

河川早瀬の不安定波に関する理論的研究

Theoretical study of unstable waves in the rapids of the river

京藤敏達*

by H. Kyotoh

The interesting phenomena of surface waves in the rapids of the river will be easily observed at the waterside. Particularly, it has been pointed out that only the periodic component of the waves generated at the rapids will propagate to the waterside of the down-stream pool. In order to elucidate their generating mechanisms, the simplified equations of motion, which involve the terms of the dispersion, Manning's resistance law and the eddy viscosity, are analysed by using perturbation methods and numerical calculations.

The linear and the nonlinear stability theory show that down-going waves become convectively unstable and their equilibrium amplitude does not exist at the low values of the roughness parameter. The critical Froude number Fr_c and the corresponding frequency and wavenumber of unstable waves are also determined as a function of the roughness parameter. In addition, it is revealed that the scaling of the KdV-type, which is the long-wave approximation, yields also the KdV equation, but its dispersion term comes from the eddy viscosity and its solution expresses the kinematic wave.

Furthermore, the waves induced by the bottom topography, whose slope is given by a sinusoidal or a step function, will be investigated numerically by spectral methods.

Keywords: the rapids, waves, bottom topography, perturbation methods

1. まえがき

河川水辺の水面波現象や都市の水空間の創出に際しての学問的な理解は、環境問題に対する興味の高まりとともに今後一層要求されることになると考えられる。同時に、これらに関わる現象は複雑であるが、人々の心に安らぎを与えるものである。例えば、河川早瀬で励起される水面波、噴水の水滴が水面を打つ際にできる水面変動、滝から落ちる流れなど研究テーマは多彩である。

本論文では、河川早瀬に生じる不安定波を非線形波動理論の観点から次の点に着目して調べる。

- (1) 非線形性、分散性、マニングの抵抗則、渦粘性が表面波の安定性にどう影響するか？
- (2) 波が流れに乗っている系では、外乱は絶対不安定ではなく移流型不安定となり下流に伝播するにつれ増幅する。そのような系で起きる現象の特徴は何か？
- (3) 底面変化や底面粗度によって水面変動がどのようになるか？

急勾配水路の転波列に関する過去の研究には、衝撃波条件を用い静水圧分布を仮定したもの^{1) 2)}、衝撃波条件の代わりに粘性項を導入したものがあるが³⁾、河川早瀬の波は波頂曲率が大きく静水圧分布とはならない。一方、液膜流に関しては低レイノルズ数流れであるためナビエ・ストークス方程式の厳密な解析が可能であり、精緻な実験も行われている⁴⁾。本論文では、上記(1)、(2)、(3)の疑問に答えるため、波の分散性および底面勾配の変化を考慮した方程式を用いた。

2. 基礎方程式

基礎方程式は水深方向に積分した質量および運動量の保存則である。

$$\text{連続の式} \quad \partial H / \partial t + \partial (UH) / \partial x = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動量の式} \quad \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x = -p_{xav} / \rho - g(n^2 U^2 / R^{4/3} - I) + \zeta_s \partial (H \partial U / \partial x) / \partial x \quad (2)$$

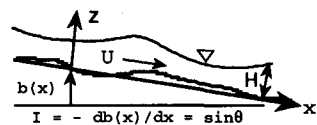


Fig.1 記号の説明
(I:底面勾配, U:流速, H:水深)

* 正会員 筑波大学講師 構造工学系 (〒305 つくば市天王台 1-1-1)

ここで、 t は時間、 x は流下方向にとった座標、 h は水深、 U は断面平均流速、 ρ は流体の密度、 p_{xav} は x 方向の圧力勾配の断面平均、 g は重力加速度、 n はマンニングの粗度係数、 R は径深、 I は底面勾配で $I = \sin\theta = -db(x)/dx$ 、(2)式右辺の最後の項は乱流による運動量の法線方向応力を拡散係数 ζ_s を使ってモデル化したものである。また、本論文では長方形の幅広水路を対象とし $R = H$ 、運動量補正係数を1とする。

とくに、運動量方程式に拡散項を導入した理由は、波の分散性を考慮し $\zeta_s = 0$ とするとすべての等流が不安定となり(式(11)参照)、実験結果を説明できないためである。その理論的根拠は明確ではないが、式(2)は等流状態でマンニングの抵抗則を満足している。拡散係数 ζ_s の値を概算するためSmagorinskyの渦粘性の式 $-u_i' u_j' = \nu_s S_{ij} - (2/3)\kappa$ 、 $\nu_s = C_s \Delta^2 |S_{ij}|$ を使う。ただし、 Δ は空間平均するセルの長さスケール、 $|S_{ij}|$ は剪断変形速度テンソルの大きさ、 κ は乱れエネルギー、 C_s は無次元係数である。水深方向に平均した方程式系では Δ として水深 h 、 $|S_{ij}|$ として Un/hn を用いれば、 $\nu_s \equiv C_s hnUn \equiv C_s q$ となる(q は単位幅流量)。無次元係数 C_s には様々な値が使われており、壁に囲まれた剪断流で0.003、繰り込み群理論を用いた理論値は0.0062である⁹⁾。本論文では、 $\zeta_s = C_s hnUn$ 、 $C_s = 0.003$ を用いるが、この値はオーダーとしては意味があるが正確なものではない。

