

円管内往復流における壁面せん断応力の算定について

On The Measurement of Wall Shear Stress due to Oscillatory Pipe Flow

串田祥一*・安川 浩**・宇井正和***

By Shoichi KUSHITA and Hiroshi YASUKAWA and Masakazu UI

The present paper deals with an experimental method to evaluate the wall shear stress due to an oscillatory pipe flow. The method consists of measuring a pressure difference between two points along the pipe wall and evaluating the acceleration of fluid as precisely as possible. The acceleration of fluid through a pipe is reflected on the record of water level gauge mounted on a basin connected to the pipe. Once the pressure difference and acceleration of fluid are estimated, the wall shear stress is easily derived. A good agreement is found between the results from experiment and laminar theory.
keywords : wall shear stress, oscillatory pipe flow, measuring devices

1. 序論

海浜に打ち寄せられる波や潮汐、調圧水槽とサージタンクと貯水池を結ぶ圧力トンネル内のサージング等に見られる往復流は、工学的、社会的に非常に重要な問題であり、これまで数多くの研究がなされてきている。

特に、近年の計算機の発達に伴って、乱流モデル等の数値シミュレーションが活発に開発されている。しかし、その多くは定常流から発展したものであるため、その適用性については十分に信頼のおける実験的検証が必要になってくるであろう。

以上の背景を踏まえて、壁面せん断応力の算定という側面から往復流における実験法を眺めてみると、プロベラ式流速計で壁面付近の速度分布を測定して速度勾配を求め、壁面せん断応力を求める方法¹⁾は、流速計の大きさや壁面との干渉による影響が大きく、特に乱流境界層について十分な精度が得られない可能性がある。また、熱線流速計による方法²⁾は、前述の方法と同様、流れの中にセンサーを挿入しなければならない

* 正会員 工修 富山県土木部河川課

(〒930 富山県富山市新総曲輪1-7)

** 正会員 工博 東京都立大学教授 工学部土木工学科

(〒192-03 東京都八王子市南大沢1-1)

*** 正会員 東京都立大学助手 工学部土木工学科

流れを乱す可能性がある。加えて、この方法は完全に埃のない流れでなければ、使用している間にセンサーの表面が汚れて特性が変化するため、頻繁に較正を行わなければならない。さらに、レーザー流速計による方法³⁾は、本研究が対象としている円管内外往復流において、屈折効果が生じる可能性がある。

そこで本研究では流速計を使用せず、差圧計と水位計を用いる方法⁴⁾に基づき、壁面せん断応力の算定を行う。この方法は、管路壁上の2点間の差圧値が加速度と壁面摩擦に起因する成分の和として表されることに基づいている。そこで自由水面の水位計出力を調和解析し高調波成分を求め、対応する加速度成分を減ずることにより壁面せん断応力を求める。この方法は、高性能の微差圧計と水位計の使用が前提であるが、流速計のように流れの中にセンサーを挿入する必要がないため、流れを乱すことがなく、測定器の扱いについても流速計と比べ容易であるという利点がある。

2. 実験方法とデータの処理方法

当初、水を入れた管路を起流装置に直接接続した実験装置によりデータを採取したところ、起流装置自身の振動が実測データに大きく反映していることが明らかであったため、実験装置は図-1に示すとおり、起流装置から空気ダクトを介して水を満たしたU字管に接続したものを使用した。

この起流装置は油圧によって作動するものであり、関数発振器から正弦波

形を起流装置の制御盤に与え、ピストンバルクヘッドを振動の中心(ゼロ点)にある状態から所定の大きさまで徐々に増大させ、安定した正弦往復流を発生させる。U字管路壁上の2点間の差圧は容量式圧力計によって測定し、図-1左側の水槽にサーボ式水位計を設置して自由水面の変動を測定した。出力データはデジタルデータレコーダに収録してパソコン及びワークステーションにより処理した。

ここで、層流から乱流への遷移域について考える。自由振動の減衰率から限界レイノルズ数を求めた実験⁶⁾によれば、レイノルズ数300が乱流への遷移点である。即ち、 $\xi \sqrt{\frac{n}{\nu}} = 300$

但し、 ξ = 断面内平均粒子変位の振幅、 n = 非粘性振動角速度、 ν = 動粘性係数。

本実験では、上の限界レイノルズ数に基づいた層流域、遷移点付近、乱流域に対して、実験条件を設定した(表-1参照)。尚、すべての例に対して、U字管内水流の固有振動周期とピストンの振動周期を一致させている。

