

乱れの時系列特性を考慮した浮遊過程の確率論的解析
Energy Spectrum-Based Simulation of Turbulence
and Its Application to Stochastic Model of Suspension

中川博次*・辻本哲郎**・後藤仁志***・井上裕介****

By Hiroji NAKAGAWA, Tetsuro TSUJIMOTO, Hitoshi GOTOH and Yusuke INOUE

How to simulate the turbulent flow field is the key of the stochastic simulation of suspended sediment transport. In this study, a new method for simulating the turbulent flow field is proposed, in which the energy spectrum of turbulence is taken into account. The trajectory of suspended particles are computed based on the equation of motion in the simulated turbulent flow field, and compared with that of the Monte Carlo method. It clarifies the physical background of Monte Carlo method, in which the hysteresis of the turbulence cannot be expressed.

Key Words: stochastic model, turbulence, suspension, energy spectrum, Monte Carlo method

1. まえがき

浮遊過程を確率過程として取り扱う方法は、Yalin and Krishnappan¹⁾によって提案された。Yalin and Krishnappan のモデルでは浮遊砂の運動方程式を直接扱わず、単位時間の浮遊砂の移動量と乱れ強度との間に比例関係を仮定する簡略化が行なわれていたが、その後計算機の演算能力の向上に伴って、運動方程式に基づく浮遊砂の Lagrange 的追跡が可能となり、浮遊過程のより詳細な解析が行なわれるようになった（例えば、関根・吉川²⁾、芦田・藤田³⁾）。さらに、当初の定常・等流場と比べるとかなり複雑な流れ場への適用が図られつつある。例えば、著者ら^{4, 5)}は確率過程モデルを用いて、河床波上の非平衡流砂過程や振動流・一方向流共存場における砂澱上の浮遊過程の数値シミュレーションを行なっている。

確率過程型のシミュレーションモデルを構築する上で問題となるのは、(1) 砂粒子運動の追跡法 ((1-a) 運動方程式の選択, (1-b) 追跡時間ステップの設定), (2) 乱れ場 (流れ場) のモデル化, (3) 砂粒子運動の境界条件 ((3-a) 河床面付近での掃流砂との接続, (3-b) 水面からの飛び出し抑制) の設定である。これらの中で、乱れ場のモデル化は浮遊粒子に作用する外力の評価に直結する重要な因子であるが、従来のシミュレーション

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部環境地球工学教室
(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科

*** 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学教室

**** 学生会員 京都大学大学院 工学研究科環境地球工学専攻

においては煩雑さを回避するために大胆な仮定を余儀なくされていた。乱れ場のモデル化に際しては、時間ステップごとの乱れを独立とする単純モンテ・カルロ法がよく用いられるが、この方法では乱れの組織性や多重構造性を表現することが困難で、現実の場とかなりかけ離れた砂粒子の運動を想定することになる危険がある。そこで本研究では、乱れエネルギースペクトルを考慮して乱れ場を再現し、物理的な妥当性に配慮した浮遊過程の取り扱いを提案する。

2. シミュレーションモデルの構成

2.1 砂粒子運動の追跡法

ここでは、簡単のために砂粒子の水平方向の平均移動速度は主流速の平均値に等しいと仮定して、鉛直方向の砂粒子（球状粒子）の1次元運動を考えると、砂粒子の運動方程式は、

$$\rho \left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M \right) A_3 d^3 \frac{dv_p}{dt} = -\frac{1}{2} C_D \rho A_2 d^2 |v_p - v_f| (v_p - v_f) + \rho (1 + C_M) A_3 d^3 \frac{dv_f}{dt} - \rho \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g A_3 d^3 \quad (1)$$

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{24}{Re} \quad ; \quad Re = \frac{d|v_p - v_f|}{\nu} \quad (2)$$