さらに、河川早瀬の波は波頂曲率を無視できないため、圧力は静水圧とはならない。圧力勾配の平均 p_{xav} は定義にしたがって、 $p_{xav} = \int_0^H (\partial p / \partial x) dz / H$ とし、圧力 p は z 方向の運動方程式

$$\partial p / \partial z = -\rho(\partial w / \partial t + U \partial w / \partial x + w \partial w / \partial z) - \rho g \cos\theta \quad (3)$$

に鉛直流速 $w = z/H(\partial H / \partial t + U \partial H / \partial x)$ を代入して算出した⁹⁾。ここで、 w は非粘性流体の底面条件および表面の運動学的条件を満たすように決められている。

3. 線形解析

波の分散性を入れた方程式系(1)、(2)を使って等流の安定解析を行うと、渦粘性を考慮しないときはすべてのフルード数で等流は不安定となる。

3.1 線形安定性

底面勾配が一定の水路に等流状態の流れがあるとき、その安定性を調べる。解析を整理するために等流水深 h および等流流速 U を用いて次のような無次元化を行う。

$$H \rightarrow hn H, U \rightarrow Un U, x \rightarrow hn x, t \rightarrow t hn / (g hn)^{1/2} \quad (4)$$

以下、 H および U は上記で定義された無次元量である。すると、運動方程式は次のように整理される。

$$\text{afr } \partial H / \partial t + \partial(UH) / \partial x = 0 \quad (5)$$

$$\text{afr } \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x = -p_{xav} - Mn(U^2/H^{4/3} - 1) + C_s(\partial(H \partial U / \partial x) / \partial x / H) \quad (6)$$

ただし、

$$p_{xav} = \text{afr}^2 \int_0^H (\partial p / \partial x) dz / H \quad (6-1)$$

$$p = - \int_H^z (\text{afr}^{-1} \partial w / \partial t + \text{afr}^{-2} U \partial w / \partial x + \text{afr}^{-2} w \partial w / \partial z + 1) dz \quad (6-2)$$

また、上式に現れる無次元量 afr および Mn は

$$\text{afr} = 1/\text{Fr}, \text{Fr} = Un / (g hn)^{1/2}, Mn = g n^2 / hn^{1/3} \quad (7)$$

で定義される。ここで、底面勾配 I は一定で値が小さいとして $\cos\theta \approx 1$ を用いた。

さて、等流の線形安定性を調べるため、式(5)、(6)に

$$H = 1 + \varepsilon hf(t, x), U = 1 + \varepsilon Uf(t, x) \quad (8)$$

$$hf(t, x) = Ah \exp(i k x + r t), Uf(t, x) = AU \exp(i k x + r t) \quad (9)$$

を代入し、摂動パラメータ ε が小さいとして可解条件を求めると固有値方程式

$$\begin{aligned} k^2 - \text{afr}^2 k^2 + k^4/3 - (10i/3) k Mn - i k^3 C_s + (-2i \text{afr} k - 2i/3 \text{afr} k^3 \\ - 2\text{afr} Mn - \text{afr} k^2 C_s) r + (-\text{afr}^2 - \text{afr}^2 k^2/3) r^2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

を得る。ここで、 k は空間波数、 r は時間増幅を表すパラメータ、 i は虚数単位である。上式を r の2次方程式とみると、その2根はそれぞれ遡上波と流下波に対応し遡上波はすべてのフルード数のもとで減衰し、流下波は増幅率が0となる臨界点を持つ。すなわち、空間周期的な外乱の時間増幅率が0となる中立安定曲線の臨界点での各パラメータの値は以下になる。

$$afr_{cr} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \sqrt{\frac{Mn^2}{(2Mn - 3C_s)C_s}}, \quad k_{cr} = \sqrt{\frac{2Mn - 6C_s}{C_s}}, \quad Im[r] = -\frac{\frac{10}{3} k_{cr}^3 Mn}{2afr_{cr} Mn + afr_{cr}^2 k_{cr}^2 C_s} + \frac{k_{cr}^3 C_s}{afr_{cr}^2 C_s} \quad (11)$$

上式から臨界フルード数が存在するためには $Mn > 3C_s$ が必要であり、乱流拡散を考慮しない場合 ($C_s = 0$) にはすべてのフルード数で不安定になることが分かる。ここで述べた等流の安定性は転波の安定性と同等なものであり、従来の理論¹⁾²⁾³⁾と比べて波の分散性と渦粘性の効果が入っている点が異なっている。

3.2 絶対不安定・移流型不安定⁷⁾

さて、フルード数が臨界点を越えた領域で流下波が絶対不安定か移流型不安定かを調べよう。ここで、絶対不安定とは静止座標系の固定点から見て攪乱が増幅するとき、移流型不安定とは同様に観察したとき攪乱が流れていってしまい固定点では増幅せず下流で増幅する場合を言う。式(10)から、流下波の分散関係式は

$$r(k) = \{-6i afr k - 2i afr k^3 - 6afr Mn - 3afr k^2 C_s + (-36afr^4 k^2 - 12afr^4 k^4 - 48i afr^2 k Mn - 16i afr^2 k^3 Mn + 36afr^2 Mn^2 + 36afr^2 k^2 Mn C_s + 9afr^2 k^4 C_s^2)^{1/2}\} / \{2afr^2 (3 + k^2)\} \quad (12)$$