3. 計算の基本式

円筒座標(r, θ, z)によって流体運動の基礎式を表示し、円管内外往復流のNavier-Stokes方程式の層流時の解を導く。連続式は次式で表わされる。

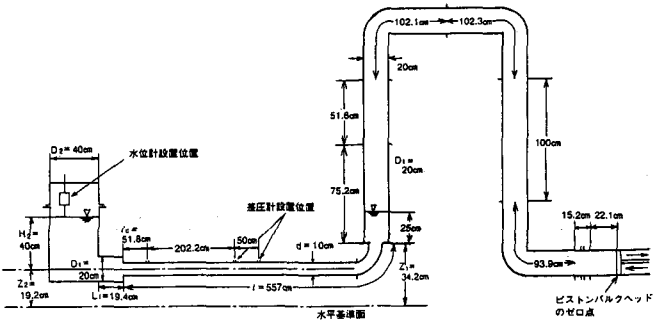


図-1 実験装置概略図

Case	ピストン振幅	振動周期	レイノルズ数
2-1	4.0cm	8.469sec	137.78
2-2	8.0cm	8.469sec	275.46
2-3	8.4cm	8.469sec	289.33
2-4	8.8cm	8.469sec	303.99
2-5	9.2cm	8.469sec	316.89
2-6	12.0cm	8.469sec	413.33
2-7	16.0cm	8.469sec	551.11

表-1 実験条件

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

運動の軸対称性と軸方向への一様性を仮定すれば、軸方向運動成分の卓越性が想定され、 r 、 θ 方向は無視される。尚、 h は管軸の基準面上高度である。

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = -g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho g} + h \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\tau}{\rho} \right) \quad (2)$$

ここで角速度 ω の周期現象を考えれば、(2) 式の各項は時間のみの関数となるので、(2) 式は次のようになる。ここで、 u_z を u と略記する。

$$j\omega u = g I + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\tau}{\rho} \right) \quad (3)$$

$$\text{但し、} I = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho g} + h \right), \quad j^2 = -1$$

(2)、(3) 式より次式が成り立つ。

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 r} \left(r \frac{\tau}{\rho} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\tau}{\rho} \right) - \frac{j\omega}{\nu} \left(r \frac{\tau}{\rho} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\text{但し、} \frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial r}$$

ここで変数変換 $\eta = r \sqrt{-\frac{j\omega}{\nu}}$ をすると、

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 \eta} \left(\eta \frac{\tau}{\rho} \right) - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\tau}{\rho} \right) + \left(\eta \frac{\tau}{\rho} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\eta \frac{\tau}{\rho} = A(\eta J_1(\eta)) + B(\eta Y_1(\eta)) \quad (6)$$

管軸 ($\eta = 0$) の上で τ は有限であるから、(6) 式における係数 $B = 0$ である。また、管壁上において $\eta_0 = r_0 \sqrt{-j \frac{\omega}{\nu}}$ 、 $\tau = \tau_0$ 、 $u = 0$ であるから壁面せん断応力は次式で表わされる。

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = -\frac{J_1(\eta_0)}{\eta_0 J_0(\eta_0)} r_0 I \quad (7)$$

角速度 ω の周期現象である断面平均流速 V と断面内平均粒子変位 ξ との間に $V = j\omega\xi$ が成り立つので、壁面せん断応力は次式で表わされる。

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = -r_0 \frac{\omega^2 \xi}{g} \frac{J_1(\eta_0)}{\eta_0 J_2(\eta_0)} \quad (8)$$

4. 実験値からの壁面せん断応力の計算

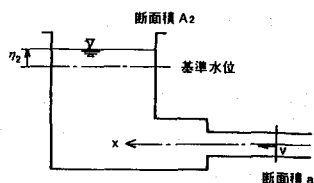
4.1 壁面せん断応力と水流加速度及び水面変位の関係

一樣断面管路内水流に着目し、運動量方程式を適用すれば次式が成り立つ (図-2 参照)。

$$a(x_2 - x_1) \rho \frac{dv}{dt} = a(p_1 - p_2) - 2\pi r_0(x_2 - x_1) \tau_0 \quad (9)$$

