

低レイノルズ数 $k-\varepsilon$ モデルによる波動境界層の計算

Application of the low Reynolds number $k-\varepsilon$ models
to an oscillatory flow

田中 仁*・Ahmad SANA**

By Hitoshi TANAKA and Ahmad SANA

A comparable study of three versions of low Reynolds number $k-\varepsilon$ model is carried out with special reference to transitional regime in a wave boundary layer on smooth bottom. It is inferred that despite the useful modification suggested by later researchers, the original model by Jones and Launder (1972) has the most precise prediction of wave boundary layer structure, especially in transition. Finally, the features of transition in oscillatory boundary layer are elaborated.

Keywords: turbulence model, wave boundary layer, transition to turbulence

1. はじめに

近年、乱流数値計算法の発展は著しく、主な乱流モデルおよびその適用例のレビューはRodi¹⁾やASCE Review Committeeの報告²⁾に詳しい。ある問題に対しどのモデルを用いるかは、対象とする現象、必要とする精度、計算時間の制約等で定まるが、現時点で最もよく用いられているものは $k-\varepsilon$ モデルである。ただし、 $k-\varepsilon$ モデルの適用は多くの場合、定常流あるいは非定常の場合でも変動時間スケールがきわめて長い場合に対してであり、いわゆる波動境界層への適応例はこれに比べ数が限られている。平坦床上の波動境界層を扱った計算としては、Tanaka³⁾、Asano et al.⁴⁾、Aydin and Shuto⁵⁾、Justesen⁶⁾、Justesen⁷⁾などがある。また、砂漣上の流体場を扱った計算としてSato et al.⁸⁾、辻本ら⁹⁾、Pena-Santanaら¹⁰⁾、後藤ら¹¹⁾などが挙げられる。これらの内で、Asano et al.⁴⁾、Justesen⁶⁾を除いていずれの研究も高レイノルズ数 $k-\varepsilon$ モデルを用いており、壁面での境界条件としては壁関数法を用いている。ただし、対数則に基づく同境界条件の波動境界層への適用性については疑問がある。また、波動下においては周期的な運動に伴い摩擦速度も変動するので、境界条件を与える格子点が常に粘性底層外にあり、かつ対数則を満足する領域内に位置するよう設定することは困難である。この点、粘性底層内まで計算を行い壁面上で境界条件を課す低レイノルズ数

* 正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科
(〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

** M.Eng アジア工科大学助手 水資源工学科
(G. P. O. Box 2754, Bangkok 10501, Thailand)

k-εモデルでは、このような境界条件設定の困難さやその妥当性に関する疑問点が克服される。

現在までに提案された標準的な低乱流レイノルズ数モデルとしては、Jones and Launder¹²⁾、Hoffman¹³⁾、およびChien¹⁴⁾があるが、これらについて波動場を対象とした総合的な比較はなされていない。そこで、本研究では特に波動境界層における乱流遷移に着目し、上記3モデルによる予測値の比較・検討を行った。

2. 計算法

2. 1 基本式

本研究では波動に代わり振動流としての扱いを行う。通常、波動境界層厚さは水深、波長に比べてきわめて小さく、このような置き換えは妥当なものである。これにより、Jones and Launder¹²⁾による低乱流k-εモデルの基本式を無次元量で表せば、以下のようになる。

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + S \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ \left(\frac{S}{RE} + C_{\mu} f_{\mu} \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*} \right) \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right\} \dots\dots (1) \quad \frac{\partial k^*}{\partial t^*} = S \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ \left(\frac{S}{RE} + f_{\mu} \frac{C_{\mu}}{\sigma_k} \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*} \right) \frac{\partial k^*}{\partial z^*} \right\} + SC_{\mu} f_{\mu} \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t^*} = S \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ \left(\frac{S}{RE} + f_{\mu} \frac{C_{\mu}}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial z^*} \right\} + SC_1 f_{\mu} C_{\mu} k^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 - Sf_2 C_2 + \frac{\varepsilon^{*2}}{k^*} + E \dots\dots (3)$$

