

水流の乱れに対する浮遊粒子の動的応答特性 Dynamics of Suspended Particle in Vertical Random Oscillating Flow

後藤仁志*・辻本哲郎**・中川博次***

By Hitoshi GOTOH, Tetsuro TSUJIMOTO & Hiroji NAKAGAWA

Suspension of the particle in the turbulent flow is simulated based on the equation of motion. The time series of the turbulence is simulated by superposing the oscillations with various frequencies in taking account of energy spectrum of the turbulence. The settling velocities under regular and irregular oscillations are estimated. The response of the particle to the turbulence is considered through the characteristics of the vertical displacement of particle. Furthermore the time scale of the motion of particles is estimated based on the dynamic response expressed by the energy spectrum of the particle's displacement.

Key Words: suspension, settling velocity, energy spectrum, turbulence, response

1. まえがき

浮遊砂の運動は水流の乱れの影響を顕著に受けるため、浮遊過程や掃流から浮遊への遷移過程などのモデル化を適切に行なうには、水流の乱れに対する砂粒子の応答特性の把握が必要不可欠である。例えば、Yalin and Krishnappan¹⁾のモデルを雛形とする浮遊砂の確率過程モデルに基づいて浮遊過程の数値模擬を実施する際には、運動方程式の差分化に伴う計算時間ステップを適切に決定する必要があるが、それには、水流の乱れに対する砂粒子の応答特性を考慮することが重要となる。

関根・吉川²⁾は、正弦波型の流速変動としてモデル化した乱れの周波数および強度に対する砂粒子の応答特性の変化を運動方程式に基づいて検討し、脈動流中の砂粒子の沈降速度の変化を論じた。ただし、現実の乱れ場では種々の変動スケールが共存し、乱れの周波数および乱れ強度は広範囲に分布するので、規則的な正弦波型流速変動の場合とは状況が異なる。この点に関して、山坂・池田³⁾は、乱れの周波数の分布が重要であることに着目し、摂動法を用いて砂粒子の運動方程式を解析的に解くことにより、乱れエネルギースペクトルを考慮した乱流中の球状粒子の沈降速度の検討を行なった。その結果、同一の乱れ強度であってもス

* 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学教室
(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学部環境地球工学教室

ベクトル密度の分布性状が変化すると沈降速度にも変化が生じることが指摘された。

これまでの研究^{2)~4)}では、水流の乱れに対する砂粒子の平均的応答特性が主として沈降速度の変化を通じて議論され、応答振幅についての議論はあまりなされていなかった。関根・吉川²⁾は、周囲流体の変化に対する粒子の追従性を検討することから求めた応答限界周波数と関連づけて砂粒子の追跡時間ステップを評価する方法を提案しているが、系統的な評価には至っていない。本研究では、乱れエネルギースペクトルを既知として乱れ場の時系列を乱数発生により再現し、運動方程式の数値積分により砂粒子の応答過程を追跡して、砂粒子応答の動的特性の把握を通じての浮遊粒子の追跡時間ステップの合理的評価を試みる。

2. シミュレーションモデルの構成

2.1 砂粒子の運動方程式

ここでは、簡単のために乱れの鉛直成分のみを考慮した鉛直1次元問題とした検討を行ない、砂粒子の水平方向の平均移動速度は主流速の平均値に等しいと仮定する。砂粒子（球状粒子）の鉛直方向1次元運動は、

$$\rho \left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M \right) A_3 d^3 \frac{dv_p}{dt} = -\frac{1}{2} C_D \rho A_2 d^2 |v_p - v_f| (v_p - v_f) + \rho (1 + C_M) A_3 d^3 \frac{dv_f}{dt} - \rho \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g A_3 d^3 \quad (1)$$

で記述される。ここに、 ρ ：水の密度、 σ ：砂粒子の密度、 C_M ：付加質量係数(=0.5)、 A_2, A_3 ：砂粒子の2次元、3次元の形状係数、 d ：砂粒径、 v_p ：砂粒子の速度の鉛直成分、 v_f ：流速変動の鉛直成分、 g ：重力加速度である。 C_D は抗力係数であって、粒子Reynolds数の関数として、