で与えられる。臨界点を僅かに越えた領域で、 $r(k)$ の実数部 $Re[r(k)]$ を二次曲線で近似し、虚数部 $Im[r(k)]$ を一次曲線で近似すると

$$Re[r(k)] = -\alpha(k - k_0)^2 + \beta, \quad Im[r(k)] = a + b k \quad (13)$$

と置くことができる。不安定領域では $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 流下波の場合には $b < 0$ である。 $t = 0$ で $x = 0$ に δ -関数で局在した外乱の $x = C t$ における時間発展は次の積分で評価することができる。

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikCt + r(k)t) dk = \{\pi(\alpha t)\}^{1/2} \exp\{(\beta - (b+C)^2/(4\alpha))t + i\{a + (b+C)k_0\}t\} / (2\pi) \quad (14)$$

十分時間が経過したあとに外乱が成長するためには、

$$\beta - (b + C)^2 / (4\alpha) > 0 \quad (15)$$

が必要である。 $C = 0$ で上式が成立すれば絶対不安定、成立しなければ移流型不安定である。この論文で示すパラメータ領域では移流型不安定となることが、式(12)を式(13)の関数形に数値的に近似することによって確かめられる。

4. 非線形安定性理論

4.1 ランダウ方程式

線形段階で不安定となったモードは振幅が増大し、非線形項と釣り合うようになる。弱非線形理論を用いてこの現象を解析する。まず、フルード数が臨界値から僅かに大きくなったとき、線形理論で求めた不安定モードの長時間発展を調べる。よく知られているように、この場合には緩やかな時間スケールの変化率と振幅の3次のオーダの項が釣り合うため、解を以下のように仮定することができる。

$$\begin{aligned} H &= 1 + \varepsilon hf_1(t, x) + \varepsilon^2/2 hf_2(t, x) + \varepsilon^3/3! hf_3(t, x) + O(\varepsilon^4) \\ U &= 1 + \varepsilon Uf_1(t, x) + \varepsilon^2/2 Uf_2(t, x) + \varepsilon^3/3! Uf_3(t, x) + O(\varepsilon^4) \\ Fr &= Fr_{cr} + \varepsilon^2 Fr_1, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t \\ hf_1(t, x) &= Ah_1(t_1, t_2) e^{ikx - is t} + Ah_1^*(t_1, t_2) e^{-ikx + is t} \\ Uf_1(t, x) &= AU_1(t_1, t_2) e^{ikx - is t} + AU_1^*(t_1, t_2) e^{-ikx + is t} \\ hf_2(t, x) &= hf_{20}(t_1, t_2) + Ah_{22}(t_1, t_2) e^{2ikx - 2is t} + Ah_{22}^*(t_1, t_2) e^{-2ikx + 2is t} \\ Uf_2(t, x) &= Uf_{20}(t_1, t_2) + AU_{22}(t_1, t_2) e^{2ikx - 2is t} + AU_{22}^*(t_1, t_2) e^{-2ikx + 2is t} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、上付き添字の ‘*’ は複素共役をとることを意味し、 $s = -Im[r(k_{cr})]$, $k = k_{cr}$ である。2次オーダの解 $hf_2(t, x)$, $Uf_2(t, x)$ に一般解が考慮されていないのは、3次オーダの解を求める際の可解条件にこの一般解が関与しないためである。まず、方程式(5), (6)に上記の摂動解を代入すると各オーダの方程式は、主部

が同じで外力項 F_{C_n} , F_{m_n} を持った同型の方程式となる。

$$\begin{aligned} & \partial h f_n / \partial x + \partial h f_n / \partial t / Fr_{cr} + \partial U f_n / \partial x = F_{C_n} \\ & Mn(-4hf_n/3 + 2Uf_n) + \partial h f_n / \partial x / Fr_{cr}^2 + \partial U f_n / \partial x - C_s \partial^2 U f_n / \partial x^2 + \partial U f_n / \partial t / Fr_{cr} \\ & + (\partial h f_n / \partial x^3 + 2\partial^3 h f_n / \partial t \partial x^2 / Fr_{cr} + \partial^3 h f_n / \partial x \partial t^2 / Fr_{cr}^2) / 3 = F_{m_n} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (17)$$

上記の方程式が有界な解を持つ条件, すなわち微分方程式の可解条件は

$$i k F_{m_n} - F_{C_n}(2Mn + i k + k^2 C_s - i s / Fr_{cr}) = 0 \quad (18)$$

で与えられる。最終的に3次オーダーの方程式の可解条件からランダウ方程式が得られることがわかっているため, 以下の記号処理はすべて数式処理ソフト(Mathematica)を用いて行ない, ここでは摂動計算の結果を整理して述べる。

<1次オーダーの解> 式(17), (18)で外力項が0のとき, 連続の式から

$$AU_1 = Ah_1 / \{(-i k) / (i k - i s / Fr_{cr})\} \quad (19)$$

また, 運動量の式(6)は分散関係式からすでに満たされている。

<2次オーダーの解> まず, 可解条件から

$$\partial Ah_1 / \partial t_1 = 0, \quad \partial AU_1 / \partial t_1 = 0. \quad (20)$$

