

鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析

Free Surface Profile Analysis of Open Channel Flows by Means of

1-D Basic Equations with Effect of Vertical Acceleration

細田 尚*, 多田 彰秀**

by Takashi HOSODA and Akihide TADA

Free surface profile analysis of the steady open channel flows is investigated by means of the one-dimensional basic equations with the effect of the vertical acceleration. The undular jump is one of the fundamental flows which should be considered the effect of the vertical acceleration. It is firstly shown that the wave characteristics of undular jump such as the height of first crest, first trough, etc. can be reproduced by the basic equations and the numerical method developed in the paper. The breaking process of undular jump can also be simulated by multiplying the vertical acceleration term by the dumping function. The numerical method is then applied to the free surface profile analysis of the flow with both the undular jump and the draw-down part in the mild open channel. The free surface profile is calculated as the two-point boundary value problem and compared to the laboratory test.

keywords: undular jump, wave characteristics, free surface profile analysis

1. はじめに

本研究は、鉛直加速度を考慮した定常状態の水面形方程式を用いて、開水路流れ定在波の基本的現象である波状跳水の水面形解析法について考察したものである。たとえば、図-1に示したような緩勾配水路の流れにおいて、等流状態のフルード数が1に近いとき跳水是波状跳水となる。この波状跳水は、通常の静水圧分布を仮定した水面形方程式によって再現できず、鉛直加速度を考慮した水面形方程式 [1,2] を用いる必要がある。しかし、波状の領域から十分離れた、水面形解析の境界条件 (M_1, M_2 曲線の出発点) が与えられる上流・下流端付近と、波状跳水の部分の両者を、鉛直加速度を考慮した基礎式によって再現する方法は十分明らかになっていない。そこで本研究では、上流・下流端において境界条件として水深が与えられる場合について、波状跳水を含む水面形を二点境界値問題として再現する方法について検討する。

まず、波状跳水部の再現性について検討する。波状跳水に関しては、水面形を孤立波とクノイド波の接続として構成することを考えた研究 [3]、基礎式に渦動粘性項を考慮することにより共役関係を自動的に満足する波状跳水が再現されることを示した研究 [4] などがある (後者の Whitham の研究は形状の変化しない波状段波を取り扱ったものであるが、本研究では形状の変化しない波状段波を理想的な波状段波と同一のものとみなす)。渦動粘性項のパラメータを適当に設定することにより、両者により再現される波状跳水の特性量が一致すること、さらにそれらは Sandover・Zienkiewicz [5] の実験結果にほぼ適合することが示される。

次に上流・下流端で境界条件として水深が与えられた場合について、二点境界値問題としての解析法を示す。すなわち、境界条件として上流端で水深と水面勾配、下流端で水深を必要とする離散式を導く。この離散式を単純な収束計算法を用いて解く手順を示すとともに、緩勾配水路の流れに適用し実験結果と比較する。そのさい、波状跳水から強跳水への遷移過程をモデル中に組み込む必要性、および鉛直加速度項に減衰関数を乗じることによりこの遷移過程がおおよそ再現されることを示す。

* 正会員 工博 京都大学講師 工学部土木工学教室 (〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工修 西松建設(株)技術研究所 (〒242 大和市下鶴間2570-4)

2. 鉛直加速度を考慮した水面形方程式

鉛直加速度を考慮した水面形方程式はブシネスクによって導かれ、重力項、底面せん断応力項および渦動粘性項を無視するとき、クノイド波解とその極限として孤立波解を基本解として持つことが知られている [2]。基礎式は連続式と運動量方程式で構成され、図-1の座標系のもとで示せば次のようになる。ただし、Whithamのモデル [3] に対応して、右辺第一項に渦動粘性項を含んでいる。

$$hu = q \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \left(hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \cos \theta + \frac{1}{3} h^2 u^2 \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{1}{3} hu^2 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right) = \frac{d}{dx} \left(D_m h \frac{du}{dx} \right) + gh \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho} \quad (2)$$

