

固液混相流における支配方程式の構造について

Governing Equations for the Flows of Liquid-Solid Mixture

水理委員会共同研究グループ*: 芦田和男・

江頭進治・佐々木幹夫・清水義彦・関根正人・

玉井昌宏・藤田正治・宮本邦明・森 明巨

(五十音順)

By Research Group on Multiphase Flows: K. Ashida,
S. Egashira, M. Sasaki, Y. Shimizu, M. Sekine, M. Tamai,
M. Fujita, K. Miyamoto and A. Mori.

Some critical discussions are made on the structures of governing equations which are applied to one fluid model, two fluid model and fluid-solid particle model. Special concerns are paid on the interaction force in the conservation equations for moment and energy. It is shown that there are two conflicting concepts in evaluating the interaction force between liquid and solid phases; one is that the force should not be introduced positively in governing equations, as a form like body force, but as in stress tensors, and the other emphasizes the force is reasonable in present formulas.

Keywords: two-phase flows, solid-liquid flow, governing equations, interaction force

1. 緒言

水工学の対象とする流れはすべて混相流と云っても過言ではなく、身近なものを挙げれば、土石流、泥流、掃流砂流、浮遊砂流などがある。これらの流れは、通常、質量、運動量およびエネルギーの保存則などからなる支配方程式を用いて解析されている。解析に際しては、その目的や粒子濃度の大小などに応じて次のような解析モデルが採用されている。すなわち、A. 一流体モデル(混合物モデル)、B. 二流体モデル、C. 流体～粒子モデルなどである。

一流体モデルは混合物の流れを一つの連続体として扱うものであって、一般に土石流、掃流砂流、浮遊砂流などの解析が行われている。二流体モデルは、粒子相、流体相とも連続体の支配方程式を適用するものであって、気泡流の解析においては広く採用されているが、水工学の分野においては2～3の例を除いてあまり見当たらない。流体～粒子モデルは、媒質に連続体の支配方程式を用い、粒子をいわゆる“つぶ”の支配方程式を用いる方法であって、最近掃流砂や浮遊砂の解析が行われるようになってきた。また、最近活発に議論されている樹木群や杭群の中の流れも、粒子相をrigidな物体に置き換えれば混相流と見なすことが可能であり、この種の解析も二流体モデルあるいは流体～粒子モデルで解析されていると云ってもよい。

固液混相流は、上述のような方法で研究され、それぞれにおいて成果が修められている。しかし、各解析モデルあるいはそこに用いられている支配方程式の構造や適用領域にはあまり注意が払われていない。また、支配方程式における相間の相互作用の表示法などについても検討すべきところも多い。本研究は、このような問題についての統一見解を出すことを目的として、水理委員会若手研究者グループ等の共同研究として着手したものであって、これまでに、各人の目を通して支配方程式の応力表現法等について議論してきた。未だ、十分な成果を得るまでには進展して

*連絡先 正会員 工博 江頭進治(〒611 宇治市五ヶ庄 京都大学防災研究所)

いないが、これまでの議論の内容を質疑(Q)および応答(A)の形で報告する。

2. 二流体モデル

2.1 支配方程式の構造

二流体モデルは、混相流を液相と固相それぞれを連続体として取り扱うものであって、各相を連続体として取り扱える程度に大きな閉空間を考え、その内部で空間平均化して得られるそれぞれの相の支配方程式を連立して解くという方法である。 k 相の質量、運動量およびエネルギー保存則は以下のように記述されている。^{1),2)}

$$\partial(\alpha_k \rho_k)/\partial t + \partial(\alpha_k \rho_k u_{kj})/\partial x_j = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k u_{kj}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_k \rho_k u_{ki} u_{kj}) = \alpha_k \rho_k F_i - \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{kij}}{\partial x_j} - f_{ki} \quad (2)$$

$$\frac{\partial k_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_k u_{kj} k) = \alpha_k \rho_k F_i u_i - \frac{\partial}{\partial x_j}(p_k u_{ki}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij} u_i) - f_{ki} u_{ki} - \Phi_k \quad (3)$$