定数項 $U f_{20}, h f_{20}$ を決定する際に連続の式が恒等的に満たされているため, 付加的条件が必要である。ここでは摂動の際に時間平均流量が変わらないとした。

<3次オーダーの解> 2次オーダーの方程式の可解条件から振幅の t_1 スケールの変化率が0になることが分ったが, 同様に3次オーダーの方程式の可解条件から振幅の t_2 スケールの変化率が得られ, ランダウ方程式

$$\partial Ah_1 / \partial t_2 = a_1 Ah_1 + a_2 Ah_1^2 Ah_1^* \quad (21)$$

となる。係数 a_1 および a_2 については5.1節で議論する。

4.2 KdV方程式

KdV方程式と同じスケールリングをすれば, マニングの抵抗則のもとでもKdV方程式が得られることを示す。まず, 多重スケールの摂動法を用いて解を以下のように仮定する。

$$\begin{aligned} H &= 1 + \varepsilon^2 h f(t, x), \quad U = 1 + \varepsilon^2 U f(t, x), \quad Fr = Fr_{cr} + \varepsilon^2 Fr_1, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \quad t_3 = \varepsilon^3 t, \quad x_1 = \varepsilon x \\ h f(t, x) &= Ah_0(x_1, t_1, t_2, t_3) + \varepsilon Ah_1(x_1, t_1, t_2, t_3) + \varepsilon^2/2 Ah_2(x_1, t_1, t_2, t_3) + \varepsilon^3/3! Ah_3(x_1, t_1, t_2, t_3) \\ U f(t, x) &= AU_0(x_1, t_1, t_2, t_3) + \varepsilon AU_1(x_1, t_1, t_2, t_3) + \varepsilon^2/2 AU_2(x_1, t_1, t_2, t_3) + \varepsilon^3/3! AU_3(x_1, t_1, t_2, t_3) \end{aligned} \quad (22)$$

各オーダーの方程式はすべて同型であり, 次式のように書くことができる。

$$6\partial Ah_n / \partial t_1 / Fr_{cr} + 6\partial AU_n / \partial x_1 + 6\partial Ah_n / \partial x_1 = F_{C_n}, \quad Mn(4AU_n - 8Ah_n/3) = F_{m_n} \quad (23)$$

先程と同様に有界な解が存在するための可解条件は,

$$F_{C_n} - 3\partial F_{m_n} / \partial x_1 / (2Mn) = 0 \quad (24)$$

で与えられる。

<0次オーダーの解> 流下方向に伝播するkinematic waveとなる。

$$AU_0 - 2Ah_0/3 = 0, \quad \partial Ah_0 / \partial t_1 + (5Fr_{cr}/3) \partial Ah_0 / \partial x_1 = 0 \quad (25)$$

<1次オーダーの解> 可解条件は,

$$\partial Ah_0 / \partial t_2 + \{Fr_{cr}/(6Mn) - 3/(8Fr_{cr} Mn)\} \partial^2 Ah_0 / \partial x_1^2 = 0 \quad (26)$$

であるから $Ah_0(x_1, t_1, t_2, t_3)$ が有界な解を与えるには, $Fr_{cr} = 1.5$, すなわち $Mn = 3C_s$ が必要である。このとき, 可解条件は

$$\partial Ah_0 / \partial t_2 = 0 \quad (27)$$

となる。結果的に外力項は0となり, $Ah_1=0$, $AU_1=0$ と置くことができる。

<2次オーダーの解> 可解条件はKdV方程式

$$\partial AU_0 / \partial t_3 + (5/3)Fr_1 \partial Ah_0 / \partial x_1 + (9/5)Ah_0 \partial Ah_0 / \partial x_1 + (1/10) \partial^3 Ah_0 / \partial x_1^3 = 0 \quad (28)$$

を与える。ここで, $Fr_{cr} = 3/2$, $Mn = 3C_s$ を用いた。このKdV方程式は高粘性流体の表面波の方程式と同様なものであり, ポテンシャル流中の水面波と比較すると以下の点が異なっている。

・時間微分項は運動学的条件式から出ており, kinematic waveである。

・分散項が乱流拡散項から出ている。

さらに、緩やかな底面変化がある場合には、底面形状を $z = b(x)$ と置くと

$$I = -db(x)/dx = I_0 - \epsilon^4 bx(x_1) \quad (29)$$

ここで、 $bx(x_1)$ は一定勾配からのずれであり、KdV方程式の各項と釣り合うように ϵ^4 のオーダーの項となっている。さて、運動量の方程式にこの項を付加して摂動計算をすると外力項を持ったKdV方程式が得られる。

$$\partial Ah_0 / \partial t_3 + (5/3) Fr_1 \partial Ah_0 / \partial x_1 + (9/5) Ah_0 \partial Ah_0 / \partial x_1 + (1/10) \partial^3 Ah_0 / \partial x_1^3 = (9/20) (d^2 b / dx_1^2) / I_0 \quad (30)$$