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{24}{Re} \quad ; \quad Re = \frac{d|v_p - v_f|}{\nu} \quad (2)$$

と書ける。ここに、 ν ：動粘性係数であり、 $C_{D\infty}$ については、球を仮定して0.4を用いる。

2.2 流速の変動時系列の再現

ここでは、乱れエネルギースペクトルから求めた周波数別の寄与率を考慮して正弦波を合成し、ランダム波を生成して、乱れ場を再現する⁵⁾。規格化された乱れエネルギースペクトル $F_0(f_k)$ に従い、乱れ強度 v_{rms} を有する変動流速の時系列 $v_f(t)$ は、次式で与えられる。

$$v_f(t) = v_{rms} \cdot \sum_{k=1}^N \sqrt{2F_0(f_k) \Delta f_k} \cos(2\pi \bar{f}_k t + \theta_k) \quad (3)$$

$$\bar{f}_k = \frac{1}{2}(f_k + f_{k-1}) \quad ; \quad \Delta f_k = f_k - f_{k-1} \quad ; \quad \theta_k = 2\pi \xi_0 \quad (4)$$

ここに、 f_k ：離散化された周波数、 ξ_0 ：(0,1)の一様乱数である。

橋津⁶⁾による粗面乱流における乱れの波数スペクトル $S_u(\kappa)$ の計測結果を次式で近似する。

$$\frac{S_u(\kappa)}{L_x} = A_u \left\{ 1 + \alpha_u (L_x \kappa)^2 \right\}^{-\frac{5}{6}} \left\{ 1 + \beta_u (L_x \kappa)^4 \right\}^{-\frac{4}{3}} \quad (5)$$

ここに、 L_x ：平均渦径であり、式中の定数は、 $A_u=0.636$ 、 $\alpha_u=179.69$ 、 $\beta_u=0.03$ である。式(5)と計測結果との対応を、図-1に示す。

さらに、凍結乱流仮説

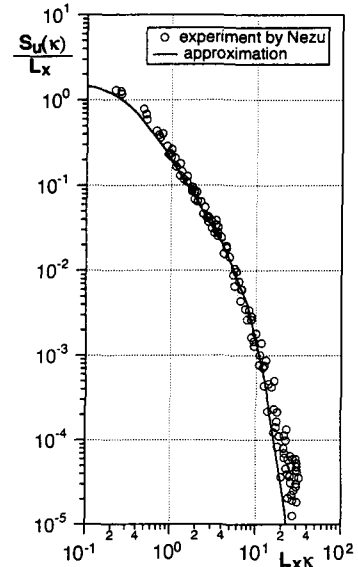


図-1 乱れのスペクトルの近似式

$$S_u(\kappa) = \frac{U_m}{2\pi} F_u(f) ; \quad \kappa = \frac{2\pi}{U_m} f \quad (6)$$

を用いて (U_m : 平均流速), 周波数スペクトルに変換した後, 鉛直方向の乱れと流下方向の乱れの統計特性の間に相似性を仮定すると, 次式が得られる。

$$F_0(f) = A_v (1 + \alpha_v f^2)^{-\frac{5}{6}} (1 + \beta_v f^4)^{-\frac{4}{3}} \quad (7)$$

$$A_v = \Xi_{SF} A_u ; \quad \alpha_v = \Xi_{SF}^2 \alpha_u ; \quad \beta_v = \Xi_{SF}^4 \beta_u ; \quad \Xi_{SF} = \frac{2\pi L_x}{U_m} \quad (8)$$

式(7)を式(3)に代入し, 乱れ強度 v_{rms} を与えて鉛直方向の変動流速の時系列を再現し, 得られた乱れ場における浮遊粒子の運動を運動方程式 (1) に基づいて追跡する。