で記述される。ここに、 ρ ：水の密度、 σ ：砂粒子の密度、 C_M ：付加質量係数(=0.5)、 A_2, A_3 ：砂粒子の2次元、3次元の形状係数、 d ：砂粒径、 v_p ：砂粒子の速度の鉛直成分、 v_f ：流速変動の鉛直成分、 g ：重力加速度である。 C_D ：抗力係数、 ν ：動粘性係数であり、 $C_{D\infty}$ については、球を仮定して0.4を用いる。運動の追跡にあたっては、時間ステップを設定する必要があるが、これについては、砂粒子の乱れに対する応答特性を考慮して評価した値 $\Delta t=0.02$ 秒を用いる⁶⁾。

2.2 乱れエネルギースペクトルを考慮した乱れ場（流れ場）のモデル化

乱れの時系列については、乱れエネルギースペクトルを与えて、周波数別の重みを考慮してランダム波を合成する方法で再現する。

福津⁷⁾による粗面乱流の計測に基づく波数スペクトルに基づいて作成した近似式を、凍結乱流仮説によって周波数スペクトルに戻し、鉛直方向の乱れと流下方向の乱れの統計特性の間に相似性を仮定すると、変動流速の鉛直成分のエネルギースペクトルとして、

$$F_0(f) = \Xi_{SF} A_u (1 + \Xi_{SF}^2 \alpha_u f^2)^{-\frac{5}{6}} (1 + \Xi_{SF}^4 \beta_u f^4)^{-\frac{4}{3}} \quad ; \quad \Xi_{SF} = \frac{2\pi L_x}{U_m} \quad (3)$$

が得られる。ここに、 L_x ：平均渦径、 U_m ：平均流速であり、定数については、 $A_u=0.636$ 、 $\alpha_u=179.69$ 、 $\beta_u=0.03$ である。乱れエネルギースペクトル $F_0(f_k)$ に従い、乱れ強度 v_{rms} を有する変動流速の時系列 $v_f(t)$ は、次式で与えられる。

$$v_f(t) = v_{rms} \cdot \sum_{k=1}^N \sqrt{2F_0(f_k) \Delta f_k} \cos(2\pi \bar{f}_k t + \theta_k) \quad (4)$$

$$\bar{f}_k = \frac{1}{2}(f_k + f_{k-1}) \quad ; \quad \Delta f_k = f_k - f_{k-1} \quad ; \quad \theta_k = 2\pi \xi_0 \quad (5)$$

ここに、 f_k ：離散化された周波数、 ξ_0 ：(0,1)の一様乱数である。

砂粒子の追跡を行なうには、砂粒子周囲の乱れ場を適切にモデル化することが必要となるが、ここでは、発生・消滅を繰り返す『渦』の集合体（ここでは統計的に均質な流速変動を呈する流体塊を『渦』と呼ぶ）としてモデル化することを考える。こうした取り扱いに必要な乱れ場を表現するにあたっては、式(4)で与え

られる個々の渦の流速変動特性に加えて、特定の渦に浮遊粒子が影響される時間の推定が重要である。

ここでは浮遊粒子をLagrange的に追跡するから、浮遊粒子を含む渦の特性の評価のみを考えればよい。言い換えると、砂粒子を含んでいた渦が寿命時間を迎えて消滅するか、砂粒子が渦を横切って他の渦の影響下に入るかする度に、渦の特性（乱れの時系列）