上記の方程式は、ポテンシャル流中を外乱が移動するときに引き起こされる水面波の方程式と外力項の入り方が異なっていることに注意を要する。また、乱流状態にある河川では遡上波ではなく流下波が不安定となりソリトンを生成すると考えられ、物体の移動によって造波されるソリトンと異なることに注意する⁸⁾。

5. 2次の非線形偏微分方程式によるシミュレーション

等流解からのずれを波形勾配の2次のオーダーまで考慮した方程式を用いて、底面変化がある場合に生成される水面波を数値的に調べる。2次のオーダーまでの精度をもつ方程式は3次のオーダーの誤差を許容しており変調不安定については議論できないが、フルード数が臨界値よりも小さい流れが底面変化によって受ける影響を調べることはできる。実際の早瀬では平均流速から計算したフルード数が0.5ぐらいでも底面からの外乱によって水面波が生じており⁹⁾、底面変化によって波動が生成・伝播しているものと考えられる。

5.1 近似方程式の非線形安定解析

基礎方程式(5)、(6)を次の3段階に分けて近似した。

- (A) 基礎方程式(5)、(6)に式(8)を代入し ϵ の2次までのオーダーの項をとる。
- (B) 運動量方程式の分散項に現れる時間微分項を連続式を使って消去し、2次までのオーダーの項をとる。
- (C) (A)で得られた運動量方程式を陽的に解くため非線形項に入った時間微係数に運動量方程式の線形の関係式

$$\partial Uf(t, x) / \partial t = -[3afr - afr \partial^2]^{-1} \{ 3 \partial Uf(t, x) / \partial x - \partial^3 Uf(t, x) / \partial x^3 + 3afr^2 \partial hf(t, x) / \partial t + 6Mn Uf(t, x) - 4Mn hf(t, x) - 3C_g \partial^2 Uf(t, x) / \partial x^2 \} + O(\epsilon^2) \quad (31)$$

を代入し、運動量方程式を $Uf(t, x)$ の陽的な時間発展方程式で近似する。ただし、 $[3afr - afr \partial^2]^{-1}$ は積分作用素である。これらの近似を通して波形勾配の2次のオーダーの精度は変わらないことに注意する。

上記(A),(B)の近似によって方程式の性質がどのように変わるかを非線形安定解析を行って調べた。Fig.2は $C_g = 0.003$, $Fr = (1+0.1) Fr_c$ のときのランダウ方程式の平衡振幅をプロットしたものである。

4章の非線形安定性理論から、粗度に関するパラメータ Mn が増加するにつれて臨界フルード数は減少し平衡振幅も減少することがわかる。この非線形安定解析は Mn が0.012より小さくなると平衡振幅

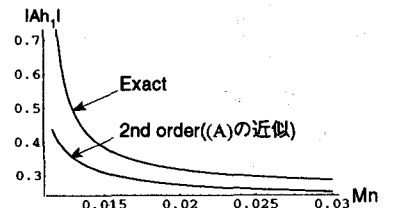


Fig.2 非線形安定性理論による平衡振幅

が発散するため適用できない。さて、上記(A)の近似を行うと、このパラメータの範囲内では平衡振幅が小さくなるが大きな差異は現れていない。ところが、上記(B)の近似を行うと、もはや平衡振幅は存在せず、ランダウ方程式は有限時間で発散する解のみを与える。一般に、ランダウ方程式が有限の解を与えない原因として、(i)基礎方程式がそのような解を持つ、(ii)振幅が臨界値を越えたところで非線形安定性理論は適用できない、ことなどが考えられるが、臨界値を越えたフルード数領域での数値計算では(C)の近似方程式の解は発散した。

5.2 底面変化があるときの水面形

底面勾配がステップ状もしくは空間周期的に変化するときの水面形を次の点に着目して検討する。

- ・定常流の水面形がフルード数によってどのように変化するか。
- ・初期値 $hf(t, x) = 0$, $Uf(t, x) = 0$ から出発すると定常解に収束する場合と底面変化によって波が誘起される場合がある。誘起される波の性質を適当なフルード数およびマニングの係数のもとで数値的に調べる。
- ・底面勾配がステップ状に変化し線形安定領域と線形不安定領域が交互に繰り返すとき、底面変化によって誘起された攪乱が不安定領域では増幅し安定領域では減衰する。この現象は移流型不安定のときに意味を持

ち、攪乱の振幅が有限となる解が存在する。

・底面勾配がステップ状に変化するときの水面形を解析的に調べる。

5.2.1 定常流の水面形

まず底面勾配が一定値 I_0 から僅かにずれて単振動しているとして、式(29)の底面勾配を表す式で

$$bx(x) = a_g I_0 \cos(k_b x), \quad I_0 = Mn Fr^2 \quad (32)$$

と置く。 a_g が小さいとしてその2次のオーダーまでの解を求めると以下ようになる。

$$H = 1 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2/2 h_2, \quad U = 1/H$$

$$h_1 = Ah \exp(ik_b x) + Ah^* \exp(-ik_b x), \quad h_2 = Ag_0 + Ag_2 \exp(2ik_b x) + Ag_2^* \exp(-2ik_b x)$$

$$Ah = \frac{3afr^2 a_g}{2(3ik_b - 3iafr^2 k_b + ik_b^3 + 10Mn + 3k_b^2 C_s)}$$

$$Ag_0 = \frac{2Ah Ah^* (65Mn + 9k_b^2 C_s)}{15Mn}, \quad Ag_2 = \frac{Ah^2 (27ik_b + 9ik_b^3 + 65Mn + 27k_b^2 C_s)}{3(3ik_b - 3iafr^2 k_b + 4ik_b^3 + 5Mn + 6k_b^2 C_s)} \quad (33)$$