3. 砂粒子の沈降速度の特性

ここでは, 乱流中の球状粒子の浮遊過程を数値模擬して, 乱れ場の特性が沈降速度に与える影響について検討する。関根・吉川²⁾は脈動流を対象に同様の方法により粒子の応答過程の検討を行なっているが, 乱れ強度と乱れの周波数とを独立して与えており, 現実の乱れを極端に理想化した場を想定している。これに対して本研究では, 乱れエネルギースペクトルを考慮することにより, 周波数別の変動強度を取り込んだ解析を試みる。スペクトル特性を考慮した取り扱い, 山坂・池田³⁾により摂動法を用いて行なわれているが, ここでは, 運動方程式に近似を施すことなく, 数値解を求めている。

計算に用いた砂粒子の特性を表-1に示す。なお, 乱れのスペクトル形を特定するには平均渦径 L_x と平均流速 U_m とを決める必要があるが, ここでは, $L_x = 10\text{cm}$, $U_m = 25\text{cm/s}$ とした。なお, 表中の w_0 は, 式(1)で流速をゼロとして得られる定常沈降速度であり, 清水中の沈降速度を意味している。

表-1 砂粒子の特性

relative density of particle σ/ρ	2.65
diameter of particle $d(\text{cm})$	0.02
settling velocity $w_0(\text{cm/s})$	2.64

砂粒子の変位に関して, 正弦波型モデルの解析結果の1例を図-2に, 本研究の方法(以下, スペクトル型モデルと呼ぶ)による解析結果の1例を図-3に示す。なお, 図中の w_p は, 式(1)により追跡された砂粒子の移動過程が定常状態になった時点での本解析での変動の最大周期である5秒間の変位から求めた定常沈降速度を表している。また, 図中の変位は, 定常沈降時の成分 $w_p t$ を差し引いて表示されている。粒子運動の追跡の際の時間ステップは, 1/500 秒とし, ランダム波を構成する成分波の最大周期を5秒と仮定した。これにより, 0.2~500Hzの範囲の正弦波が合成された不規則変動の模擬が可能となる。さらに, スペク

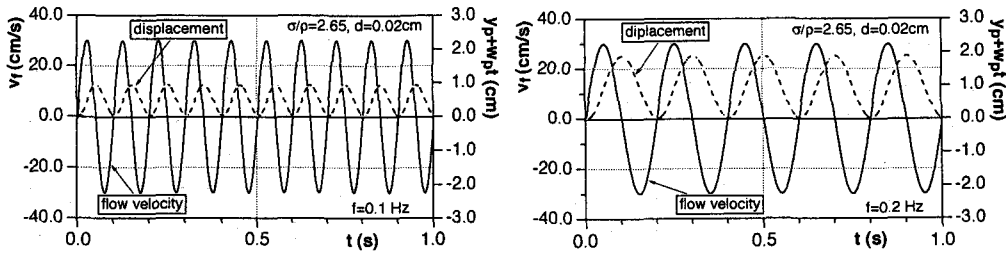


図-2 正弦波型流速変動と砂粒子の応答時系列

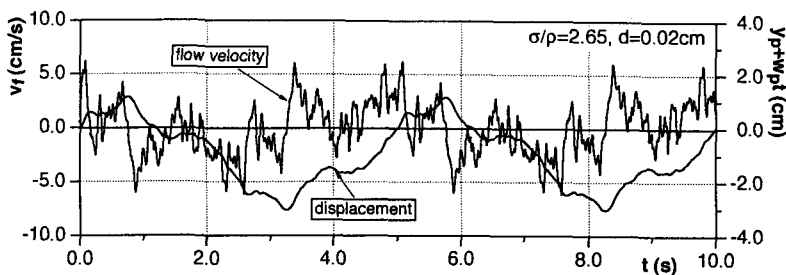


図-3 スペクトル型流速変動と砂粒子の応答時系列

トルの離散化に伴う周波数ステップについては、 $\Delta f = 0.2 \text{ Hz}$ とし、 $0.2 \sim 500 \text{ Hz}$ の領域を2500分割した。

正弦波型モデルの場合の定常沈降過程では、砂粒子は流体と同一の周期で振動しながら、平均的には沈降速度で降下していることが理解できる。これに対して、スペクトル型モデルでは、砂粒子の高周波に対する応答は極めて鈍く、低周波成分に強く支配された粒子運動が認められる。