ここに、

$$k_k = \frac{1}{2} \alpha_k \rho_k u_{ki} u_{ki}, \quad \sum_k \alpha_k = 1$$

F_i は体積力、 f_i は相間のinteraction force、添字 k は相の意味である。

Q:これらの式は層流のものでしょうか、乱流のものでしょうか。

A:通常使われている層流、乱流という言葉のもつ意味とは違いますが、流れは層流ということになります。これは、層流を仮定しているということではなく、平均流速場 u_{ki} が層流として取り扱えるほど、平均化のための時空間を大きくとることを意味します。ミクロなスケールでの乱れ(たとえば、通常、乱流という言葉がもっている意味での乱れ)は、 Φ_k のエネルギー消費構造の中の一部として評価されることになります。

Q:この定式化で重要なポイントは何でしょうか。

A:それはやはり各相の応力テンソルがどのように記述されるか、すなわち、各相の構成則がどのように定められるかという点にあります。構成則の構造は各相のエネルギー散逸構造(式(3)の Φ_k の構造)に支配されるため、各相に働く応力の成す仕事、各相間のエネルギーのやりとりが合理性をもって見積られる必要がある。interaction forceの成す仕事 $f_{ki} u_{ki}$ は本来、相間のエネルギーのやりとりを表わす項で、これは、エネルギー散逸 Φ_k と同様、わき出し項(source/sink term)として評価されなければならない。

一方、式(3)の第2項、第3項と $f_{ki} u_{ki}$ の比較から次のようである。第2項、第3項を分解すると、成す仕事 $(-\partial p_k / \partial x_i) u_{ki} + (\partial \tau_{kij} / \partial x_j) u_{ki}$ となる項が出てくるが、これらと $f_{ki} u_{ki}$ を合理的に分離できない。なぜならば、これらの項は同じ運動 u_{ki} に対して定義されているからである。このことは、式(2)を式(3)に代入すればより明確になる。すなわち、式(3)は、式(2)の運動方程式で表現される運動に沿って

$$\Phi_k = -p_k \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_i} + \tau_{kij} \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} \quad (4)$$

のように表現されることになり、エネルギー方程式の中には相間のエネルギーのやりとりに相当するわき出し項を見いだすことはできない。このように、式(2)、(3)における f_k の入り方は奇妙に感じられる。

Q:矛盾かどうか分かりませんが、上述のようなことは、本来、流れの場は一つであるにかかわら

ず、図-1のように、各相ごとに対象とする空間を定義して直感的に場の方程式をたてるというやり方に起因しているのでしょうか。

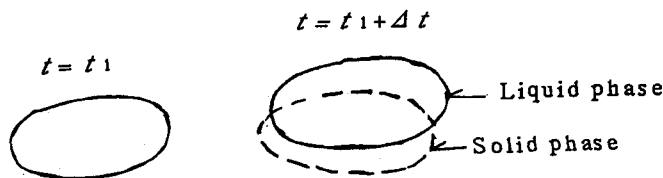


図-1 二流体モデルの場

A: 多分、そうだと思います。とくに、図-1のように相間に相対運動がある場合、エネルギーの授受がうまく評価されない可能性があるため、注意を要するということでしょう。このような矛盾をなくすためには、次のように考えたらどうでしょうか。すべての相がマクロ的に同じ運動をする場合には、同一の空間に対してエネルギー保存を調べていることになる。全体としてのエネルギー散逸は、次のように表せるはずである。

$$\Phi = \sum_k \left(-p_k \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_i} + \tau_{kij} \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} \right) \quad (5)$$