ただし、摂動に際して流量が一定となるように空間定数項を決めた。さて、第一近似の解を使って底面変動と水位変動の位相差を求め、水面形を定性的に調べる。底面の位相を0とすると水位の位相 ϕ_s は、

$$\phi_s = \phi + \pi/2, \quad \tan \phi = k_b(-3 + 3afr^2 - k_b^2)/(10Mn + 3k_b^2 C_s) \quad (34)$$

で与えられる。Bresseの式では、 $\phi_s = 0$ のとき射流、 $\phi_s = \pi$ のとき常流となるため、その臨界点として $\phi = 0$ をとると式(33)より

$$k_b^2 = 3(1 - Fr^2)/Fr^2 \quad (35)$$

である。底面形と水面形の位相差は k_b やフルード数によって連続的に変わるため定常流の水面形で常流・射流を明確に区別することはできない。

とくに底面形が様々なスペクトルの合成で表され、それらの振幅が同じで $a_g = a k_b$ となると、水面の増幅率(定在波振幅 a)の最大値を与える波数 k_b が存在する。河川早瀬の定在波の波長とこの k_b の間には何らかの相関があると考えられる。

5.2.2 数値実験

底面勾配が一定ではなく変化するとき、表面波が生成される場合と定常流の水面形に時間とともに漸近する場合とがある。ここでは、底面変動の波長を底面が平らなときの不安定波の波長に固定し、粗度に関係するパラメータ Mn およびフルード数 Fr の値によって水面波にどのような差異が現れるかを調べた。

さらに、底面勾配がステップ状に変化し安定領域と不安定領域が交互に繰り返されるときの攪乱の伝播を数値的に検討した。攪乱は安定領域で減衰し不安定領域で増幅するが、流れが移流型不安定であるため不安定領域の存在は攪乱の非線形増幅を必ずしも意味しない。また、計算は解を空間フーリエ級数展開し、その係数の時間発展をルンゲ・クッタ法で求めた。

5.2.2.1 底面勾配が空間周期的に変化するとき

計算条件をTable 1に示す。底面変動の波数は、 Mn および C_s を固定したときの水面の不安定波の臨界波数 k_{cr} とした。また、底面勾配の変動の最大振幅は平均勾配 $I_0 = Mn Fr^2$ の a_g 倍とした。さらに、空間モードの数 N は収束性が保たれるように選んである。

	Mn	Fr/Fr_{cr}	I_0	a_g	波長(k_b)	N	f_1 (漕上波)	f_2 (流下波)	f_0 (数値計算)
Case1-1	0.0091	0.4	0.0033	4.0	24.3	12	0.01598	-0.06529	定常流
Case1-2	0.0091	0.8	0.0131	0.3	24.3	12	-0.00868	-0.08994	定常流
Case2-1	0.015	0.4	0.0045	5.0	3.2	12	0.03334	-0.38342	-0.1
Case2-2	0.015	0.8	0.0181	5.0	3.2	12	-0.14170	-0.55846	-0.6
Case3-1	0.02	0.4	0.0050	1.0	2.3	12	0.01626	-0.44820	-0.025
Case3-2	0.02	0.8	0.0201	5.0	2.3	12	-0.19971	-0.66417	-0.8

Table 1 底面が空間周期的に単振動するときの数値計算の計算条件

(I_0 :水路の平均勾配, a_g :変動勾配の最大値/ I_0 , N :空間モード数, f_1, f_2 :線形理論から計算した振動数, f_0 :数値計算結果から読み取った振動数)

Fig.3.1, 3.2 3.3, 3.4の(a),(b),(c),(d),(e),(f)は、(a)流速変動の空間平均の時間発展、(b)水位の空間波形の時間発展

展, (c) 水位変動の1次の空間モードの時間発展と (e) 対応するスペクトル, 同じく (d) 水位変動の2次の空間モードの時間発展と (f) 対応するスペクトルを示したものである. 流速の空間平均値 $Uf^{(0)}$ が時間的に変動する理由は, 運動量方程式が保存形ではないためである. Case 3-1, Case 3-2 すなわち $Mn=0.02$ の場合の空間平均流速は時間変動が激しく安定状態が存在しないように思われる (Fig.3.3(a), Fig.3.4(a)). Case 2, Case 3 ともに, 水面波は振幅を変化させながら下流に伝播している (Fig.3.1(b) ~ Fig.3.4(b)). また, $Fr=0.8Fr_{cr}$ のときには, 水面波の振動数は線形理論の予測値 f_0 に近い値をとる (Table 1).