次に、清水中の沈降速度 w_0 に対する乱流中の沈降速度 w_p の変化について、正弦波型モデルの結果とスペクトル型モデルの結果を比較したのが、図-4 である。正弦波型モデルでは、乱れ強度の増大に伴って顕著な速度低減が見られる。低周波域ではこの傾向はそれほど顕著ではないが、周波数の増大とともに低減傾向が顕在化する。これに対して、スペクトル型モデルは $0.2 \sim 500 \text{ Hz}$ の広域におよぶ変動波形の合成波を入力とするにも関わらず、応答特性は正弦波型の低周波変動と類似しており、沈降速度の顕著な低下は見られない。この点に関しては、山坂・池田³⁾が実河川のデータに基づいて行なった検討から同様の指摘を行なっている。

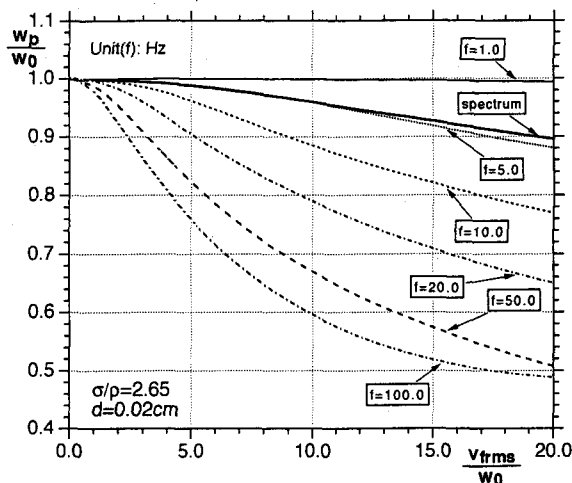


図-4 乱れの時系列が砂粒子の沈降速度に与える影響

4. 砂粒子の応答時間スケールの推定

図-3に示す砂粒子の応答変位の時系列が流速変動の時系列に比べて滑らかであることから、砂粒子変位の動的特性に関しては、乱れエネルギーの場合に比べて低い周波数で打ち切ることが可能であるものと期待される。そこで、砂粒子応答変位のスペクトルを求めて、変動時系列を構成する各成分波の寄与について検討を行なう。

数値解析に先立って、砂粒子の応答特性の基本的な関係を論じるのに簡便な線形システムの応答関数を求めることとする。山坂・池田³⁾は、運動方程式を線形化し、砂粒子の応答速度のスペクトル $F_{v_p}(f)$ と乱れのスペクトル $F_v(f)$ を関係付ける応答関数として次式を導いている。

$$F_{vp}(f) = |H_{pf}(f)|^2 F_{vf}(f) \quad ; \quad |H_{pf}(f)|^2 = \frac{(a_{pf}f)^2}{(a_{pf}f)^2 + (2 + \dot{c})^2} \quad (9)$$

$$\dot{c} = -\left(1 + \frac{A_{pf}}{2}\right) \frac{1}{K_{pf}} \quad ; \quad a_{fp} = \frac{\sigma/\rho + C_M}{\sigma/\rho - 1} \quad ; \quad R_{e0} = \frac{w_0 d}{\nu} \quad (10)$$

$$K_{pf} = 1 + 0.152\sqrt{R_{e0}} + 0.0151R_{e0} \quad ; \quad A_{pf} = 0.152\sqrt{R_{e0}}$$

さらに、砂粒子の応答速度のスペクトル $F_{vp}(f)$ と砂粒子の応答変位のスペクトル $F_{xp}(f)$ の関係

$$F_{xp}(f) = \frac{1}{f^2} F_{vp}(f) \quad (11)$$

を考慮すると、砂粒子の応答変位のスペクトル $F_{xp}(f)$ の乱れのスペクトル $F_{vf}(f)$ に対する周波数応答は、

$$F_{vp}(f) = \frac{a_{pf}^2}{(a_{pf}f)^2 + (2 + \dot{c})^2} F_{vf}(f) \quad (12)$$

