

# 低Reynolds数乱流モデルを用いた、 水・底泥界面での物質移動の解析

Near-bed turbulence and mass transfer at the sediment-water interface

中村由行\*・御子神学\*\*

By Yoshiyuki NAKAMURA, Manabu MIKOGAMI

A near-wall turbulence model is applied to the benthic boundary layer to analyze the diffusive transfer of dissolved substance across the sediment-water interface. A modified turbulent kinetic energy balance is used to define eddy viscosity and eddy diffusivity in the viscous sublayer. The limiting behavior of turbulence quantities very near the bed is expressed as a power of  $z$ , the distance from the sediment-water interface. The predicted flux rate over a wide range of the Schmidt number and dissolved oxygen concentration profile near the bed are in good agreement with observations using microelectrodes.

**Keywords:** benthic boundary layer, smooth bed, mass transfer, near-wall turbulence modeling, dissolved oxygen

## 1. 序

静止条件に比較して、水が流動状態にある場合には水・底泥界面での溶存物質の移動速度が一桁程度も大きくなることが広く知られている。底泥による酸素消費速度(SOD)はその好例である<sup>1),2),3),4)</sup>。これは、物質移動の事実上の抵抗となる濃度が急変する層、つまり濃度境界層が界面直上に形成されるためであると考えられている。底泥表面が水理学的に滑らかであれば、粘性底層が形成され、そこでは粘性の作用により乱れは極く小さいものに抑えられる。界面近傍での物質輸送も分子拡散が支配することが示唆される。そのような場では、界面での物質移動フラックスは濃度勾配と分子拡散係数の積で表わすことができる。流速(乱れ)の大小により濃度境界層の厚さ、ひいては濃度勾配の大きさが変化するため、水理条件がフラックスを支配する事になる。

以上の説明は、実験室での管路内物質移動については広く支持されてきたが、実水域における水・底泥界面においても、最近、同様のことが確認され始めた。後述する様に濃度境界層の厚さは極く薄く、測定は非常に困難であった。しかしながら、近年の微小電極の開発によって、微細な濃度分布が測定できる様になった<sup>5),6)</sup>。この電極は溶存酸素(DO)濃度の場合には、10-100  $\mu\text{m}$ 程度の高い空間分解能を持ち、実水域における水・底泥境界層の存在が報告されている。

一方、近年の乱流モデルの中には、粘性底層も含めた壁面近傍の乱れ構造を表現し得るものが提案されている。その中では低レイノルズ数  $k-\epsilon$  モデルが代表的なものである<sup>7),8),9)</sup>。そこで、本研究では低レイノル

\* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部建設都市工学科

\*\* 学生員 九州大学大学院工学研究科修士課程水工土木学専攻

(〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)

ズ数乱流モデルの考え方を導入し、水・底泥界面での物質移動速度や濃度分布に関する一般的なモデル化を試みる。本モデルの結果は底質への溶存酸素の移行(SOD)による底層水の貧酸素化の加速現象、プランクトン異常増殖につながる内部負荷源であるリンの溶出量や、地球温暖化ガス溶出量の予測等に広く応用できるものである。

## 2. 水・底泥界面での乱流構造と物質輸送のモデル化

### 2.1 底面近傍でのエネルギー収支

拡散によって輸送される物質の濃度分布、及び流速分布を考えよう。簡単のために、底面は水理学的滑面であるとし、定常で一般的な乱流境界層の界面のごく近傍の現象を対象とする。そこでは剪断力 $\tau$ は一定であり、かつ、物質の反応による生成・消失が無視し得るものとすれば物質のフラックス $J$ も一定と見なすことができる。従って、 $J$ 及び $\tau$ は

$$J = -(D + K_z) \frac{\partial C}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = u_*^2 = (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2)$$