ここに、 x : 空間座標、 h : 水深、 u : 水深平均流速、 q : 単位幅流量、 θ : 水路床勾配、 D_m : 渦動粘性係数、 g : 重力加速度、 τ_b : 底面せん断応力、 ρ : 水の密度である。以後簡単のため $\cos \theta \approx 1.0$ とする。

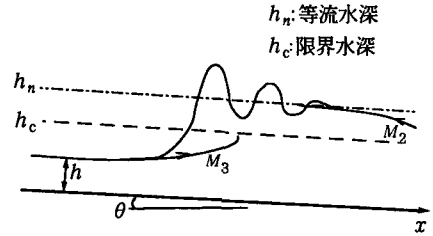


図-1 緩勾配水路の水面形

3. 波状跳水部の再現

3.1 クノイド波と孤立波の接続

(2) 式の右辺が無視できるとき、クノイド波とよばれる周期解とその極限としての孤立波解が存在する。このクノイド波と孤立波の接続として波状跳水の水面形を構成することが考えられた [3]。すなわち、図-2に示すように first crest を原点として、それより上流側を孤立波解 (3) 式で表わし、原点より下流側をクノイド波解 (4) 式で表わした。

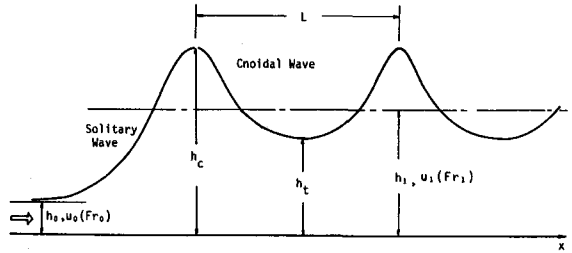


図-2 クノイド波と孤立波の接続

$$h = h_0 + (Fr_0^2 - 1)h_0 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2h_0} \sqrt{\frac{3(Fr_0^2 - 1)}{Fr_0^2}} x \right] \quad (3), \quad h = h_t + (h_c - h_t) \operatorname{cn}^2(x/L, k) \quad (4)$$

ここに、 cn は Jacobi の楕円関数であり、 Fr_0^2 , L および k は次式で定義される。

$$Fr_0 = \frac{q}{\sqrt{gh_0}h_0}, \quad L = \frac{2h_0}{\sqrt{3(1 - \frac{h_0}{Fr_0^2 h_t})}}, \quad k^2 = \frac{Fr_0^2 - h_t/h_0}{Fr_0^2 - h_0/h_t}$$

孤立波とクノイド波の接続条件として、上流無限大の水深 h_0 とクノイド波の領域の平均水深 h_1 が共役関係 (5) 式を満たすという条件が用いられる。

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{\sqrt{1 + 8Fr_0^2} - 1}{2} \quad (5)$$

これらを用いて図-2に示した波状跳水の特性量が次のように導かれた [3]。

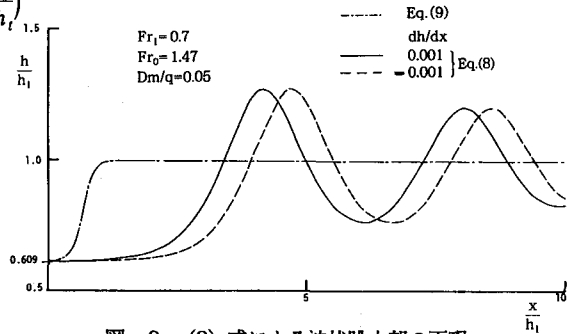


図-3 (8) 式による波状跳水部の再現

$$\frac{h_c}{h_0} = Fr_0^2, \quad \frac{h_t}{h_0} = 2 \frac{F_1(\pi/2, k) - E_1(\pi/2, k)}{F_1(\pi/2, k) (\sqrt{1 + 8Fr_0^2} - 1) - 2Fr_0^2 E_1(\pi/2, k)}, \quad \frac{L}{h_0} = \frac{4F_1(\pi/2, k)}{\sqrt{3(1 - \frac{h_0}{Fr_0^2 h_t})}} \quad (6)$$