で与えられる。

図-5 は、運動方程式による追跡結果を高速Fourier変換して求めた浮遊粒子の応答変位のスペクトルの一例であり、図中には、与えた乱れ時系列のエネルギースペクトルと式(12)より算定した粒子応答変位のスペクトルとを併示している。解析解、数値解ともに、周波数の増加に伴う粒子応答変位のスペクトルの速やかな減少を示しているが、より詳細に見ると、1次近似である解析解が単調な減少傾向を示すのに対して、数値解は高周波領域において緩やかな減少傾向を示している。1次近似解である解析解の導出にあたっては、運動方程式の抗力項に線形化が施されているが、数値解では抗力項は非線形のまま取り扱われている。このことから、成分波間の非線形干渉により高周波成分が産み出され、スペクトルの高周波領域での減少傾向が緩和されたものと推察される。

ところで、浮遊粒子の運動追跡は粒子の変位を時々刻々求めることに他ならないから、追跡時間ステップの決定に際しては、砂粒子応答変位の動的特性を基準とするのが合理的である。そこで、砂粒子応答変位のスペクトルを用いて応答限界周波数 f_{α} および応答時間スケール（追跡時間ステップ） Δt を次式で定義する。

$$\Delta t \equiv \frac{1}{T_{\alpha} f_{\alpha}} \quad ; \quad \int_{f_{\alpha}}^{\infty} F_{xp}(T_{\alpha} f) = \alpha_{xp} \quad ; \quad T_{\alpha} = \frac{U_m}{L_{\alpha}} \quad (13)$$

ここに、 α_{xp} ：打ち切り限界であり、砂粒子変動パワーの 99.99% をカバーする値として、 $\alpha_{xp}=0.0001$ とした。式(13)から $L_{\alpha}=10\text{cm}$ と仮定して評価した追跡時間ステップ Δt の乱れ強度 v_{rms} に対する変化を図-6 に示す。粒径 $d=0.02\text{cm}$ の砂粒子 ($\sigma/\rho=2.65$) の場合には、 $v_{rms}/w_p=1.0$ 付近の領域で時間ステップの値が減少する傾向を示すものの、追跡時間ステップ Δt の乱れ強度 v_{rms} に対する依存性は小さく、全領域を通じてほぼ一定値を取る。ところで、開水路 2 次元流れでは平均渦径 L_{α} が水深方向に変化するため、 T_{α} も水深方向に分布するが、瀬津⁶⁾ の実験によれば、以下の関係が認められる。

$$\frac{L_{\alpha}}{h} = \frac{U_m T_{\alpha}}{h} = \begin{cases} (1.3 \text{ to } 1.5) \sqrt{y/h} & \text{for } y/h \leq 0.6 \\ 1 & \text{for } y/h > 0.6 \end{cases} \quad (14)$$