各相の応力テンソルは、見かけ上、混合物の流れ全体のエネルギー散逸(Φ)を各相にどのように分配するかにかかっているということになる。この場合、式(2)、(3)の中の f_i あるいは $f_i u_i$ に相当する項、すなわち、interaction forceや相間のエネルギーのやりとりは陽の形で評価されないため、無視されるか、分配の際に p_k と τ_{kij} に適当に配分されるか、あるいはまたどちらかの相に押し込むような形で考える。

2.2 二流体モデルの適用例

Q: 水工学の分野において、二流体モデルは、どんな問題に適用されているのでしょうか。

A: 浮遊砂を含む流れに適用された例があります³⁾。また、水工学の分野とは違うかもしれませんが気泡流についてはかなり多くの例があります。さらに、特殊な例として、柱群(樹木群、抗群)をすぎる流れの解析は、固相が停止している場合の二流体モデルと考えられます。そのような研究の一例として清水らによる研究⁴⁾を紹介しましょう。固相については停止しているので連続式、運動方程式は自動的に満たされます。流体相についてはレイノルズ方程式および乱れエネルギーおよび散逸率の保存に関する式は次のようです。ただし、これらの式は柱群が連続体としてみなせるほど十分大きな空間にわたって平均化して得られている。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) - F_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\Gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \Gamma \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} \quad (6)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{\rho} \right) - F_y + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\Gamma \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \Gamma \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} \quad (7)$$

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) + \frac{\partial k}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right\} + P_k - \epsilon + C_{fk} (F_x U + F_y V) \quad (8)$$

$$U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) + \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right\} + \frac{\epsilon}{k} \left[C_1 \left\{ P_k + C_{f\epsilon} (F_x U + F_y V) \right\} - C_2 \epsilon \right] \quad (9)$$

ここに、

$$P_k \equiv \nu_t \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\Gamma \equiv \nu_t + \nu, \nu_t = C_u \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$F_x \equiv \frac{1}{2} C_{dx} \lambda U \sqrt{U^2 + V^2}, F_y \equiv \frac{1}{2} C_{dy} \lambda V \sqrt{U^2 + V^2} \quad (10)$$

ここで、平均流の輸送式は、レイノルズ方程式に空間平均化操作を施した形で誘導していますが、乱れエネルギー(k)やその逸散率(ϵ)に関する輸送式は厳密に空間平均化操作を行なって演繹したものではありません(もし、きちっとやるなら、詳しい誘導の仕方も幾つか検討された論文があります⁵⁾)。そうした理由は、式形がかなり煩雑になること、closeするために多くの仮定を導入しなければならないからです。そこで、柱群の形状抵抗(F_x, F_y)によって失われる平均エネルギーが乱れエネルギーに変換されることから、最も単純に、 k, ϵ の輸送式にsource項を付加した形にしています。もともと、 k - ϵ モデルに用いられる k, ϵ の輸送式も単純化されたものであって、このくらい粗っぽいやり方でも良いのではと思っています。

Q: 先ほどの議論でいきますと、流れの全エネルギーの保存則という形で書かれていないので、よく分からない面もありますが、運動量保存則を式(6)、(7)で定義して、相間の相互作用力が式(2)と同様に与えられている。従って、エネルギー的には上述の議論同様に、このフレームでは、抗力の成す仕事をエネルギー方程式の中に持ち込むと最終的にエネルギー逸散量がつり合わなくなるのではありませんか。すなわち、形状抵抗項として、形式的に式(6)、(7)のように書くことは、エネルギー的にはなにもしないことになるので、基礎式の中での表現方法を変えて、応力テンソルを表現する空間微分項で書かれるべきではないか。このような疑問がわいてきます。