ここに、 $F_1(\pi/2, k)$ 、 $E_1(\pi/2, k)$ はそれぞれ第一種、第二種の不完全楕円積分を表わす。

3.2 渦動粘性項を考慮したモデル [4]

Whitham は (2) 式中右辺重力項と底面せん断応力項を無視した (7) 式と同様の基礎式の特性を検討した。

$$\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} + \frac{1}{3} q^2 \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{1}{3} \frac{q^2}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 - D_m h \frac{d}{dx} \left(\frac{q}{h} \right) = M_0 (= \text{一定}) \quad (7)$$

(7) 式は連立常微分方程式系として書き換えると次のようになる。

$$\frac{dh}{dx} = p, \quad \frac{q^2}{3} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{3} \frac{q^2}{h} p^2 - \frac{D_m q}{h} p + \left(M_0 - \frac{q^2}{h} - \frac{gh^2}{2} \right) \quad (8)$$

この基礎式系の特異点は、 $p=0, q^2/h+gh^2/2=M_0$ を満たす点であって、共役関係を満たす二つの水深が特異点になることがわかる。特異点の条件を満たす波状状態が十分減衰した領域の水深を h_1 (図-2 の h_1 に対応) とし、この水深のまわりで基礎式を線形化して特異点を分類すれば、 $Fr_1^2=q^2/gh_1^3 < 1$ を考慮して次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{3D_m}{q} \right)^2 + 12 \left(1 - \frac{1}{Fr_1^2} \right) &> 0 : \quad \text{安定結節点} \\ &< 0 : \quad \text{安定渦状点} \end{aligned}$$

Whitham が指摘しているように、波状跳水是安定渦状点の領域に対応し、安定結節点の領域は D_m/q の値が非常に大きいことから、水理学的に無意味な領域と考えられる。安定渦状点のばあい、 h_1 に対する共役水深 h_0 より微小量大きい水深を初期条件として数値計算を行うと、図-3 に示したような波状を呈しながら h_1 に収束する水面形が得られる。すなわち、このモデルでは 3.1 の孤立波・クノイド波接続モデルの接続条件 (5) 式が自動的に組み込まれていることがわかる。また、図-3 中には (7) 式で静水圧分布を仮定した ((7) 式左辺第 3、4 項を無視した)

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{1}{D_m q} \left(q^2 + \frac{gh^3}{2} - M_0 h \right) \quad (9)$$

の計算結果も示した。共役水深の間で急激な水深変化が見られ、(9) 式を用いて強跳水状の不連続な水面形を再現できる可能性が示唆される。

3.3 両モデルによる波状跳水の特性量の比較

渦動粘性項を考慮したモデルを用いて、 $D_m/q, Fr_0$ をパラメータとして波状跳水の特性量を求め、孤立波・クノイド波接続モデルの (6) 式と比較したのが図-4~6 である。 $D_m/q=0.05$ のとき両者は適合していること、 L/h_0 におよぼす D_m/q の影響は小さいことがわかる (本研究では $D_m \propto q$ と仮定している)。

さらに、(6) 式と波状段波の特性量に関する Sandover・Zienkiewicz の実験結果を比較したのが図-7~9 である。図中の V は段波の first crest の伝播速度を表す。両者はほぼ適合し、3.1 および 3.2 に述べたモデルを用いて波状跳水、波状段波の領域の水面形が概ね再現できると考えられる。