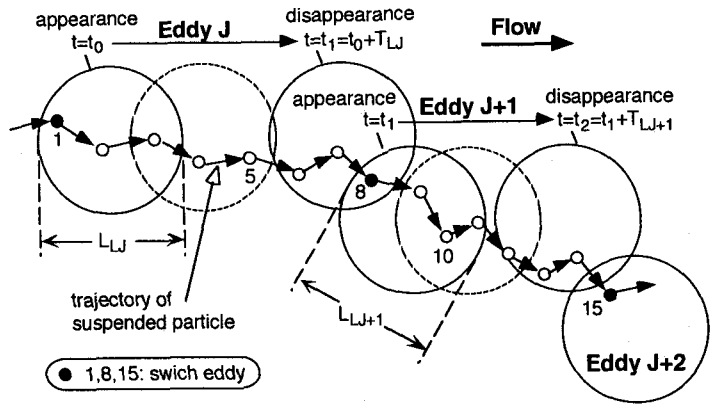


図-1 渦のモデル化

を切り替える必要がある。そこで、図-1に模式的に示す様な渦のモデル化を行なう。渦Jの出現時に位置No. 1にあった浮遊粒子は、渦Jの寿命時間が経過するまで渦J中を移動し、位置No. 8に到達する。この時、渦Jが寿命時間を過ぎて消滅し、直ちに別の渦(J+1)が出現する。浮遊粒子は、渦(J+1)中を移動するが、位置No. 15で渦の寿命時間以前に渦(J+1)から外れ、直ちに別の渦(J+2)が出現する。このように、浮遊粒子を含む渦の寿命時間が経過するか、浮遊粒子が渦の外に出る毎に、渦の（乱数発生により作られた別の変動流速の時系列への）切り替えが行なわれ、浮遊粒子の挙動が追跡される。本モデルの渦の切り替え条件は、

$$N_J \Delta t_p \geq T_L \quad ; \quad \sum_{i=1}^{N_J} (\Delta \mathbf{x}_p - \Delta \mathbf{x}_E) \geq L_L \tag{6}$$

と書ける。ここに、 N_J ：渦Jに含まれてから経過したステップ数、 Δt_p ：砂粒子の追跡時間ステップ、 T_L ：渦の寿命時間すなわちLagrange的時間スケール、 $\Delta \mathbf{x}_p$ ：単位時間ステップ内の砂粒子の移動距離、 $\Delta \mathbf{x}_E$ ：単位時間ステップ内の渦の移動距離、 L_L ：渦の長さスケールである。

次元解析的には、渦の寿命時間すなわちLagrange的時間スケール T_L は、速度スケール V_L 、長さスケール L_L および渦動粘性係数 ν_t と以下の関係にある。

$$T_L = \frac{L_L}{V_L} = \alpha_L \frac{\nu_t}{V_L^2} \quad ; \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{7}$$

ここに、 k ：乱れエネルギー、 ε ：エネルギー逸散率、 C_μ ：モデル定数(=0.09)、 α_L ：比例定数（ここでは、 $\alpha_L=2.0$ とする）である。速度スケールは、乱れの等方性を仮定すると、

$$V_L = \sqrt{\frac{2}{3}k} \tag{8}$$

と書けるから、Lagrange的時間スケールおよび長さスケールは、

$$T_L = \frac{3\alpha_L}{2} \frac{\nu_t}{k} \quad ; \quad L_L = \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha_L C_\mu \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \tag{9}$$

となる。

2.3 シミュレーションの手順

シミュレーションの手順を図-2に示す。はじめに、流れ場の解をk-εモデルにより求め、得られた流れ場に

において単一の浮遊粒子の運動を追跡し、それらを統計処理して浮遊粒子の平均的運動特性を求める。なお、乱れ強度 v_{rms} については k - ϵ モデルの解を利用し、速度スケールと同様に等方性を仮定して、 $v_{rms} = \sqrt{2k/3}$ とする。

3. 一樣乱流場での浮遊粒子運動の乱れ場のモデル化による相違

ここでは、本モデル（以下、『スペクトル法』と呼ぶ）と単純モンテ・カルロ法の相違を明らかにするため、両モデルによって模擬された一樣乱流場中での浮遊粒子の運動について検討する。

確率過程モデルによる浮遊過程の数値模擬では、その簡便性から、単純モンテ・カルロ法がよく用いられる。単純モンテ・カルロ法では、時刻 t と時刻 $t + \Delta t$ での乱れは無相関であり、流速変動成分は、

$$v_i(t) = v_{rms} \cdot r \quad (10)$$

と記述される。ここに、 r ：標準正規乱数である。

スペクトル法および単純モンテ・カルロ法により模擬された同一の変動強度を有する変動流速の時系列とその時系列の下での浮遊粒子の運動軌跡の一例を図-3に示す。なお、単純モンテ・カルロ法については、時間ステップの影響を見るため、 $\Delta t = 0.01$ s と $\Delta t = 0.05$ s についての結果を表示している。単純モンテ・カルロ法により模擬された乱れの時系列は、時間ステップの取り方に大きく依存していることが理解できる。すなわち、時間ステップを小さく取ると低周波成分をうまく表現できずに小刻みな変動のランダムな繰り返しとなるが、逆に時間ステップを大きく取りすぎると高周波成分をうまく表現できない。これに対して、スペクトル法では種々の周波数を有する乱れをスペクトル特性に応じた比率で混在させることが可能である。さらに重要なことは、乱れ場のモデルの相違が、同一の乱れ強度の下での粒子の移動軌跡の変動幅に大きな相違をもたらすことである。特に単純モンテ・カルロ法では、砂粒子変動幅が時間ステップに大きく依存し、時間ステップの設定が、計算結果を大きく左右する。

