案した流速分布式をIshihara et al.¹⁾の実験に適用した結果($\ell_G = 0$)を図-6に示す。勾配が緩く、水深が深いケースにおいては実験値と計算値がある程度一致している。しかし、急勾配で水深が浅いものでは、かなり適合性が悪くなっている。これは、著者らの分布式が、急勾配で浅い流れに特有の転波列といった水面波の影響までも考慮したものではないために生じる当然の結果といえる。

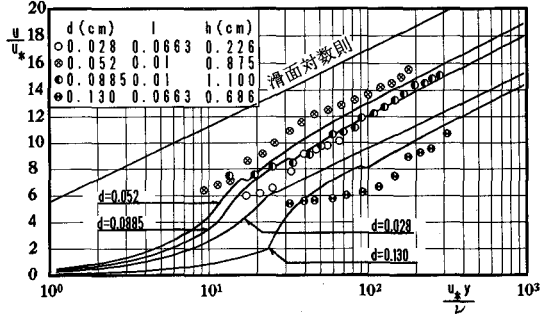


図-6 流速分布の実測値と計算値の比較
(Ishihara et al.の実験)

4. 限界輸送量式の同定

ここでは、著者らの限界掃流輸送量式に導入された C_{Dc}/C_{Dm} 、 μ_c および μ_m/μ_c の最適値の検討をしたのち、この結果に基づいて限界掃流輸送量式の適合性を調べた結果について述べる。

まず、 C_{Dc}/C_{Dm} について考える。一般に粒子の流体抵抗係数 C_D は相対速度と粒径によって定義されるレイノルズ数 R_{ed} の関数である。ただし、砂礫粒子の場合には、形状係数が球のそれに相当する1.0にきわめて近くはなく、また、相対速度が非常に小さくない限り R_{ed} による C_D の変化は小さい⁹⁾。そこで、この段階では一応、 $C_{Dc}/C_{Dm} = 1$ としておく。つぎに、 μ_c については、椿らの実験成果などより0.4から0.6程度と推察される。そこで、ここでは仮に $\mu_c = 0.5$ としておく。最後に、 μ_m/μ_c は、 $\tau_* = \tau_{*c}$ の場合に $\mu_m/\mu_c = 1$ 、であるが、 τ_* が増すと回転や小跳躍といった運動形態をとる機会が多くなるため次第に減少するものと思われる。しかし、このような過程を理論的に取り扱うことはきわめて困難である。そこで、既往の実験結果から μ_m/μ_c を逆算し、これと τ_* の関係を調べた結果、図-7を得た。両者の間には十分に高い相関関係が認められ、次式のような回帰式をあてはめることが可能である。

$$\tau_* \leq 0.16 : \sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_c}} = 0.85 \quad (30a) \quad , \quad \tau_* > 0.16 : \sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_c}} = 0.85 \left(\frac{\tau_*}{0.16} \right)^{-2/3} \quad (30b)$$

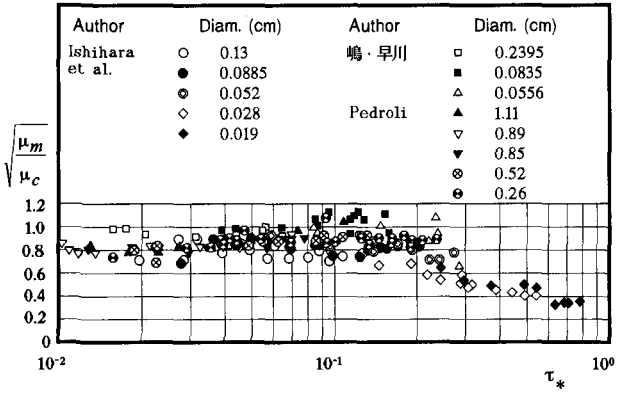


図-7 $\sqrt{\mu_m/\mu_c}$ と τ_* の関係

最後に、著者らが提案した限界輸送量式による計算結果と実験値とを比較すれば図-8 のようである。図に示されているように、実験資料は、平均粒径0.019cmから1.11cmまでの広い範囲内に含まれる、一様粒径を用いた実験結果から構成されているにもかかわらず、計算値と実験値の適合性は概ね良好であり、計算値と実験値の完全一致を示す勾配1/1の線に対して、各粒径の描点群が斜交するといった傾向も見られない。このように本式の有用性が示されたが、図-7に示された $\sqrt{\mu_m/\mu_c}$ と τ_c の関係には若干の不自然さがあることを指摘しておかねばなるまい。すなわち、本来ならば、 $\sqrt{\mu_m/\mu_c}$ は、 $\tau_c \equiv \tau_{c0}$ の状態に1に非常に近い値をとり、 τ_c の増加に伴って漸減していくはずである。しかしながら、図中の描点は $\tau_c \equiv \tau_{c0}$ において1に近づく傾向は示しておらず、見方によっては τ_c が 10^{-1} 付近でピークを持つようにも受け取れる。このような結果は、 $C_{Dc}/C_{Dm}=1$ とみなしたことに問題があったものと思われ、今後とも検討を重ねるつもりである。