但し、 v は断面平均流速である。

(9) 式より管路壁上の2点間の差圧値は、①加速度、②壁面摩擦に起因する2項の和として表わされる。それ故に任意の2点間の差圧値から壁面せん断応力を



正確に算定しようとするならば、同様な正確な加速度の算定を要する。

図-3を参考に、往復流の基本周波数 n を用いれば、実測の水面変位 $\eta_2(x, t)$ は次式で表わされる。

$$\eta_2(x, t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \{ B_n \cdot \sin(mnt) + C_n \cdot \cos(mnt) \} \quad (10)$$

連続式を考慮すると、(9)式と(10)式より次式が成り立つ。

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = \frac{r_0}{2} \left[\frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho g (x_2 - x_1)} + \frac{1}{g} \frac{A_2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (nm)^2 \{ B_n \cdot \sin(mnt) + C_n \cdot \cos(mnt) \} \right] \quad (11)$$

4. 2 高調波成分の算定法

データレコーダで採取されるデータは離散的であるため、最小二乗法により基本周波数 n に基づく連続関数(基本波の方程式)を求め、実測データからそれを引くことにより、自由水面の変位及びピストンバルクヘッドの運動に含まれる高調波成分が得られる。

まず、次式で示される基本周波数 n に基づく連続関数を得るために、最小二乗法により未知の係数 A 、 B_m 、 C_m を求める。

$$y(t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \{ B_n \cdot \sin(mnt_i) + C_n \cdot \cos(mnt_i) \} \quad (12)$$

時間 t_i の実測データを $y_d(t_i)$ とすれば、実測データと基本波との差の二乗和 S は次式で表わされる。但し、実測データは N 個とする。

$$S = \sum_{i=1}^N \{ y_d(t_i) - y(t_i) \}^2 \quad (13)$$

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0, \frac{\partial S}{\partial B_m} = 0, \frac{\partial S}{\partial C_m} = 0, \quad (m = 1 \sim M) \text{ が成り立つから、(13)式より } (2M+1) \text{ 個の未知数 } A,$$

B_m 、 C_m ($m = 1 \sim M$) より或る次の連立一次方程式が成り立つ。

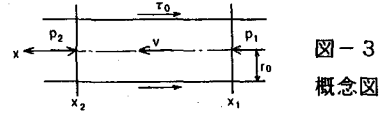
$$\begin{aligned} N \cdot A + \sum_{n=1}^M \{ B_n \cdot \sum_{i=1}^N \sin(mnt_i) + C_n \cdot \sum_{i=1}^N \cos(mnt_i) \} &= \sum_{i=1}^N y_d(t_i) \\ A \cdot \sum_{i=1}^N \sin(lnt_i) + \sum_{n=1}^M \{ B_n \cdot \sum_{i=1}^N \sin(mnt_i) \sin(lnt_i) \\ &+ C_n \cdot \sum_{i=1}^N \cos(mnt_i) \sin(lnt_i) \} = \sum_{i=1}^N y_d(t_i) \sin(lnt_i) \\ &\quad (l = 1 \sim M) \\ A \cdot \sum_{i=1}^N \cos(lnt_i) + \sum_{n=1}^M \{ B_n \cdot \sum_{i=1}^N \sin(mnt_i) \cos(lnt_i) \\ &+ C_n \cdot \sum_{i=1}^N \cos(mnt_i) \cos(lnt_i) \} = \sum_{i=1}^N y_d(t_i) \cos(lnt_i) \\ &\quad (l = 1 \sim M) \end{aligned} \quad (14)$$

Gause-Seidel法により(14)式を解き、係数 A 、 B_m 、 C_m を求め、(12)式に代入することにより、基本波の方程式が得られる。ここでは、高調波成分を第5調波まで表わすこととするので、11元連立一次方程式となる。

5. 理論と実験との比較及び考察

先に述べた装置を使用して表-1に示す実験条件により実験を行った。ここでは、乱流状態と考えられるCase 2-7(レイノルズ数=551.11)に対する結果を示す。但し、2周期分の結果を示す。