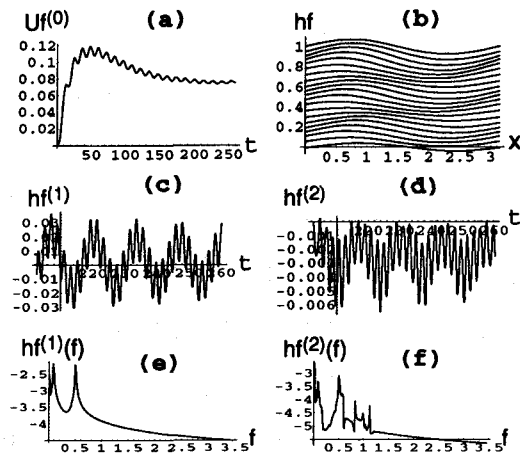


Fig.3.1 Case2-1 の計算結果 ($Mn=0.015, Fr=0.4Fr_{cr}, L=L_{cr}$)

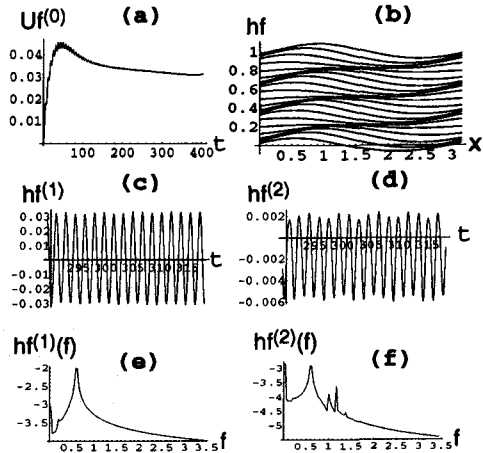


Fig.3.2 Case2-2 の計算結果 ($Mn=0.015, Fr=0.8Fr_{cr}, L=L_{cr}$)

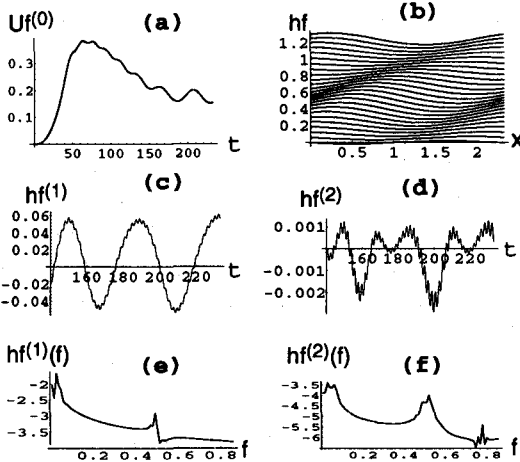


Fig.3.3 Case3-1 の計算結果 ($Mn=0.02, Fr=0.4Fr_{cr}, L=L_{cr}$)

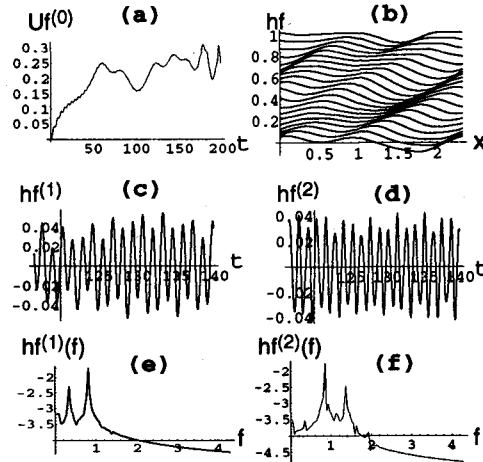


Fig.3.4 Case3-2 の計算結果 ($Mn=0.02, Fr=0.8Fr_{cr}, L=L_{cr}$)

Fig.3.1, 3.2, 3.3, 3.4 底面勾配の変化によって誘起される波動: $b(x) = a_e I_0 \cos(k_{cr} x)$

(a) 流速変動の空間平均の時間発展, (b) 水位の空間波形の時間発展, (c) 水位変動の1次の空間モードの時間発展と (e) 対応するスペクトル, 同じく (d) 水位変動の2次の空間モードの時間発展と (f) 対応するスペクトル ($Uf^{(0)}$: 流速変動の空間フーリエ成分の第0次項, t : 時間, x : 水深で無次元化した距離, hf : 水位変動, $hf^{(1)}, hf^{(2)}$: 水位変動の空間フーリエ成分の第1次項および2次項, f : 振動数, $hf^{(1)}(f), hf^{(2)}(f)$: $hf^{(1)}, hf^{(2)}$ の時間振動数 f の成分の振幅. ただし, スペクトルの大きさは常用対数で表示してある.)

5.2.2.2 底面勾配がステップ状に変化するとき

河川早瀬の水面波が移流型不安定であることから, 水面波が不安定となる勾配が一部存在しても流れ場が線形不安定となるとは限らない. ここでは, 安定勾配と不安定勾配が交互に繰り返す様水路の水面波の数値計算結果について述べる. 数値実験ケースは Table 2 の通りである. ここで Fr_0 は平均勾配から計算したフルード数, L_{cr} は臨界フルード数のときの波長である.