と書くことができる。ここで $D$ 、 $K_z$ は分子及び乱流拡散係数、 $v$ 、 $v_t$ は動粘性係数及び渦動粘性係数、 $C$ は物質の濃度、 $U$ は流速、 $\rho$ は水の密度、 $z$ は界面を原点に鉛直上向きにとった軸、 $u_*$ は摩擦速度である(図-1参照)。

(1)及び(2)式において、問題となるのは $K_z$ 及び $v_t$ の評価である。近年の乱流モデルの発展によって乱流構造を直接反映したモデル化が可能となっており、その代表的なものは $k$ - $\epsilon$ モデルである。しかしながら、物質の濃度分布は壁面のごく近傍において急激に変化し、そこでは標準の $k$ - $\epsilon$ モデルでは現象を説明できず、粘性底層内も含めた壁面近傍の乱流構造を再現できるようなモデル-低レイノルズ数モデルがよりふさわしい。低レイノルズ数モデルにも幾つかのモデルが提案されており、代表的なものはPatelら<sup>7)</sup>によりまとめられているが、ここでは最近のモデル化の成功例としてNagano & Hishida<sup>8)</sup>によるモデルを取り上げる。

彼らによれば乱流エネルギー $k$ 及びエネルギー散逸量 $\epsilon$ の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right] - \overline{u'w'} \frac{\partial U}{\partial z} - \epsilon + D_k = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right] - C_{\epsilon 1} f_1 \frac{\epsilon}{k} \overline{u'w'} \frac{\partial U}{\partial z} - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} + E = 0 \quad (4)$$

で与えられ、 $v_t$ と $k$ 及び $\epsilon$ の間には

$$v_t = -\overline{u'w'} / \frac{\partial U}{\partial z} = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5)$$

という関係がある。ここで $\sigma_k$ 、 $\sigma_\epsilon$ 、 $C_{\epsilon 1}$ 、 $C_{\epsilon 2}$ 、 $C_\mu$ はモデル定数、 $D_k$ 、 $E$ は低レイノルズ数乱流モデル特有の付加項であり(表-1参照)、Nagano & Hishida<sup>8)</sup>は

$$D_k = -2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial z} \right)^2 \quad (6)$$

$$E = \nu \cdot v_t (1 - f_\mu) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)^2 \quad (7)$$

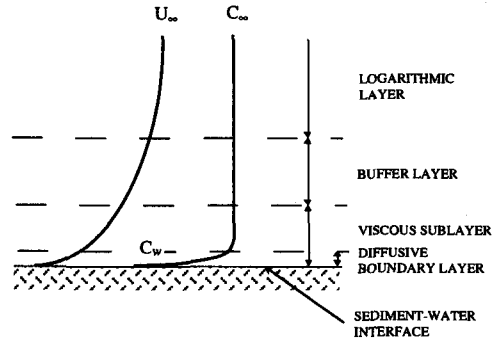


図-1 底泥直上の流速及び溶質の濃度分布の概念図

表-1. 低レイノルズ数乱流モデル<sup>8)</sup>のモデル定数と付加項

|                   |                                                             |
|-------------------|-------------------------------------------------------------|
| $C_\mu$           | 0.09                                                        |
| $C_{\epsilon 1}$  | 1.45                                                        |
| $C_{\epsilon 2}$  | 1.9                                                         |
| $\sigma_k$        | 1.0                                                         |
| $\sigma_\epsilon$ | 1.3                                                         |
| $f_\mu$           | $\{1 - \exp(-z_+ / 26.5)\}^2$                               |
| $f_1$             | 1.0                                                         |
| $f_2$             | $1 - 0.3 \exp(-z_+^2)$                                      |
| $D_k$             | $-2\nu (\partial \sqrt{k} / \partial z)^2$                  |
| $E$               | $\nu \cdot v_t (1 - f_\mu) (\partial^2 U / \partial z^2)^2$ |