図-4 は、単純モンテ・カルロ法により模擬された時系列のスペクトルを求め、スペクトル法で用いたスペクトルと比較したものである。スペクトル法では、任意のスペクトル形

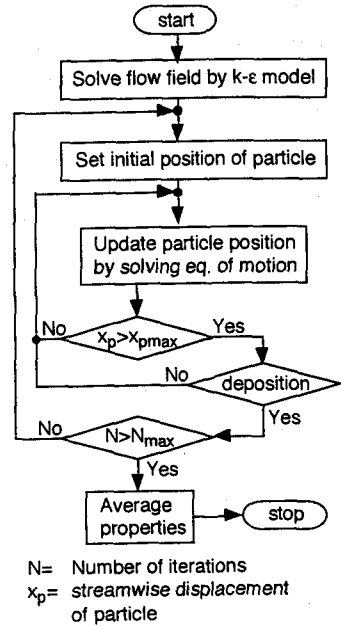


図-2 計算の流れ

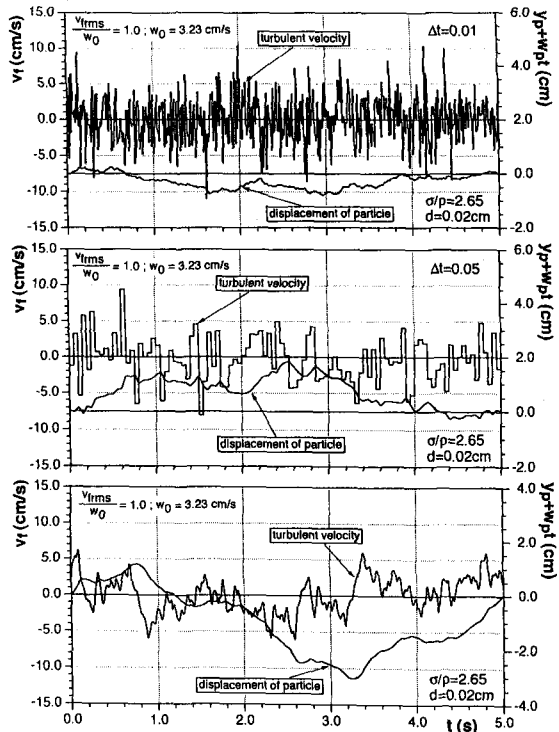


図-3 一樣乱流場での砂粒子の運動軌跡の一例

に従う乱れ場を再現することが可能である（ここでは、標準的なスペクトル形を用いている）。一方、単純モンテ・カルロ法により模擬されたスペクトルは、よく知られるように高周波カットオフフィルターを通した白色雑音のスペクトルとなるが、周波数 $1/\Delta t$ 以上の領域では矩形近似に伴う変動が付加される。この変動は、周波数の増大に伴って矩形パルスの幅に相当する周波数の整数倍の周期の増減を繰り返しながら減衰する。また、単純モンテ・カルロ法では時間ステップを大きくするほど、大略的には低周波成分に偏った乱れの時系列を模擬する傾向が強まるものの、時間ステップの取り方の如何に関わらず現実の乱れのスペクトルとはかなり異なったスペクトル性状を呈することが理解できる。