4. 2点境界値問題としての水面形解析法

これまで波状跳水部の水面形の解析法について考察してきた。次に、図-1 に示したような上流・下流端で水深の

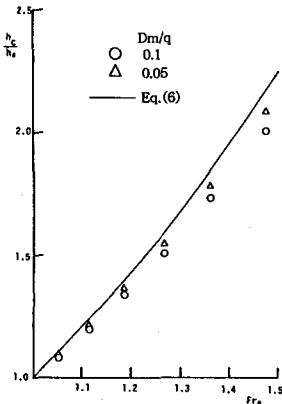


図-4 h_c と Fr_0 の関係

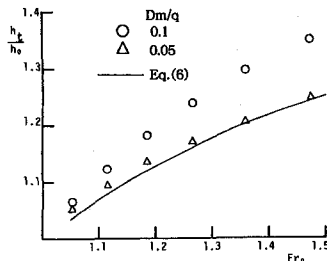


図-5 h_t と Fr_0 の関係

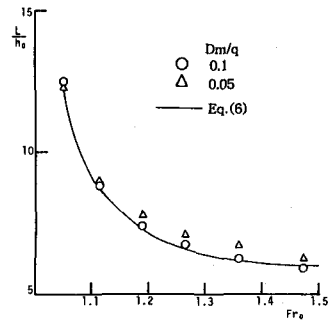


図-6 L と Fr_0 の関係

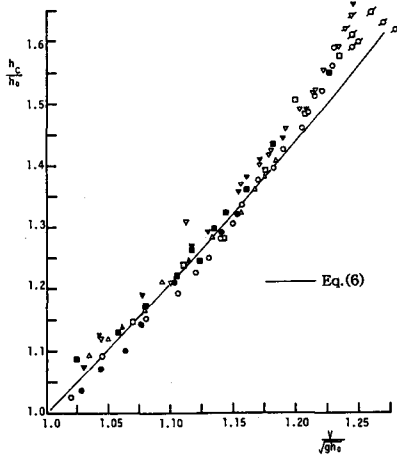


図-7 h_c と Fr_0 の関係
(Sandover・Zienkiewicz の実験との比較)

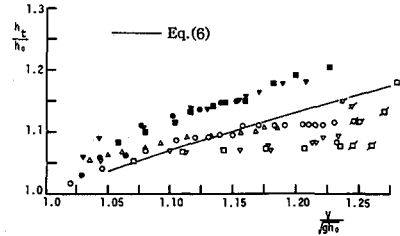


図-8 h_t と Fr_0 の関係

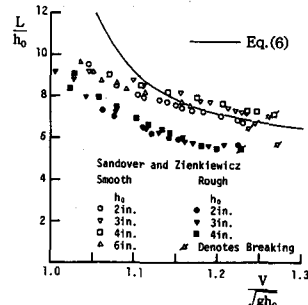


図-9 L と Fr_0 の関係

境界条件が与えられる場合の2点境界値問題としての水面形解析法について考察する。

4.1 線形解による水面形の構成

まず、(2) 式を等流水深 (h_1) のまわりで線形化した方程式の解を用いて、水面形の構成を考察する。

線形方程式を無次元表示すれば次式となる。

$$-\frac{Fr_1^2}{3} \frac{d^3 \eta}{d\sigma^3} - \alpha Fr_1^2 \frac{d^2 \eta}{d\sigma^2} - (1 - Fr_1^2) \frac{d\eta}{d\sigma} + 3f Fr_1^2 \eta = 0 \quad (10)$$

ここに、 η, σ, α, f は次式で定義される無次元量である。

$$\sigma = x/h_1, \eta = (h - h_1)/h_1, \alpha = D_m/q, \tau_b/\rho = fu^2 = f(q/h)^2$$

(10) 式の特性方程式は、次式で与えられる判別式 D が正のとき異なる三実根、負のとき一実根・二虚根をもつ。 α, f, Fr_1^2 をパラメータとして領域の区分を示したのが図-10 であり、一実根・二虚根の領域が本研究で対象としている領域である (三実根の領域は等流水深の周りで解が単調に変化し波状跳水に対応する振動解が得られない)。

$$D = -27(4P^3 + Q^2), \quad P = -(\alpha^2 + 1)Fr_1^2 + 1/Fr_1^2, \quad Q = -(9f - 2\alpha^3 - 3\alpha)Fr_1^2 + 3\alpha/Fr_1^2$$