を与えている。また、 $f_1$ 、 $f_2$ 、及び $f_\mu$ は付加係数であり、それぞれ表-1及び以下の式の様に与えられる。

$$f_\mu = \{1 - \exp(-z_+ / A_\mu)\}^2, \quad A_\mu = 26.5 \quad (8)$$

但し

$$z_+ \equiv u \cdot z / v \quad (9)$$

我々の主要な関心は壁面のごく近傍にあるので、 $z \rightarrow 0$  ( $z_+ \rightarrow 0$ ) における $k$ や $\varepsilon$ の挙動を求められればよい。そのためには、式(3)及び式(4)を直接解く必要はなく $k$ 方程式(3)の各項のバランスを考慮できれば十分である。何故ならば、 $\varepsilon$ 方程式中の各項の係数は物理的根拠がやや希薄であり、かつ、壁面近傍では $k$ 方程式と整合性がとれる様に定数が決められているにすぎない為である。従って、低レイノルズ数モデルは二方程式モデルであるが、本研究においては $k$ 方程式の収支のみを考える。以上の点を考慮し、本解析においては、 $z \rightarrow 0$ において、 $k$ 及び $\varepsilon$ が $z$ のべき乗で変化し、流速分布は直線分布であると仮定し、

$$k \rightarrow a^2 z^n \quad \varepsilon \rightarrow b z^m \quad \partial U / \partial z \rightarrow u^2 / v \quad (10)$$

の様におく。そうすると、 $v_1$ 及び $D_\varepsilon$ はそれぞれ

$$v_1 \rightarrow \frac{a^4 C_\mu u^2 z^{2n-m+2}}{b A_\mu^2 v^2} \quad D_\varepsilon \rightarrow -\frac{a^2 v n^2}{2} z^{n-2} \quad f_\mu \rightarrow \frac{(z_+)^2}{A_\mu} = \frac{u^2 z^2}{A_\mu^2 v^2} \quad (11)$$

と表わせる。式(10)及び式(11)を式(1)に代入すると、壁面近傍での乱流エネルギーのつりあい式は以下の様に変形できる。

$$a^2 v n(n-1) z^{n-2} + \frac{a^6 C_\mu u^2 n(3n-m-1)}{b \sigma_k A_\mu^2 v^2} z^{3n-m} + \frac{a^4 C_\mu u^6}{b A_\mu^2 v^4} z^{2n-m} = b z^m + \frac{a^2 v n^2}{2} z^{n-2} \quad (12)$$

式(12)が任意の $z$ について成り立つ条件は、

$$a^2 v n(n-1) z^{n-2} = \frac{a^2 v n^2}{2} z^{n-2} \quad (13)$$

かつ

$$\frac{a^6 C_\mu u^2 n(3n-m-1)}{b \sigma_k A_\mu^2 v^2} z^{3n-m} + \frac{a^4 C_\mu u^6}{b A_\mu^2 v^4} z^{2n-m+2} = b z^m \quad (14)$$

が $z$ の恒等式となることである。両式において、べき指数及び係数が等しくならなければならないから、

$$n=2, m=3 \quad (15)$$

かつ

$$\frac{8a^6 C_\mu u^2}{\sigma_k} + \frac{a^4 C_\mu u^6}{v^2} = A_\mu^2 v^2 b^2 \quad (16)$$

が成り立つ。式(14)の結果を用い見通しをよくする為に、 $k$ 及び $\varepsilon$ を次のように無次元化してみよう。

$$k_+ \equiv \frac{k}{u^2} = \left( \frac{v a}{u^2} \right)^2 \left( \frac{u z}{v} \right)^2 = z_+^2 a_+^2 \quad (17)$$

$$\varepsilon_+ \equiv \frac{v \varepsilon}{u^4} = \left( \frac{v b}{u^4} \right) \left( \frac{u z}{v} \right)^3 = z_+^3 b_+ \quad (18)$$

$v_1$ についても式(15)を式(11)に代入することにより、無次元化された $v_{1+}$ が

$$v_{1+} \equiv \frac{v_1}{v} = \frac{C_\mu a_+^4}{A_\mu^2 b_+} z_+^3 = A_+ z_+^3 \quad (19)$$