ここで、*付きの変数は次式で定義される無次元量である。

$$u^* = u/U_m, \quad t^* = t/\sigma, \quad U^* = U/U_m, \quad k^* = k/U_m^2, \quad \varepsilon^* = \varepsilon z_h/U_m^3, \quad z^* = z/z_h \quad \dots\dots (4)$$

上式で、u：水平流速、U：境界層外縁流速、U_m：Uの振幅、t：時間、k：乱れエネルギー、ε：逸散率、z：鉛直座標、z_h：計算上の上方境界高さ、σ：角振動数、RE=U_{man}/ν、a_n=U_m/σ、S=U_m/(σ z_h)である。ここで、式中の定数、関数は表-1で与えられる。表中で、R_T=k²/(εν)、u⁺は無次元摩擦速度である。以上のJones and Launder¹²⁾によるものを以下ではJLモデルと呼ぶ。その後、Hoffman¹³⁾（以下、Hモデルと呼ぶ）、Chien¹⁴⁾（同Cモデル）はこれに改良を加え、表-1に示した定数、関数形を提案している。これらは、主にJLモデルの計算時間を短縮することを目的として提案されたものである。

表-1 基本式中の定数と関数

PARAMETER	JONES & LAUNDER (1972)	HOFFMAN (1975)	CHIEN (1982)
C ₁	1.55	1.81	1.35
C ₂	2.0	2.0	1.8
C ₃	-	-	0.0115
C ₄	-	-	0.5
C _μ	0.09	0.09	0.09
σ _k	1.0	2.0	1.0
σ _ε	1.3	3.0	1.3
f ₂	1-0.3exp(-R _T ²)	1-0.3exp(-R _T ²)	1-0.222exp(-R _T ²)
f _μ	$\exp\left\{-\frac{2.5}{1+R_T/50}\right\}$	$\exp\left\{-\frac{1.75}{1+R_T/50}\right\}$	$1-\exp\left(-C_3 \frac{RE}{S} u_*^+ z^*\right)$
D	$2 \frac{S^2}{RE} \left(\frac{\partial \sqrt{k^*}}{\partial z^*} \right)^2$	$\frac{S^2}{RE} \frac{1}{z^*} \frac{\partial k^*}{\partial z^*}$	$2 \frac{S^2}{RE} \frac{k^*}{z^{*2}}$
E	$2 \frac{S^2}{RE} f_{\mu} C_{\mu} \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right)^2$	-	$2 \frac{S^2}{RE} \frac{\varepsilon^*}{z^{*2}} \exp\left(-C_4 \frac{RE}{S} u_*^+ z^*\right)$

境界条件としては、次に示す式(5), (6)を用いる。また、式(1)に現れる主流の変動は正弦的であるとし、これに対応する圧力勾配は式(7)となる。

$$u^* = k^* = \varepsilon^* = 0 \text{ at } z^* = 0 \quad \cdots \cdots (5)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{\partial k^*}{\partial z^*} = \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial z^*} \text{ at } z^* = 1 \quad \cdots \cdots (6)$$

$$U^* = \cos(t^*) \quad \cdots \cdots (7)$$

2. 2 計算法

計算には差分法を用いた。本計算では安定を高めるために、Crank Nicolsonの陰形式差分を用いている。壁面近傍で正確な値を得るために、壁面から離れるに従い等比級数的に増加するメッシュ間隔とした。具体的には、粘性底層内に常に10メッシュ以上含まれるように設定している。初期条件を用いて計算を初め、周期的な解が得られるまで計算を繰り返した。計算は層流域から初め、徐々にレイノルズ数を上げて行(—:層流解, ■:JLモデル, △:Hモデル, ☆:Cモデル)った。あるレイノルズ数の計算を行う際には、通常はその前のレイノルズ数に対する u^* , k^* , ε^* の解を初期条件として用いた。また、逆に高レイノルズ数の最終解を初期条件に用い、低いレイノルズ数に向かっての計算も試みている。