一実根を λ_1 、二虚根を $\lambda_{2r} \pm i\lambda_{2i}$ とおくと、基本解は

$$\eta = A \exp(\lambda_1 \sigma) + B \exp(\lambda_{2r} \sigma) \cos(\lambda_{2i} \sigma) + C \exp(\lambda_{2r} \sigma) \sin(\lambda_{2i} \sigma) \quad (11)$$

と表われ、上流端 $x = 0$ および下流端 $x = L$ の三通りの境界条件

$$x = 0: h = h_a, \quad dh/dx = (dh/dx)_a, \quad x = L: h = h_b \quad (12)$$

により、定数 A, B および C が定められる。基礎式である (2) 式を用いる場合も、線形解と同一の境界条件のもとで水面形が計算されるはずであり、次にこの計算方法について考察する。

4.2 基礎式の離散化と収束計算

(2) 式を次のように書き換える。

$$\frac{1}{3} \frac{d^3 h}{dx^3} - \frac{2}{3h} \frac{dh}{dx} \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{1}{3h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^3 + \left(\frac{gh}{q^2} - \frac{1}{h^2} \right) \frac{dh}{dx} - \frac{\alpha}{h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{\alpha}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{gh \sin \theta}{q^2} + \frac{f}{h^2} = 0 \quad (13)$$

上式中 $dh/dx, d^2 h/dx^2$ および $d^3 h/dx^3$ を次のように離散化する。

$$i = 3 \sim N-2 : \quad \frac{dh}{dx} \approx \frac{-h_{i+2} + 8h_{i+1} - 8h_{i-1} + h_{i-2}}{12\Delta x} + \frac{h_{i+2} - 4h_{i+1} + 6h_i - 4h_{i-1} + h_{i-2}}{4\Delta x} \quad (\text{河村スキーム}),$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 h}{dx^2} \approx \frac{h_{i+1}-2h_i+h_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad \frac{d^3 h}{dx^3} \approx \frac{h_{i+1}-3h_i+3h_{i-1}-h_{i-2}}{\Delta x^3} \\
 i=2 & : \frac{dh}{dx} \approx \frac{h_{i+1}-h_{i-1}}{2\Delta x}, \quad \frac{d^2 h}{dx^2} \approx \frac{h_{i+1}-2h_i+h_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad \frac{d^3 h}{dx^3} \approx \frac{h_{i+2}-h_i+2(dh/dx)_a}{\Delta x^3} \\
 i=N-1 & : \frac{dh}{dx} \approx \frac{h_{i+1}-h_{i-1}}{2\Delta x}, \quad \frac{d^2 h}{dx^2} \approx \frac{h_{i+1}-2h_i+h_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad \frac{d^3 h}{dx^3} \approx \frac{h_{i+1}-3h_i+3h_{i-1}-h_{i-2}}{\Delta x^3}
 \end{aligned} \quad (14)$$

ここに、添字*i*は $x=i\Delta x$ の値であることを示し、*N*は下流端の格子番号を示す。上記の離散式を用いて境界条件(12)式のもとで計算を実行できる。次にこの収束計算の手順を示す。

まず収束計算の繰り返し回数*k*回目の水深 h_i^k を既知とする。 h_i^k を用いて評価した(14)式を(13)式に代入したときの誤差を er_i^k とし、*k*+1回目の h_i^{k+1} を次式で計算する。

$$h_i^{k+1} = h_i^k + \text{sig}(k) \cdot \omega \cdot er_i^k, \quad \text{sig}(k) = -1 \cdot \text{sig}(k-1) \text{ for } |er_i^k| \geq |er_i^{k-1}|, \quad \text{sig}(k) = \text{sig}(k-1) \text{ for } |er_i^k| < |er_i^{k-1}|$$