と表わされる。式(16)を変形すると

$$\frac{a_+^4}{b_+} = \frac{a_+^2 A_\mu}{\sqrt{C_\mu (8a_+^2 + 1)}} \quad (16')$$

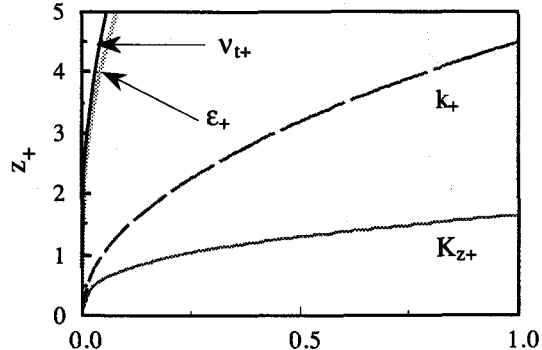


図-2 壁面近傍における乱流特性量の分布

が成り立つから、式(19)において、 $A_+$ は

$$A_+ = \frac{a_+^2}{A_\mu} \sqrt{\frac{C_\mu}{8a_+^2 + 1}} \quad (20)$$

と表わすことができる。Nagano & Hisida<sup>9)</sup>によれば  $A_\mu = 26.5$ 、 $\sigma_k = 2.0$ 、 $C_\mu = 0.09$  である。さらに、Patel<sup>7)</sup>によれば  $a_+^2 = 0.05$  であるから、これらの値を式(20)に代入して

$$v_{t+} = (0.078 z_+)^3 = \left(\frac{z_+}{12.8}\right)^3 \quad (21)$$

が成り立つ。Schubauer<sup>10)</sup>やPatel<sup>7)</sup>は

$$v_{t+} \approx \left(\frac{z_+}{11}\right)^3$$

Lin<sup>11)</sup>は  $z_+ \leq 5$  において

$$v_{t+} \approx \left(\frac{z_+}{14.5}\right)^3$$

を与えており、本モデルによる係数は二つの係数値の間である。また、Chapman & Kuhn<sup>12)</sup>は理論的に  $v_{t+} \propto z_+^3$  の関係を導いている。さらに、 $b_+$ の値を求め式(18)に代入すると

$$\varepsilon_+ = \left(\frac{z_+}{11.4}\right)^3 \quad (22)$$

となり、 $v_{t+}$ と $\varepsilon_+$ は $z_+$ に関して相似な分布となる。

これら乱流特性量の粘性底層内における鉛直分布を描いたのが図-2である。但し、図中において $K_{z+}$ は

$$K_{z+} \equiv \frac{K_z}{D} = Sc \cdot v_{t+} \quad (23)$$

で与えられる。 $z_+ = 5$  における  $v_{t+} = 0.06 \ll 1$  であるから、平均流速については乱流粘性の影響は無視できるが、 $K_{z+}$ は $z_+ \geq 1.61$  において1以上の値となり、分子拡散が支配的な領域は壁面の極く薄い部分に限られる。

## 2.2 壁面（水・底泥界面）での物質移動速度

以上の解析により壁面近傍での $v_t$ の分布が式(19)（または式(21)）により与えられた。この結果をもとに、界面での物質移動フラックス $J$ を求めてみよう。壁面及び壁面から十分離れた場所における物質の濃度 $C_w$ 、 $C_\infty$ を用いて濃度 $C$ 、及びフラックス $J$ を無次元化する（図-1参照）。