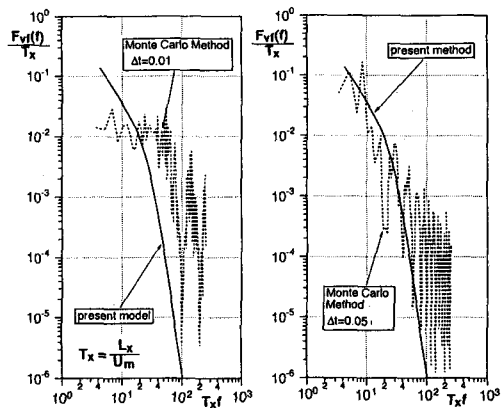


図-4 模擬されたスペクトル

4. 水表面に固定された連続点源からの浮遊粒子の移流・拡散過程 - Jobson & Sayre の実験の再現

せん断乱流場では、浮遊粒子の座標により乱れのスケールが異なるため、一様乱流場より複雑な浮遊運動を呈する。ここでは、スペクトル法および単純モンテ・カルロ法により模擬されたせん断乱流場における浮遊粒子の基本的運動特性について検討するため、水面から投入された浮遊粒子の運動過程を追跡する。

Jobson and Sayre⁸⁾ は、開水路において自然砂（中央粒径 $d=0.039\text{cm}$ 、比重 $\sigma/p=2.65$ ）を水面から連続的に注入し、下流側の断面における浮遊粒子の濃度分布を計測している。ここでは、本研究で提案されたスペクトル法を用いた確率過程型の数値シミュレーションにより、Jobson and Sayre の実験の再現を試みる。流れ場については、彼らの記述に従い、平均流速 $U_m=29.5\text{ cm/s}$ 、水深 $h=41.1\text{ cm}$ 、摩擦速度 $u_* = 4.51\text{ cm/s}$ 、Kármán 定数 $\kappa=0.389$ として、 $k-\epsilon$ モデルにより数値解を求めて利用した。

シミュレーションの内部プロセスを明示するため、 $k-\epsilon$ モデルにより模擬された流れ場において水面から投入された浮遊粒子の沈降過程の標本のいくつかを図-5に示す。図中には、実線で軌跡を示した砂粒子に関して、砂粒子に作用する変動流速と砂粒子の存在位置での Lagrange 的時間スケールを併示している。ここで用

いたのは、 $w_0/u_* = 1.40$ の砂粒子で、乱れに対する応答性は比較的鈍く、平均沈降速度まわりに緩やかな変動を呈しつつ沈降していく様子が示されている。また、沈降するにつれて、砂粒子の存在位置の Lagrange 的時間スケールは短くなり、流速の変動強度は増加している。変動流速のパターンを見ると、水面付近では、渦の寿命時間（Lagrange 的時間スケール）が長いから、砂粒子は緩やかな低周波変動に支配されて運動するが、沈降するにつれて次第に渦の寿命時間は短くなり、砂粒子に作用する変動流速は小刻みな高周波変動を多く含むようになる。また、底面への接近に伴う変動流

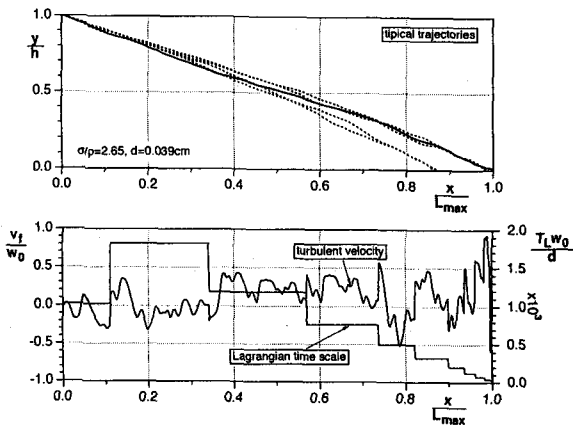


図-5 砂粒子の沈降過程

速の振幅の増大は、乱れ強度の増加と対応して生じたものである。ここで示したように、本シミュレーションでは、せん断乱流場に見られる渦スケールの場所的变化を表現することが可能であり、従来の単純モンテ・カルロ法と比べて乱れ場の表現が詳細化されている。