実測の関数発振器の基準波形(図-4)、ピストンの変位(図-5)、自由水面の変位(図-6)を最小



二乗近似した結果を以下に示す。尚、実測値は点線、計算値は実線で表わした。

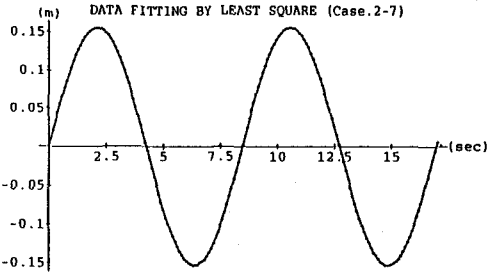


図-4 関数発振器の基準波形

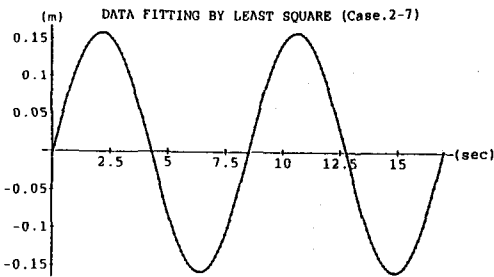


図-5 ピストンの変位

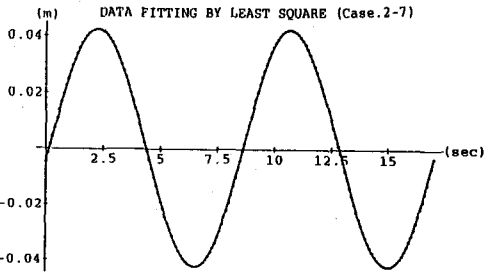


図-6 自由水面の変位

以上のように3図とも基本波と実測値は、良好な一致を示しているように見えるが、さらに実測データから基本波成分を減ずることにより高調波成分を求め、最小二乗法により高調波成分を第5調波までの近似式で表わした。以下に各々の結果を示す(図-7~図-9及び表-2参照)。

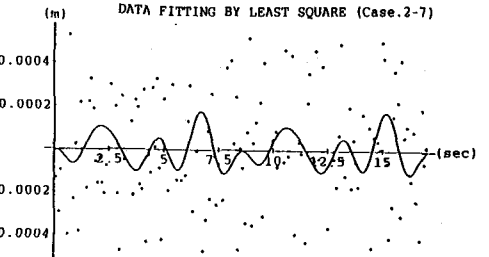


図-7 基準波形の高調波成分

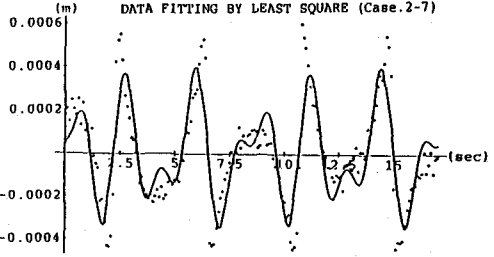


図-8 ピストン変位の高調波成分

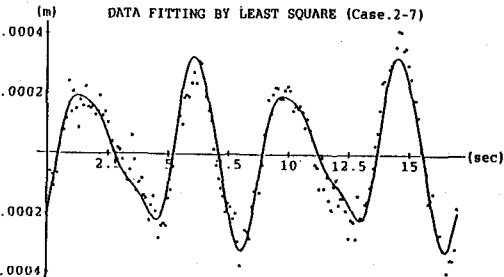


図-9 自由水面変位の高調波成分

係数	基準波形	ピストンの変位	自由水面の変位
A	-0.215690E-06	-0.443342E-06	0.184009E-05
B ₁	-0.161361E-06	-0.151139E-07	0.655401E-07
B ₂	-0.495113E-05	0.350215E-04	0.114786E-03
B ₃	-0.105899E-04	0.675175E-04	0.972027E-04
B ₄	0.564114E-04	0.239074E-04	-0.813064E-04
B ₅	-0.143711E-04	-0.636536E-04	0.187753E-04
C ₁	-0.139563E-06	-0.724669E-06	0.366964E-05
C ₂	-0.652236E-04	-0.362129E-04	-0.209745E-03
C ₃	-0.228986E-04	0.214899E-03	-0.132680E-05
C ₄	0.446694E-04	0.122785E-04	0.148058E-05
C ₅	0.341441E-04	-0.151479E-03	-0.126041E-04

表-2 高調波成分の係数

図-7の場合、高調波成分のデータは不規則に散らばっており、最小二乗近似の精度も低いことが確認された。図-8の場合、高調波成分のデータは規則性が高く、また係数に注目すれば、ピストンの変位波形は第3調波と第5調波が支配的であることがわかる。図-9の場合も高調波成分のデータの規則性は高いが、係数は第2調波が支配的であり、それぞれ固有の特性を持つことが確認された。