3. 計算結果

3. 1 層流

まず、レイノルズ数が十分に小さい場合の計算を行った。結果を図-1に示す。計算条件は $RE=10^4$ である。いずれのモデルも層流解と非常に良好な一致を見せており、差は見られない。層流域での本計算法の妥当性が示された。

3. 2 遷移域

波動場での摩擦係数を図-2に示した。その定義は次式である。

$$f_w = \tau_{\max} / (\rho U_n^2 / 2) \quad \cdots \cdots (8)$$

ここで、 $\tau_{\max}$:底面剪断応力の最大値、 ρ :流体密度である。層流域での計算結果は層流解とよく一致している。図中には、層流の厳密解($f_w = 2/\sqrt{RE}$)、及びKamphuis¹⁵⁾, Hino et al.¹⁶⁾, Jensen et al.¹⁷⁾による実験値も示した。JLモデルによれば、 $RE=2 \times 10^5$ 付近で乱流遷移が見られ、実験値と比較的良好一致を示す。また、遷移後の摩擦係数値も実験と良好対応を示す。なお、JLモデルについては図-2で右から左に RE を徐々に増加させる方法で計算した場合でも、逆に左から右に計算した場合にも同じ結果が得られた。これに対し、Hモデル、Cモデルでは小さいレイノルズ数から行った計算では、図-2に示した範囲で遷移が生じなかった。図-2にあるこれら2つのモデルによる結果は、JLモデルによる最も高いレイノルズ数で

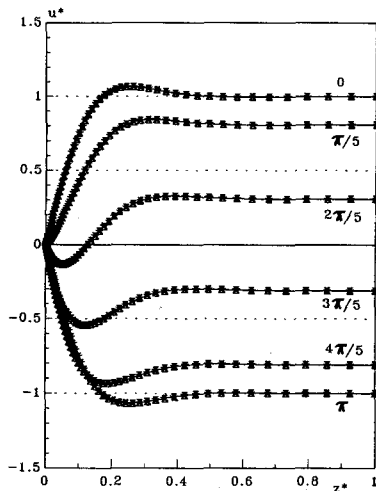


図-1 層流の流速分布

(—:層流解, ■:JLモデル, △:Hモデル, ☆:Cモデル)

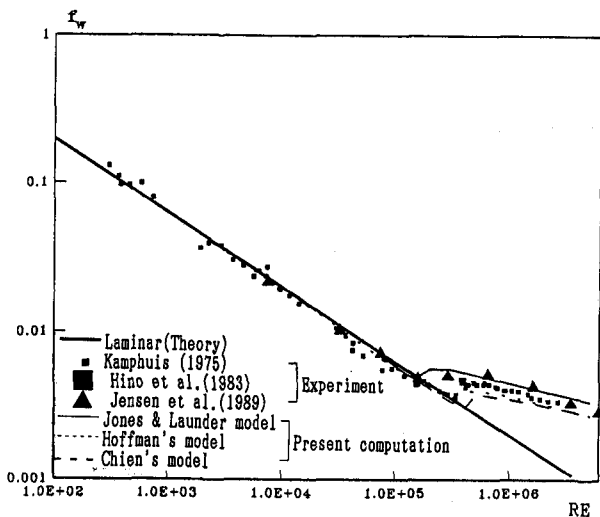


図-2 摩擦係数

の値を初期条件として、左に向かって計算を行った時の結果である。この場合は図にあるように、それぞれ $RE=4 \times 10^5$ 及び $RE=5 \times 10^5$ 辺りで遷移が見られる。よって、解の一意性の面でもJLモデルが優れていることが判った。