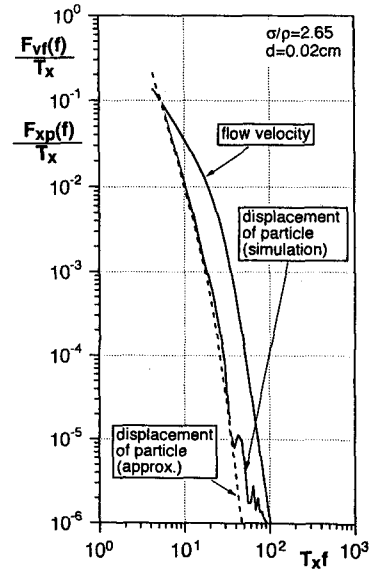


図-5 砂粒子応答変位のスペクトル

本計算法では、粒子の粒径と比重および式(13)における打ち切り限界 α_p を与えると、時間ステップおよび応答限界周波数が求められる。これに対して、正弦波型の解析では、粒子の粒径と比重以外に乱れ強度と打ち切り限界（粒子と粒体の最大応答振幅の比 ξ_α ）を決めなければ、時間ステップが評価できない。例えば、 $d=0.02\text{cm}$, $\sigma/p=2.65$, $w_p=2.64\text{ cm/s}$ の条件で本計算法を用いると、水深 $h=10\text{cm}$ の流れで、 $0.05 < y/h < 1.0$ の範囲を対象すると $f_\alpha=18.8\sim 62.4\text{Hz}$ となるが、正弦波型の場合には、 $v_{rms}/w_p=1.0$, $\xi_\alpha=0.2$ として $f_\alpha=80\sim 100\text{Hz}$ となる²⁾。このように正弦波型では、変動の周波数分布特性を考慮していないため、追跡時間ステップが変動振幅に応じて変化し、適切な代表周期とそれに応じた変動強度とを与えることに困難を伴うのが欠点である。

最後に、実用性に配慮して、本計算法に基づいて算定した追跡時間ステップ Δt と粒径 d の関係を求めてプロットしたのが、図-7である。比重 $\sigma/p=2.65$ の粒子に限定すると、近似式として次式が成立する。

$$\frac{w_0 \Delta t}{L_x} = \alpha_{dt} \left(\frac{d}{L_x} \right)^2 + \beta_{dt} \left(\frac{d}{L_x} \right) + \gamma_{dt} ; \quad \alpha_{dt} = -776.0, \beta_{dt} = 27.5, \gamma_{dt} = -0.026 \quad (15)$$

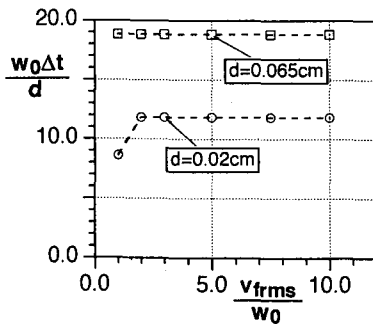


図-6 砂粒子追跡時間ステップ

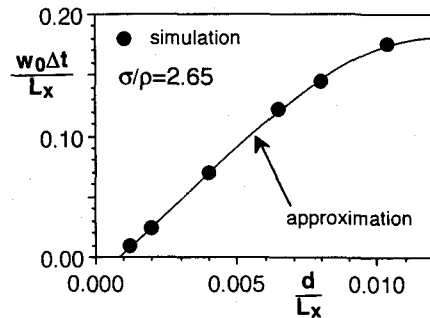


図-7 砂粒子追跡時間ステップの粒径による変化

5. あとがき

本研究では、乱れエネルギースペクトルを考慮した乱れ場の時系列の数値模擬を実施して、運動方程式の数値積分により砂粒子の応答過程を追跡し、広範囲の周波数領域に分布する乱れの作用下における砂粒子の挙動の特性を明らかにした。さらに、砂粒子の応答振幅の動的特性の検討を通じて、浮遊過程の確率過程型シミュレーションの重要なパラメータである浮遊粒子の追跡時間ステップの合理的評価を試みた。最後に、本研究の遂行にあたり、計算の実行過程において、京都大学大学院・井上裕介君、同大学院・井上直樹君の協力を得たことを付記して、謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) Yalin, M.S. and Krishnappan, B.G.: A Probabilistic Method for Determining the Distribution of Suspended Solids in Open Channels, Proc. Int. Sym. on River Mech., Bangkok, Thailand, Vol. 1, pp.603-614, 1973.
- 2) 関根正人・吉川秀夫：脈動流中の粒子の沈降特性に関する研究，土木学会論文集，第387号/II-8, pp.209-218, 1987.
- 3) 山坂昌成・池田駿介：乱れエネルギースペクトルを考慮した乱流中の球の沈降速度，土木学会論文集，第417号/II-13, pp.173-179, 1990.
- 4) Houghton, G.: The Behaviour of Particles in a Sinusoidal Velocity Field, Proc. Royal Society of London, Vol. A272, pp. 33-43, 1963.
- 5) 日野幹雄：スペクトル解析，浅倉書店，p.300, 1977.
- 6) 瀬津家久：開水路流の乱流構造に関する基礎的研究，京都大学学位論文，1977.