$$C_+ \equiv \frac{C(z) - C_w}{C_\infty - C_w} \quad (24)$$

$$J_+ \equiv \frac{J}{u_* (C_\infty - C_w)} \quad (25)$$

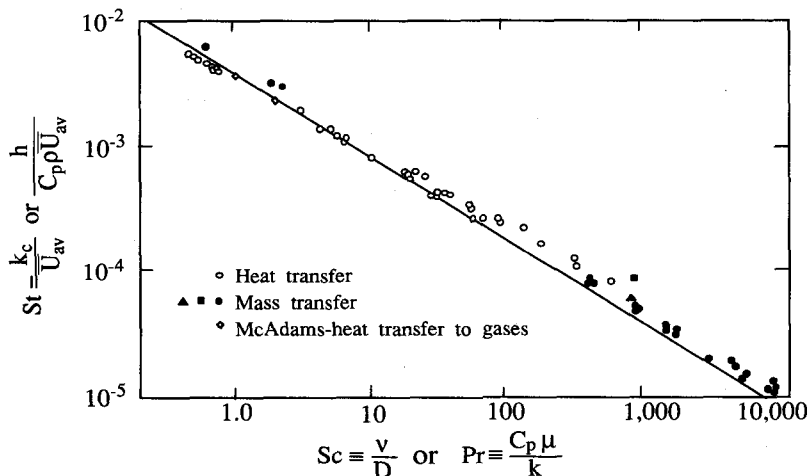


図-3 円管内乱流場における物質移動速度の実験値<sup>10)</sup>とモデルによる計算値（式(28)）の比較

両式を基礎式(1)に代入して変形すると

$$J_+ = - \left( \frac{1}{Sc} + \frac{v_{tz}}{Sc_t} \right) \frac{\partial C_+}{\partial z_+} \quad (26)$$

が成り立つ。ここで、 $Sc$  及び  $Sc_t$  はシュミット数、乱流シュミット数であり、

$$Sc \equiv \frac{\nu}{D}, \quad Sc_t \equiv \frac{\nu_t}{K_z} \quad (27)$$

で定義される。 $Sc_t = 1.0$  とおき、 $v_{tz}$  に式(21)を用い、 $z_+$  について 0 から  $\infty$  まで積分すると、フラックスを与える式が

$$J_+ = \frac{J}{u_* (C_\infty - C_w)} = -0.0645 Sc^{-2/3} \quad (28)$$

と求められる。また、任意の高さにおける濃度  $C_+$  は

$$C_+ = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \ln \left\{ \frac{z_+ + (Sc A_+)^{-1/3}}{z_+^3 + (Sc A_+)^{-1}} \right\}^3 + \frac{3}{2\pi} \arctan \frac{2(Sc A_+)^{-1/3} z_+ - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \quad (29)$$

で与えられる。

式(28)は平滑な円管や平板における物質移動速度を与える式であり、 $Sc$  数をプラントル数  $Pr (= C_p \mu / k, k$  は熱伝達係数、 $C_p$  は比熱)に置き換えれば、壁面での熱伝達にも直ちに適用できる。広い範囲のシュミット数 ( $Pr$  数)での円管内乱流場の実験値<sup>13)</sup>と比較したのが図-3であり、理論式(28)は幅広く適用できる式であることが分かる。

濃度分布を示す式(29)をグラフに表わしたものが図-4である。図は、 $Sc = 500$  (20℃における水中の酸素分子)の場合の計算例である。これより、濃度が急変する領域はほとんど粘性底層内部に限定されることが分かる。ちなみに、濃度境界層の厚さ  $\delta_c$  を

$$\delta_c \equiv \frac{D (C_\infty - C_w)}{-J} = \frac{D}{k_c} \quad (30)$$

と定義し、さらに、無次元化表示をすると、式(27)より

$$\delta_{c+} \equiv \frac{u_* \delta_c}{\nu} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} (Sc A_+)^{-1/3} \quad (31)$$