また、図-3には底面剪断応力の位相の進み θ を示したものである。実測値には、Sawamoto and Sato¹⁸⁾によるものも加えた。いずれのモデルの場合も遷移域付近での急激な減少が得られており、実験結果の傾向を良く予測している。ただし、個々に見ると、摩擦係数と同様にJLモデルによる計算が最も一致度が良いようである。

次に、剪断力の経時変化を示したものが図-4である。実験値は Jensen et al.¹⁷⁾によるものであり、ホットフィルム平面センサーにより直接測定を行った結果である。ただし、最大剪断応力 τ_{max} により無次元化して示している。まず、 $RE=7.5 \times 10^4$ では、図-2、図-3に見られるように層流域にある。剪断力の経時変化は層流解に示されるように正弦的な変動を示す。ただし、 $\pi/4$ の位相の進みがある。 $RE=1.6 \times 10^5$ においては、JLモデルによる計算値は $t^*=\pi$ 近くまで層流に近い挙動を示すが、その後第2のピークが現れる。ただし、このピーク値は第一のそれとほぼ同じであるため、図-2では見かけ上はほぼ層流解に従うこととなる。ただし、調和解析により位相のずれを求めれば、それは層流解の $\pi/4$ よりは小さいものとなる。このために、図-2で得られる遷移レイノルズ数と図-3でのそれとでは差異がみられることとなる。なお、この時点では実験に第2のピークは見られない。 $RE=2.9 \times 10^5$ においてJLモデルによる計算値では、2番目のピークが卓越する様になる。実験値にもこぶ状のピークが現れている。JLモデルによる予測値のピークは実測値のそれより