ω は収束のパラメータで試行錯誤的に決められる。この手順を h_i が収束するまで繰り返す。

上述した計算法を用いて波状跳水の水面形解析を行う前に、図-3に示した波状跳水から強跳水状の水面形への遷移の簡単なモデル化について考察する。

4.3 波状跳水から強跳水への遷移過程のモデル化

波状跳水は Fr_0 が1.0から1.5程度の範囲で生じ、 Fr_0 の増加とともに強跳水の状態に遷移していくことが知られている。(波状段波の場合は $Fr_0=1.25$ 付近で碎波しはじめるといわれている[5])。この遷移過程を、簡単に図-3に示した波状跳水の状態から不連続的な水面形状への遷移と考えるならば、基礎式の鉛直加速度項((13)式左辺第1~3項)に水面勾配をパラメータとした減衰関数を乗ずることによりある程度再現できるように考えられる。そこで、試みに孤立波解(3)式を微分して得られる dh/dx の式に $Fr_0=1.25$ を代入し、その最大値を限界勾配 $(dh/dx)_cr$ として、次式で定義される減衰関数を鉛直加速度項に乗じた。

$$f_{dump} = \exp\left[-\beta\left(\left|\frac{dh}{dx}\right| - \left|\frac{dh}{dx}\right|_{cr}\right)\right] \text{ for } \left|\frac{dh}{dx}\right| \geq \left|\frac{dh}{dx}\right|_{cr}, \quad f_{dump} = 1.0 \text{ for } \left|\frac{dh}{dx}\right| < \left|\frac{dh}{dx}\right|_{cr}$$

ここに、 $(dh/dx)_{cr}=0.225$ であり、 $\beta=2.0$ とした。

4.4 解析結果の考察

単位幅流量、上・下流端の水深と距離などの水理量を設定し、水路床勾配をパラメータとして水面形解析を行った。計算条件を表-1に示した。図-11には参考のため線形解を示し、計算結果の一例を図-12に示した。波状跳水の振幅が勾配の増加とともに一旦増幅した後減衰し、波状跳水から強跳水への遷移過程が定性的には再現されている。計算結果を用いて跳水のfirst crestの水深 hc と Fr_0 の関係を示したのが図-13(a)であり、図-13(b)にはIwasaの実験結果[3]を示した。 Fr_0 の増加にともなう hc の(6)式から(5)式への遷移が再現されている。

次に図-1に示した低下背水を伴う水面形に対して解析法を適用し、計算結果を実験結果と比較した。計算と実験の条件を表-2に示した。図-14が両者の比較であり、計算結果の波の減衰が若干早い両者はほぼ適合していると考えられる。

表-1 水面形解析の条件

q (cm ³ /s)	60.0
f	0.005
α	0.05
$\sin \theta$	1/225~1/2000
h_a (cm)	0.5 or 1.0
$(dh/dx)_c$	静水圧水面形 方程式より算出
h_b (cm)	等流水深
Δx (cm)	0.5
ω	0.03