図-6は、スペクトル法および単純モンテ・カルロ法 ($\Delta t=0.02$) により浮遊砂の存在確率密度 (相対濃度と相似) を推定し、浮遊砂濃度の実験結果と比較したものである。図中の x は投入地点からの流下方向の変位である。初期 ($x/h=2$ および 2.75) においては、本モデル、モンテ・カルロ法ともほぼ良好な実験値との対応を示しているが、流下するにつれて、モンテ・カルロ法の予測結果の濃度重心の低下が速くなり、実験値とのずれが増大し、 $x/h=5$ では、底面近傍で濃度を大幅に過大評価することとなる。このようにモンテ・カルロ法は流速の低周波変動をうまく表現できないため、浮遊運動の維持に対する流速変動の寄与を適切に表現することが困難である。

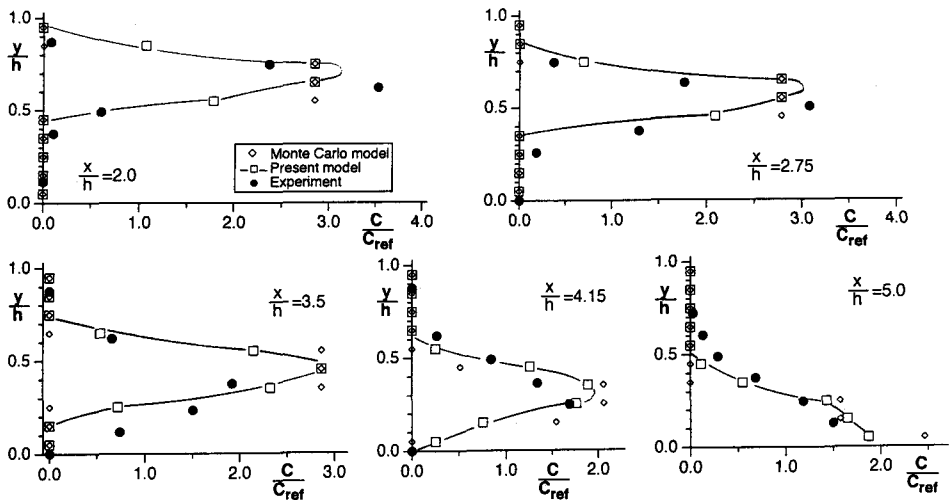


図-6 非平衡浮遊過程 - Jobson and Sayre の実験

5. あとがき

本研究では、乱れエネルギースペクトルを考慮して再現した乱れ場において広範囲の周波数領域の乱れに影響される浮遊粒子の運動を模擬する方法を提案した。本手法によると、これまでよく用いられてきた単純モンテ・カルロ法では適切に表現できなかった広範囲の周波数成分の複合的作用下での浮遊運動の特性が表現され、非平衡浮遊砂過程における濃度分布の推移が良好に再現された。最後に、本研究の遂行にあたり、京都大学大学院・井上直樹君の熱心な協力を得たことを付記して、謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Yalin, M.S. and Krishnappan, B.G.: A Probabilistic Method for Determining the Distribution of Suspended Solids in Open Channels, Proc. Int. Sym. on River Mech., Bangkok, Thailand, Vol. 1, pp.603-614, 1973.
- 2) 関根正人・吉川秀夫: 浮遊砂理論の再検討, 土木学会論文集, 第369号/II-5, pp.109-118, 1986.
- 3) 芦田和男・藤田正治: 河床粒子の浮遊機構とそのモデル化, 土木学会論文集, 第375号/II-6, pp.79-88, 1986.
- 4) 中川博次・村上正吾・後藤仁志: 河床波上流れの構造と浮遊粒子の拡散過程について, 水工学論文集, 第34巻, pp.523-528, 1990.
- 5) 後藤仁志・辻本哲郎・中川博次: 砂礫床上の振動流・一方向流共存場における浮遊砂の拡散過程, 土木学会論文集, 第473号/II-24, pp.83-91, 1993.
- 6) 後藤仁志・辻本哲郎・中川博次: 水流の乱れに対する浮遊粒子の動的応答特性, 水工学論文集, 第38巻, 1994.
- 7) 柳津家久: 開水路の乱流機構に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1977.
- 8) Jobson, H.E. and Sayre, W.W.: Vertical transfer in open channel flow, Jour. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 96, No. HY3, pp. 703-724, 1970.