Case B は不安定勾配を含んだ斜面であり, 斜面長は不安定波長の50倍であるから50番目の空間モードを中心

に線形不安定が起きていると予想される。Fig. 4.1, 4.2で $hf^{(1-39)}$ は空間モード m が1から39まで、 $hf^{(40-60)}$

は40から60までを合成した

水位の時間変化をプロットしたものである。Fig. 4.2から攪乱が流下方向に伝播していることがわかる。

6. まとめ

分散性および渦粘性を考慮した転波の発生条件を線形安定解析から求め、さらに外乱が増幅したときの平衡振幅を非線

形安定性理論を使って検討した。その結果、粗度パラメータ Mn が小さいときは平衡振幅は存在せず外乱の振幅は増大する。

次に、底面変化によって誘起される波動は、本数値実験の範囲内では、フルード数が臨界値に近いとき($Fr=0.8Fr_{cr}$)は、線形安定性理論から予測される流下波の振動数で振動し、フルード数が臨界値よりかなり小さいとき($Fr=0.4Fr_{cr}$)は、それよりも大きくはずれた低振動数で振動する。また、水深に比べて底面変化の波長が大きくなると波動は誘起されず定在波となる。これらの結果を理論的に導くことが重要である。

また、河川の流れが移流型不安定であることを示し、底面勾配がステップ状に変化する場合の折点で生成される攪乱の伝播を数値的に調べた。攪乱は、臨界フルード数を越えた領域で増幅し臨界フルード数よりも小さい領域で減衰するため、結果的に平衡振幅が存在する。このことは理論的にも検証することができる。

謝辞

本研究は、河川環境管理整備財団「魚にやさしい川づくり」の助成研究の一部として行われたものであることを付記いたします。

参考文献

- (1) Dressler, R. F.: Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels, Comm. Pure Appl. Math., V, 2, pp. 149-194, 1949.
- (2) 岩佐義明: 開水路水流の不安定境界について, 土木学会誌 40-6, pp. 297-303, 1955.
- (3) Needham, D. J. and J.H. Merkin: On roll waves down an open inclined channel, Proc. R. Soc. Lond., A394, pp.259-278, 1984.
- (4) Liu, J. D.P. Jonathan and J.P. Gollub: Measurements of the primary instabilities of film flows, JFluid Mech., V250, pp. 69-101, 1993.
- (5) Yakhot, V. and S.A. Orszag: Renormalization group analysis of turbulence, J. Scientific Computing, V.1, N.1, pp. 3-51, 1986.
- (6) 林 泰造: 水の波, 応用水理学上, p.164, 本間 仁編, 丸善, 1957.
- (7) Huerre, P. and P. A. Monkewitz: Local and global instabilities in spatially developing flows, Annu. Rev. Fluid Mech., V.22, pp. 473-537, 1990.
- (8) Wu, T. Y.: Generation of upstream-advancing solitons by moving disturbances, JFluid Mech., V.184, pp. 75-99, 1987.
- (9) 福島雅紀, 京藤敏達: 河川の流体力学的観察, 第48回土木学会年講概要集, pp.480-481, 1993.

	Mn	Fr_0/Fr_{cr}	波長/ L_{cr}	平均の底面勾配	平均勾配からのずれ	N	外力項の空間モードの数
Case A	0.02	0.8	50	0.02009	± 0.0006800	125	100
Case B	0.02	1.0	50	0.03139	± 0.001062	125	100

Table 2 底面が空間周期的にステップ状に変化するときの数値計算の計算条件

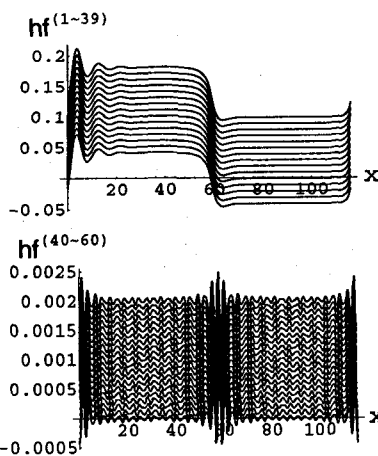


Fig.4.1 CaseA の計算結果($Mn=0.02, Fr=0.8Fr_{cr}, L=50L_{cr}$)

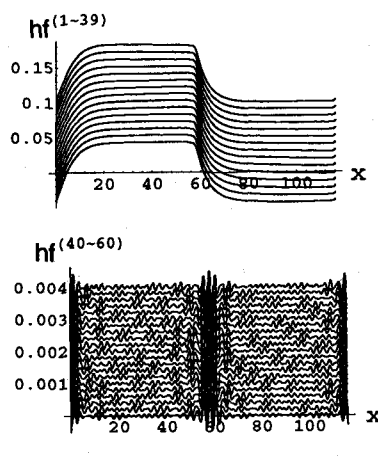


Fig.4.2 CaseB の計算結果($Mn=0.02, Fr=Fr_{cr}, L=50L_{cr}$)

Fig.4.1, 4.2 底面勾配の変化によって誘起される波動: $b(x) = \sum_{m=1}^{m=100} a_m I_0 \cos(m k_{cr} x / 50)$

($hf^{(1-39)}$: 空間フーリエ・モードの1から39までの和, $hf^{(40-60)}$: 同じく40から60までの和, a_m : 底面がステップ状になるように決める係数)