A: 平均流の基礎式での形状抵抗表現は良いとしても、 k, ϵ の輸送式での付加項($F_x U + F_y V$)の表現がすっきりしない。ここの応力を表現する空間微分項として書かれるべきということですが、モデルにおいて乱れエネルギーの生成には2つのタイプがあり、以下のように考えます。まず、空間平均された基礎式を使うことにより、この計算では個々の柱の境界を差分形状に取り入れた計算を避けることができます。しかし、それでは、柱背後における後流の形状や柱表面の境界層における乱れエネルギーの生成がカウントできないことになり、この分の乱れ生成を考慮しなければなりません。これが付加項($F_x U + F_y V$)で、格子スケール以下(サブグリットスケール)の乱れ生成と呼ぶべきものに相当します。もう一つの乱れエネルギー生成は式(10)の P_k です。これは、空間微分を用いた形で書かれますが、ここで考えている空間微分のスケールは、いくつもの格子をまたがっての空間変動によって生まれる乱れエネルギーで、格子スケール以上(グリットスケール)の乱れ生成ということが言えます。したがって、空間微分項で書かれる生成項は後者の方になります。ただ、より詳細な立場でサブグリットスケールの乱れ生成項を評価するには、格子内での k, ϵ の輸送式を別途考慮して、グリットスケールの基礎式と連立した形で議論するのも一つの方法だと思います。

Q: このモデルを適用するにあたって、留意する点がありますか。

A: 一つは、空間平均に関わるもので、数値解と実験値を比較する際に問題となることです。すなわち、実験値は点計測であり、本来、ある空間スケールをもって平均化された実験値と計算値を比較しなければなりません。ただ、点計測がまったくその点でのローカルな値を示している訳ではありませんので、対応させる空間スケールを厳密に定義するのが難しいことになります。こうしたことは、流れ場が空間的に均質かどうかによります。また、数値計算では、柱あるいは樹木を空間的に一様に分布する抵抗体と見なしていますので、柱の空間的配置が非常にまばらになったりすれば、実験値との比較の問題を合わせて、こういう計算は馴染まなくなるかもしれません。もうひとつは、Raupach-Shaw⁵⁾の論文に見られるように、一般にcanopy flowでは粘性応力が大きなウ

エイトを占めるということです。ここでは抗力はレイノルズ数が十分大きい場合のモデルを用いているが、対象によっては粘性応力を考慮する必要があります。植生周辺の局所レイノルズ数に注意を払う必要があり、特に、実験ではこのレイノルズ数が小さくなるから、モデルの検証には注意が必要です。

3. 一流体モデル

一流体モデルは、二流体モデルと異なり、混相流をひとつの流体として取り扱う方法である。混相流そのものをひとつの連続体として取り扱える程度の大きさをもつ空間にわたって平均化して支配方程式が導かれている。質量、運動量およびエネルギー保存則は、それぞれ次式で与えられる。

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_m u_i) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i + \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (12)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \rho_m F_i u_i + \frac{\partial p u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} - \Phi \quad (13)$$

ここに、

$$k = 1/2 \rho_m u_i u_i \quad (14) \quad \rho_m = (\sigma - \rho)c + \rho \quad (15)$$

である。 ρ_m は混合体の密度、 u_i は流速、 F_i はbody force、 τ_{ij} は応力テンソル、 p は圧力、 Φ はエネルギー逸散率である。

Q: 固相と流体相とに速度ラグがあるときにはどうなりますか。

A: 式(11)~(13)がそのまま適用されているのが現状である。ここで問題となるのは適用領域に関するものであるが、これについてはあまり議論されていない。気液混相流の分野では、このような場合、スリップ流モデルや、ドリフトフラックスモデル⁶⁾が一般に用いられている。スリップ流モデルは、 $u_{si} = s u_{Li}$ ($s > 0$)、(u_{si} : 粒子速度、 u_{Li} : 液体速度) なるスリップ比 s を導入して二つの相の速度差に起因する運動量輸送量や運動エネルギーの輸送量に補正を加えるものである。また、ドリフトフラックスモデルは、ドリフト速度 u_{di} を $u_{di} = u_{ki} - V_i$ 、($V_i = \alpha_s u_{si} + \alpha_L u_{Li}$) のように定義して、運動量保存則の移流項やエネルギー方程式の運動エネルギーの輸送項を修正したものであって、現時点では、このモデルが一流体モデルでは最も合理的であるとされている。