ここで動粘性係数 ν を3通り（水温20℃、水温15℃、水温10℃）設定し、壁面せん断応力の理論解を求め、差圧計の出力から算出した実測値と比較する（図-10～図-12参照）。尚、実測値は点線、Navier-Stokes方程式の解は実線で表した。

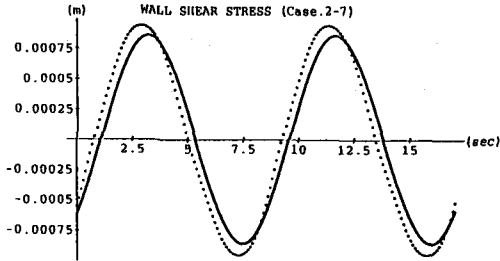


図-10 壁面せん断応力（水温20℃）

$$\nu = 1.004 \times 10^{-2} (\text{cm}^2/\text{sec})$$

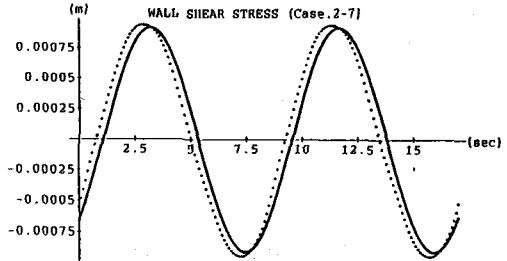


図-11 壁面せん断応力（水温15℃）

$$\nu = 1.138 \times 10^{-2} (\text{cm}^2/\text{sec})$$

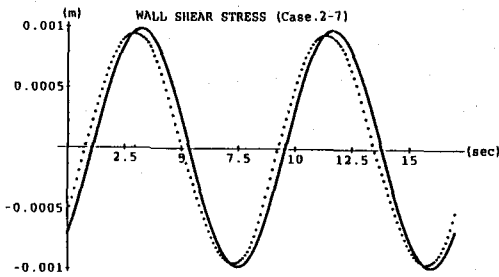


図-12 壁面せん断応力（水温10℃）

$$\nu = 1.304 \times 10^{-2} (\text{cm}^2/\text{sec})$$

図-10～12より、本研究で提案した円管内往復流における壁面せん断応力の算定法は、Navier-Stokes方程式の解と良好な一致を示した。この結果から、自由水面の変位波形における高調波成分が明確に算定されたといえる。また、動粘性係数を変化させることによって水温が低くなると壁面せん断応力が大きくなることが示され、実測値は $\nu = 1.138 \times 10^{-2} (\text{cm}^2/\text{sec})$ を与えたときの理論解と最も良く一致した。これは、実験状況から妥当な結果であると考えられる。

6. 結論

自由水面波形の高調波成分が明確に算定される結果として、管路内の水粒子の加速度に含まれる高調波成分は正確に誘導され、管路壁上の差圧計出力から加速度成分を差し引くことによって壁面せん断応力の正確な算定が可能となった。また自由水面の減衰率という局面からレイノルズ数

$$\xi \sqrt{\frac{n}{\nu}} = 300 \quad (\xi = \text{断面内}$$

平均粒子変位の振幅、 n = 非粘性振動角速度、 ν = 動粘性係数)を層流から乱流の遷移点とすると、レイノルズ数が551のときの壁面せん断応力は、驚くほど層流時の理論値と一致している。これは、本研究で用いた差圧計が高調波成分を正確に拾えなかったから生じた結果であるか、あるいは乱流壁面せん断応力の算定にはより高次の高調波まで考慮せねばならないのか今後検討を要する。

さらに滑面のみならず粗面に対しても、本研究で述べた壁面せん断応力算定法を検討していきたい。また粒状体を密に含んだ固液二相流における壁面せん断応力を計測する手がかりをも与えるものと考えられる。

参考文献

- 1) I.G.Jonsson ; Proceedings of 10th Congress on IAHR, London, 1963
- 2) 日野幹雄・沢本正樹・高須修二；土木学会論文報告集237号，1975
- 3) 日野幹雄・柏柳正之・中山哲哉・原 輝彦；第25回水理講演会論文集，1981
- 4) 安川 浩・宇井正和；第32回年次学術講演会講演概要集2，1977
- 5) 安川 浩・田川昌宏；土木学会論文報告集208号，1972