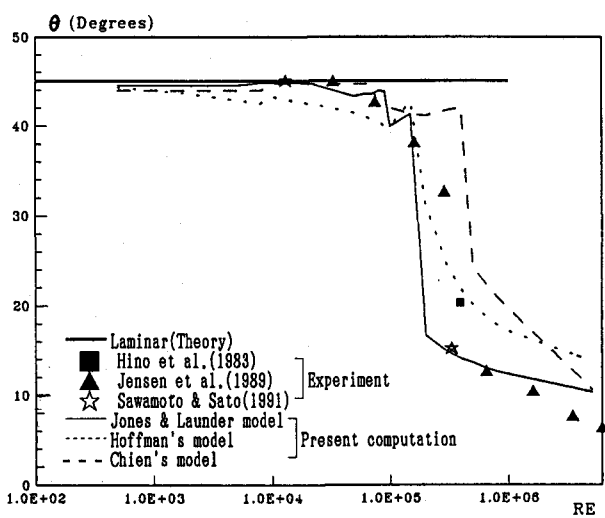


図-3 位相差

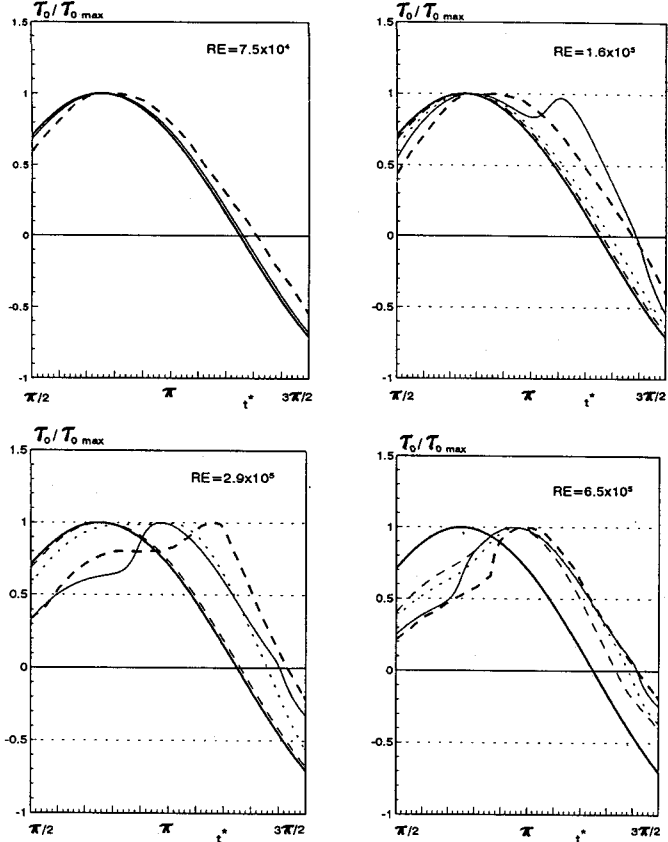


図-4 剪断応力の波形

— :JLモデル,:Htモデル, - - - - :Ctモデル
 — :層流解, - - - - :実験値(Jensen et al.¹⁷⁾)

遅れてはいるもの、波形全体の形状を良好に再現していると言える。これに対して、Hモデル、Cモデルでは実験値との差が大きい。特に、後者はいまだに層流解にはば一致した経時変化である。 $RE=6.5 \times 10^6$ に至るとHモデル、Cモデルも層流解に一致せず、波形も正弦波からずれて来る。それでも、その程度はJLモデルによるものほどは極端でなく、やはりここでもJLモデルによるものが実験値にもっとも近い結果を与える。

以上に見られる剪断応力の第二ピークの出現は、減速期に現れる振動流特有の爆発的な乱れの発生によるものと考えられ、JLモデルがこれを良好に表現している。

3. 3 乱流

乱流域における速度分布を図-5に示した。計算条件は $RE=10^6$ である。3つのモデルによる分布は似通った特徴を示している。すなわち、壁面近くでの層流的な速度分布、それより高方での対数則域の存在、また、いわゆる“overshoot”が見られる点などである。ただし、細部ではお互いに異なる。特に、境界層厚さ、overshootの度合い、粘性底層厚、対数則域の厚さ等に差異が見られる。ただし、これらと詳細なデータとの比較は今後の課題である。

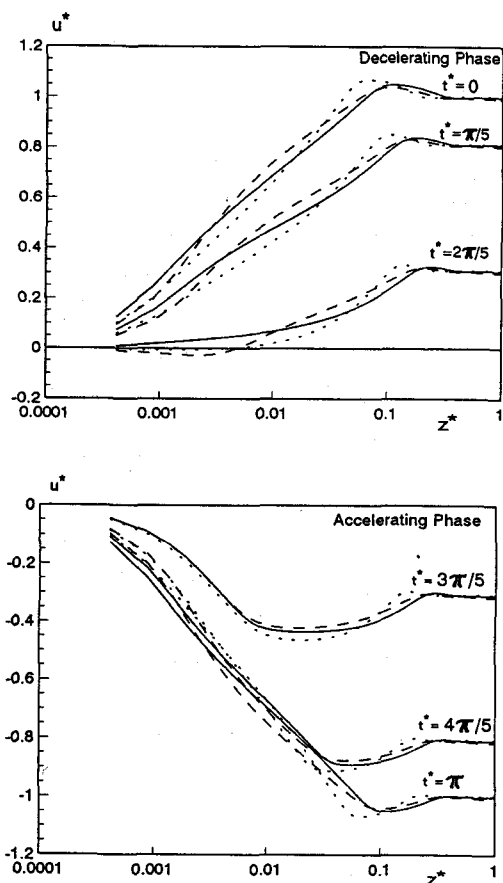


図-5 乱流時の速度分布

— : JLモデル, : Hモデル, ---- : Cモデル

4. 結語

本研究では、現在までに提案されている3種の低乱流 $k-\epsilon$ モデルを用いて波動境界層の数値計算を行い、実験値との比較を通してモデルの検証を行った。摩擦係数、位相差、底面剪断応力経時変化に関する比較から総合的に判断すると、Hoffman¹³⁾、Chien¹⁴⁾による改良モデルよりも、Jones and Launder¹²⁾により提案されたoriginal modelが最も良い結果を与えるようである。特に、遷移域近傍での諸水理量の振舞いを良好に予測することが出来る。今後、さらに流速分布、乱れ強度等のデータも併せて、より詳細な検討を行う予定である。