Q: 一流体モデルの水工学への適用例としてはどのようなものがありますか。

A: 古典的な浮遊砂流などみなそうですし、土石流や泥流の研究もそうです。その一例として土石流に関する江頭らの研究⁷⁾や宮本らの研究⁸⁾を紹介しましょう。これらは、式(11)~(13)の支配方程式をもとに土石流の構成則を得ようとする研究です。彼らは、式(12)、(13)において非圧縮流れを仮定し、

$$\Phi = \tau_{ij} \partial u_i / \partial x_j \quad (16)$$

なる関係に基づいて左辺のエネルギー散逸構造について考察することにより構成則を得ている。土石流中のエネルギー散逸は、粒子の接触による固体摩擦、粒子衝突にかかわる粒子の非弾性的性質、間隙流体の粘性により生じる。これらの空間は相互嵌入がないから、粒子・流体間の相互作用を無視するか、流動により生じるエネルギー散逸も線型和で表わすことが可能であると考えられている。このような考察に基づいて、散逸応力(せん断応力)は

$$\tau = p_s \tan \phi_s + f_n(c)(1 - e^2) \sigma d^2 \left| \frac{du}{dz} \right| \left(\frac{du}{dz} \right) + f'_n(c) \rho d^2 \left| \frac{du}{dz} \right| \left(\frac{du}{dz} \right) \quad (17)$$

保存力（圧力）は、

$$p = p_s + f_n(c)e^2\sigma d^2(du/dz)^2 \quad (18)$$

なる形で表現されている。ここに、 p_s は静的な圧力、 ϕ_s は粒子の摩擦角、 σ は粒子の密度、 e は粒子の反発係数、 $f_n(c)$ 、 $f'_n(c)$ は粒子濃度の関数である。式(17)の右辺の第1項は粒子の接触により生じるせん断応力で、流動に依存しない応力（静的応力）、第2項は粒子の衝突により生じる応力、第3項は間隙水がせん断を受けることにより生じる応力である。ここで、流動に依存しない静的な応力は、流動により生じる粒子間衝突、間隙流体のせん断による応力よりはるかに大きく、全応力の約8～9割を占めていることが示されている。

Q: この解析によりますと、土石流はマクロ的に層流であることが要求されると思いますが、それでよろしいのでしょうか。もし、そうだとすれば、理論的には微小擾乱に対する不安定解析を行わないと土石流がこれらの式に従っているかどうか判断できないと思います。

A: 土石流は、式(17)、(18)のフレームのもとでは層流となります。従って、実際の土石流に対して流れの安定性（層流～乱流）に関する検討が必要になってくるのは言うまでもありません。この点に関する詳細な検討は、まだ行われていませんが、現在の段階では以下のように考えられています。礫を大量に含む土石流では、静的な力が卓越しているため、層流としての振舞いをします。土石流中の土砂の代表粒径に対して、流れの規模が非常に大きくなれば、乱流へと移行することは、十分考えられます。不安定性に関する議論は、流れ場に対する静的な応力の影響と、その流れの規模による変化が不明なため、なされていませんが、例えば次のように考えることは可能でしょう。まず、粘性流体との相似性を期待して流れのレイノルズ数を次のように定義して、限界レイノルズ数を議論するという方法です。

$$Re = u_* L / \nu \quad (19)$$

ここに、

$$\nu = f_n(d, \sigma, e, c) |du/dz| \quad (20) \quad u_* = \sqrt{(T_o - p_s \tan \phi_s) / \rho_m} \quad (21)$$

ここに、 f_n は関数、 L は水深などの長さスケールである。この場合の乱流とは、式(17)、(18)が導かれている平均化空間より大きな空間が流線を越えて移動するような状態を指している。