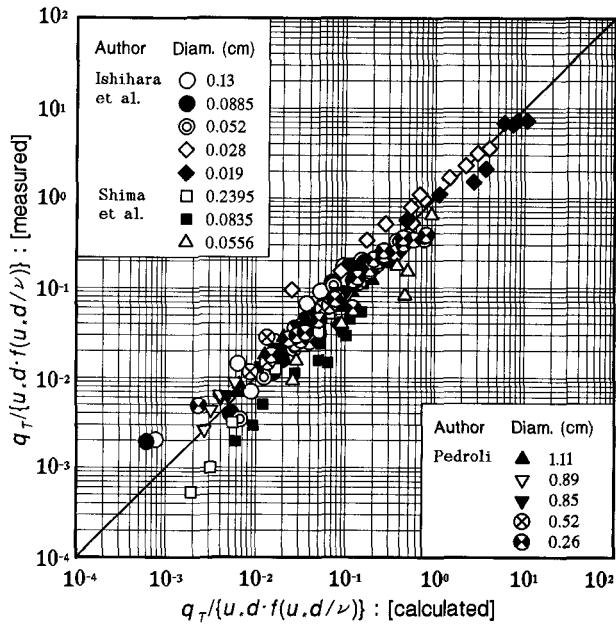


図-8 堆積限界掃流輸送量式の適合性の検討

5. あとがき

本研究では、まず、道上の流砂理論を参考にしつつ、滑面固定床上における堆積限界掃流輸送量を定式化した。理論展開の過程においては、流砂の有無によって流体抵抗の代表流速の特性が異なる点、ならびに、停止した粒子と移動中の粒子とでは、抗力係数や底面による摩擦抵抗力の係数が相違する点などが、従来の研究事例におけるよりも厳密に考慮された。これらのうち、代表流速に関しては、岩垣の研究を参考にしつつ混合長理論を展開し、流砂による混合長の変化を評価できる流速分布式を導いた。本式の妥当性は、著者らおよびIshihara et al. の実験結果との比較を通して検証された。ただし、本式を一般化するためには、流砂による付加的混合長と掃流力との関係についてさらに研究を進めるべきことが指摘された。ついで、抗力係数と摩擦抵抗係数の問題については、仮に前者の変化が小さいものとみなしたうえで、後者を既存の実験資料より求めてその特性を調べた結果、無次元掃流力との相関が極めて高いことが明らかにされ、両者の関係が回帰式にまとめられた。最後に、本研究で得られた堆積限界掃流輸送量式の適合性を検討した結果、ある程度満足すべきものであることが明らかにされた。ただし、上で見いだされた摩擦抵抗係数と無次元掃

流力の関係には若干の不自然さがあり、今後、抗力係数の変化をも考慮しつつ改善を加える必要のあることが指摘された。

[参考文献]

- 1) Ishihara, T., Iwagaki, Y. and Sueishi, T. : On The Effect of Bed-Load Movement in Thin Sheet Flow, Proceedings of the 3rd Japan National Congress for Applied Mechanics, II-13, pp. 265-269, 1954.
- 2) 早川典生 : 滑面固定床水路の土砂輸送 (スイス連邦水経済局報—ベルン1963についてのノート), 土木学会誌, 50-11, pp. 76-77, 1965.
- 3) 嶋祐之・早川典生 : 掃流砂の運動機構と流砂量, 第10回水理講演会講演集, pp. 71-76, 1966.
- 4) 椿東一郎・平野宗夫・渡辺訓甫 : 滑面水路における掃流機構について, 九大工学集報, 第42巻, 第3号, pp. 344-352, 1969.
- 5) 道上正規 : 流砂と河床変動に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 第3章, pp. 29-55, 1972.
- 6) 岩垣雄一 : 滑面開水路における乱流の抵抗法則について—薄層流に関する研究(第4報)—, 土木学会論文集, 第16号, pp. 22-28, 1953.
- 7) Bagnold, R. A. : The Flow of Cohesionless Grains in Fluids, Philosophical Trans., Royal Soci. of London, Vol. 249, pp. 235-297, 1957.
- 8) Maione, U. : Trasporto di materiale solido in canali a fondo fisso e liscio, L' Energia Elettrica, No. 11, pp. 787-796, 1964.
- 9) 河村三郎 : 土砂水理学 1, 森北出版, 第1章, pp. 21-27, 1982.