謝辞：本論文の公表に際し、小川基金の補助を受けたことを付記し、ここに謝意を表する。

参考文献

- 1) Rodi, W.: Turbulence models and their application in hydraulics, State of Arts Paper, 1980.
- 2) ASCE Task Committee on Turbulence Model in Hydraulic Computations: Turbulence modeling on surface water flow and transport, Part I, Journal of Hydraulics Division, Vol.114, No. 9, pp.970-991, 1988.
- 3) Tanaka, H.: Turbulence structure and bed friction under wave and current interacted motion,

Third International Symposium on River Sedimentation, pp.334-343, 1986.

- 4) Asano, T., Godo, H. and Iwagaki, Y.: Application of low-Reynolds number turbulence model to oscillatory bottom boundary layers, Coastal Engineering in Japan, Vol.30, No.2, pp.1-9, 1988.
- 5) Aydin, I. and Shuto, N.: An application of the $k-\varepsilon$ model to oscillatory boundary layers, Coastal Engineering in Japan, Vol.30, No.2, pp.11-24, 1988.
- 6) Justesen, P.: A model for the smooth wall oscillatory boundary layer flow, Progress Report, No.67, ISVA, Technical University of Denmark, 31pp., 1988.
- 7) Justesen, P.: Prediction of turbulent oscillatory flow over rough beds, Coastal Engineering, Vol.12, pp.257-284, 1988.
- 8) Sato, S., Uehara, H., and Watanabe, A.: Numerical simulation of the oscillatory boundary layer flow over rippls by a $k-\varepsilon$ turbulence model, Coastal Engineering in Japan, Vol.29, pp.65-78, 1986.
- 9) 辻本剛三・市山 誠・早川典生・福嶋祐介・中村由行: 乱流モデルによる砂漣上の浮遊砂濃度と浮遊砂輸送機構、海岸工学論文集、第36巻、pp.284-288、1989.
- 10) Pena-Santana, P.G.・渡辺 晃・磯部雅彦: 振動乱流境界層における流れと浮遊砂移動の数値シミュレーション法の検討、海岸工学論文集、第37巻、pp.264-268、1990.
- 11) 後藤仁志・辻本哲郎・中川博次: 砂漣床上の振動流・一方向流共存場における浮遊砂の拡散過程、土木学会論文集、第473巻/II-24, pp.83-91, 1993.
- 12) Jones, W.P. and Launder, B.E.: The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.15, pp.301-314, 1972.
- 13) Hoffman, G.H.: Improved form of the low-reynolds number $k-\varepsilon$ turbulence model, The Physics of Fluid, Vol.18, No.3, pp.309-312, 1975.
- 14) Chien, K.Y.: Prediction of channel and boundary layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model, AIAA Journal, Vol.20, No.1, pp.33-38, 1982.
- 15) Kamphuis, J.W.: Friction factor under oscillatory waves, Journal of Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division, Vol.101, No.WW2, pp.135-144, 1975.
- 16) Hino, M., Kashiwayanagi, M., Nakayama, A. and Hara, T.: Experiments on the turbulence statistics and the structure of a reciprocating oscillatory flow, Journal of Fluid Mechanics, Vol.131, pp.363-400, 1983.
- 17) Jensen, B.L., Sumer, B.M. and Fredsoe, J.: Turbulent oscillatory boundary layer at high Reynolds numbers, Journal of Fluid Mechanics, Vol.206, pp.265-297, 1989.
- 18) Sawamoto, M. and Sato, E.: The structure of oscillatory turbulent boundary layer over rough bed, Coastal Engineering in Japan, Vol.34, No.1, pp.1-14, 1991.