Q: 反発係数 $e = 0$ 、 $e = 1$ の場合の流れはどうなっているのでしょうか。

A: 式(17)、(18)のもとでは、 $e = 1$ の流れでは粒子衝突によるせん断力は発生しない。 $e = 1$ では粒子の衝突時の粒子の中心と中心を結ぶ方向の相対速度が衝突前後で保存されることが約束される必要がある。従って、流下とともに、このような相対速度は増大してゆくことになる。実際には間隙流体により、そのような運動は抑制されてしまう。このような解析では e は必ず1より小さい必要がある。そういう意味では粒子・流体間の相互作用の一部は e に含まれているといえる。一方、 $e = 0$ の流れでは、衝突後、2つの粒子はくっついて相対運動をするため、衝突による圧力は生じないことになる。従って、このような流れでは粒子間に流動によりダイラタント的な動的な圧力は生じない。

4. 流体～粒子モデル

この方法は粒子相を連続体近似を行わず、粒子は流体の作用を受けて運動する単体として取り扱うものである。運動している粒子間の衝突等の相互作用は、それを含めて解析する場合もあるが、一般には無視する。当然、このような制限のもとでは、運動している粒子の濃度は小さいことが要求される。

この場合、支配方程式は以下のである。

流体相に関して

$$\partial \rho / \partial t + \partial \rho u_j / \partial x_j = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - f_i \quad (23)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial u_j k}{\partial x_j} = \rho F_i u_i - \frac{\partial p u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - f_i u_i - \Phi \quad (24)$$

$$k = 1/2 \rho u_i u_i \quad (25)$$

粒子相については、次式が用いられる。

$$(m + m_v) dv_i / dt = m F_i + f_i \quad (26)$$

ここに、 m は粒子質量、 m_v は仮想質量、 v_i は粒子速度、 f_i は粒子・流体間の相互作用（浮力、揚力、抗力）である。

Q: 水工学ではどのような問題に適用されていますか。

A: 掃流砂や浮遊砂の解析、とくに粒子の運動軌跡や速度分布などの解析に用いられています。

Q: 粒子間の衝突はこのモデルでは無視されるということですが、たとえば、saltation粒子は河床を構成している粒子と頻繁に衝突を繰り返すし、slidingやrollingでは粒子は河床と接触を保って運動をします。これらはどのようになりますか。

A: それは境界条件として処理されます。というのは、固液混相流のモデルとしての流体～粒子モデルであるから、このモデルでの粒子間の相互作用は、流体とともに運動している粒子同士の衝突のみということになり、河床を構成している粒子との衝突は、運動している粒子を含む流体（固液混相流）と河床（境界）との関係として記述されることになる。

Q: 粒子の流体への影響は、どのように記述されるのでしょうか。

A: 非常に難しい問題である。実際、流れが粒子を含むと乱流構造が変化し、平均流の流速分布が変わることが知られている。掃流砂を含む流れについては、1方向モデル、1.5方向モデル、2方向モデルなどがある。1方向モデル^{9),10),11)}は、相互作用の影響を無視したものである。これは、興味の対象が相互作用や、流れの構造とは異なったところにあり、かつ、さほどこれらの効果が重要でないと考えられる場合に用いられる。1.5方向モデル¹²⁾、流れのエネルギー散逸機構（乱れエネルギーの生成、消費機構）は変化しないが、粒子が河床と衝突する際に粒子が失うエネルギーが常に流体から粒子に与えられ、そのため、流れ全体の抵抗が大きくなるとして流れの抵抗を説明する方法である。2方向モデルは、流体から粒子へ、粒子から流体への影響を考えたものである。たとえば、中川¹³⁾らは、粒子流体間の運動量交換を運動量保存則に考慮する一方において、流体に与えられる運動量のわきだし項（sink/source term）を省略した応力に対して、乱れの生成と消散を評価しているようです。ちなみに、流体に関する支配方程式を示すと次のようです。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\Gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \Gamma \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} + S_{pu} \quad (27)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \Gamma \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\Gamma \frac{\partial V}{\partial y} \right) + S_{pv} \quad (28)$$