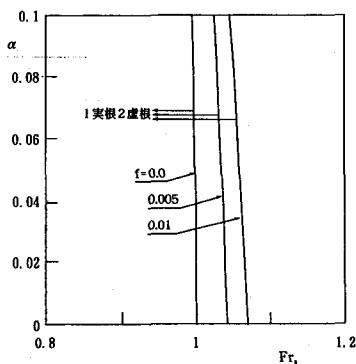


図-10 線形解の特性の分類

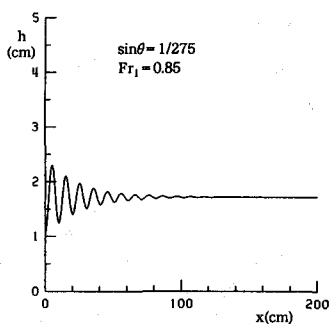


図-11 線形解による水面形

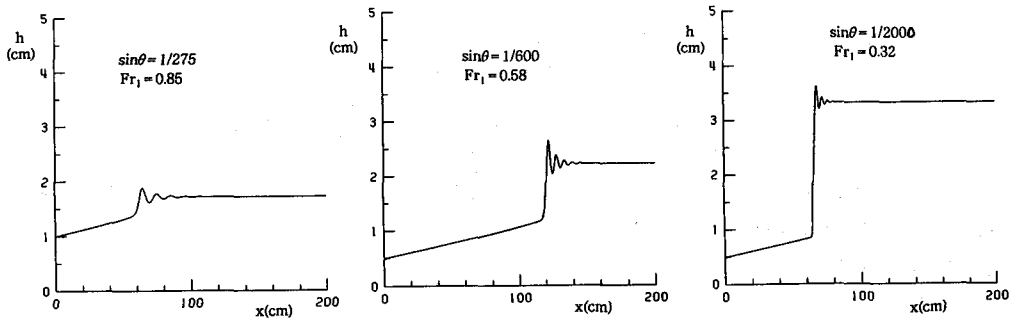
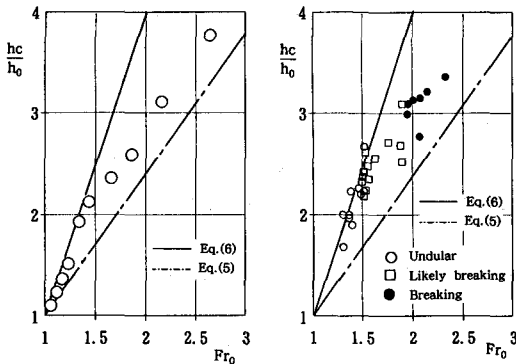


図-12 波状跳水から強跳水への遷移に着目した水面形解析



(a) 計算結果

(b) Iwasa の実験結果

図-13 hc と Fr_0 の関係

表-2 実験の水理諸量と計算の条件

	q (cm ² /s)	h (cm)	B (cm)	$\sin \theta$	f	Fr_1	Re
Exp.	57.9	1.92	10.0	1/400	0.0052	0.70	4400
	α	h_a (cm)	h_b (cm)	Δx (cm)	ω		
Cal.	0.05	1.1	1.72	0.5	0.03		

(dh/dx) は静水圧の水面形方程式から算出

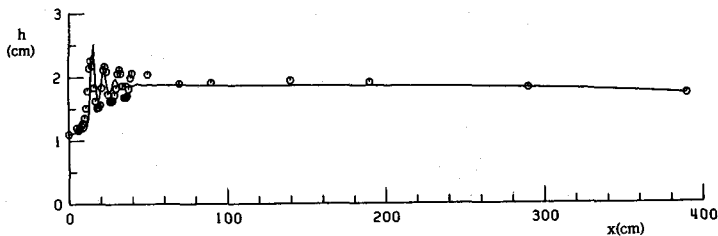


図-14 計算結果と実験結果の比較

5. おわりに

本研究は、鉛直加速度を考慮した基礎式系による水面形解析法について考察したものであって、上下流端境界条件を考慮した2点境界値問題としての解析法を提案した。さらに、波状跳水から強跳水への遷移過程の簡易モデルを導入した後水面形解析を行い実験結果と比較することにより解析法の妥当性を確認した。今後より多くの解析例を集積していきたい。

〔参考文献〕

- [1] Forchheimer, P.: Hydraulik, Teubner, Leipzig, 1930.
- [2] 例えば Iwasa, Y.: Memoirs Fac. of Eng., Kyoto Univ., Vol.17, No.4, pp.264 - 276, 1955.
- [3] Iwasa, Y.: Proc. 5th Japan National Congress for Applied Mech., pp.315 - 319, 1955.
- [4] Whitham, G.B.: LINEAR AND NONLINEAR WAVES, chap.13, JOHN WILEY and SONS, 1974.
- [5] Sandover, J.A. and Zienkiewicz: Water Power, Nov., pp.418 - 424, 1957.