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right\} + G - \epsilon \quad (29)$$

$$U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right\} + \frac{\epsilon}{k} (C_{1\epsilon} G - C_{2\epsilon} \epsilon) \quad (30)$$

$$G \equiv \nu_t \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (31)$$

これらのモデルを比較すると、1.5 方向モデルでは 1 方向モデルに比べて粒子相の存在により全体のエネルギーの散逸が増加していますが、2 方向モデルでは粒子の存在により減少するようです。

5. 結語

固液混相流の解析モデルを二流体モデル、一流体モデルおよび流体～粒子モデルのように分類し、それぞれに採用されている支配方程式の枠組について議論するとともに、いくつかの解析例について見てきた。

本共同研究は発足したばかりで、本文に示した問題について十分に議論をつくしているとはいえないが、これまでの議論によって固液混相流の支配方程式を取り扱う上での留意点についての見解を示せたのではないかと考えている。たとえば、いかなるモデルを採用するにせよ、保存則を記述する場合には、その空間を明確にする必要のあることや、運動量保存則の中で直感的に導入されている interaction force をはじめとして、式中の応力項の意義を明らかにするためにはエネルギー保存則にまで立ち入った議論が必要であることなどを示した。

最後に、本研究は文部省科学研究費総合研究(A)(研究代表者 芦田和男 京都大学名誉教授、(財)河川環境管理財団)の補助を受けて推進しているものであることを記し、ここに深謝いたします。

参考文献

- 1) 片岡勲: 気液二相流の基礎方程式と構成方程式, 混相流レクチャーシリーズ, 第4回, 基礎から最前線まで, 気液二相流の数値シミュレーション, pp.1-21, 1989.
- 2) 日本原子力学会熱流動部会編: 気液二相流の数値解析, 朝倉書店, 1993.
- 3) McTigue D.F.: Mixture theory for suspended sediment transport, ASCE, vol.107, HY6, 1981
- 4) 清水義彦・辻本哲郎・中川博次: 直立性植生層を伴う流れ場の数値計算に関する研究, 土木学会論文主集, No.447/II-19, pp.34-44, 1992.
- 5) Raupach, M.R. and Shaw, R.H.: Averaging procedures for flow within vegetation canopies, Boundary-Layer Meteorology, Vol.22, pp.79-90, 1982.
- 6) 片岡勲: 気液二相流のモデリングと基礎方程式, 混相流. vol.5, No.1 pp.3-21, 1991.
- 7) 江頭進治・芦田和男・矢島啓・高濱淳一郎: 土石流の構成則に関する研究, 京大防災研究所年報, 第32号 B-2, 1989, pp.487-501
- 8) 宮本邦明: Newton流体を含む粒子流の流動機構に関する研究, 立命館大学学位論文, 1985, pp.39-72.
- 9) 辻本哲郎・中川博次: 掃流粒子の Saltation の確率過程論的解析, 土木学会論文集, 第345号, pp.83-90, 1984.
- 10) 関根正人・吉川秀夫: 掃流砂の流送機構に関する研究, 土木学会論文集, 第351号, pp.69-75, 1984.
- 11) Wiberg, P.L. and Smith, J.D.: Model for calculating bed-load transport of sediment., Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.115, No.1, pp. 101-123, 1989.
- 12) Sekine, M. and H. Kikkawa: Mechanics of Saltating Grains II., Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.118, No.4, pp.536-558, 1992.
- 13) 中川博次・辻本哲郎・後藤仁志・渡辺幹広: 粒子間衝突を考慮した掃流層の数値シミュレーション, 水工学論文集, 第37巻, pp.605-640, 1993. 2