が成り立つ。 $Sc = 500$  の時、 $\delta_{c+} = 1.95$  となり、これは壁面での無次元濃度勾配の逆数に等しい (図-4 参照)。

### 3. 実水域における適用 一水・底泥界面での酸素移動フラックス(SOD)と溶存酸素(DO)濃度分布

壁面近傍に乱れが関与しない薄い分子拡散の層を考慮するというアイデアは、境膜理論として物質移動論の中で大きな役割を果たしてきた。その分子拡散層は、図-4に示した様に非常に薄いため、概念的なモデルとしての性格が強い。本モデルは、乱流構造に立ち入った解析から移動速度を求めたもので、より精細な物理的基礎を持つものであり、応用範囲も広い。しかも近年、空間分解能の高い微小酸素電極が開発され、実水域において盛んにDOの精密な濃度分布が測定されるようになった。このため、本モデルで導かれた濃度分布則を実測によって検証することが可能

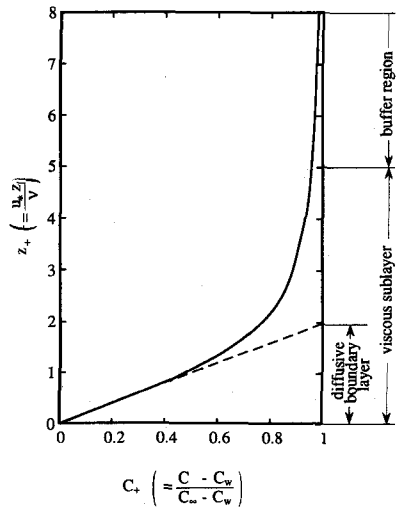


図-4 無次元鉛直濃度分布の解析解 (式(29))

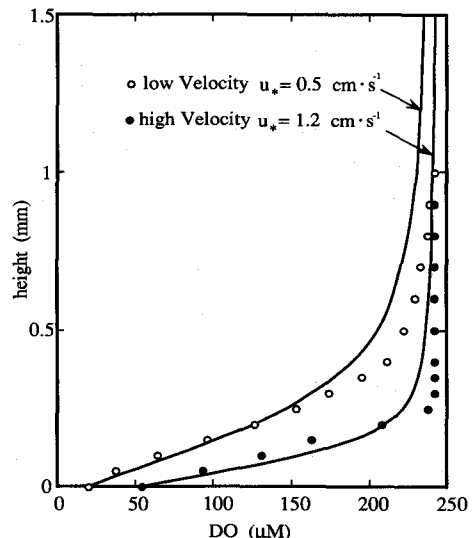


図-5 微小電極を用いた溶存酸素濃度分布実測値<sup>13)</sup>とモデルによる計算値の比較

になってきている。例えば、Joergensen & Revsbech<sup>5)</sup> はデンマーク沿岸海域の未攪乱底泥を実験室に持ち帰り、水槽内で流速の条件を数段階に変えて、DOの鉛直濃度分布を測定してゐる。図-5は、水理学的滑面で計測された測定結果の一例である。底面直上において濃度境界層が形成され、高流速条件では境界層の厚さが減少し、底質へのフラックスは逆に増加する様子が捉えられている。彼らの実験結果を理論式(29)と比較したものが図-5である。但し、計算にあたっては界面及び十分遠方での実測の濃度を与え、 $Sc = 500$ とした。彼らの実験において水理条件は明確でないため（高流速条件では10 - 20 cm/sの流速、低流速では1 - 2 cm/s）、摩擦速度は実験値に適合する値を選んだ。そのため、厳密な比較はできないが、計算による分布は実測の分布をよく説明しているものと考えられる。

#### 4. 結論

低レイノルズ数乱流モデルにおける、壁面近傍での乱流エネルギー収支を解析し、無次元の乱れエネルギー $k_t$ 、渦動粘性係数 $\nu_t$ が無次元高さ $z_t$ のそれぞれ2乗及び3乗に比例する形で表現できた。その結果を壁面での物質移動速度の解析に用い、物質のフラックス $J$ が $Sc$ 数の $-3/4$ 乗で表わされることを見いだした。以上の解析結果を応用し、水・底泥界面直上での溶存酸素の濃度分布と界面におけるフラックスを求めた。計算結果は微小電極を用いた測定値をよく説明し実水域への適用性が確認された。モデルの結果は、水理学的滑らかな界面に対して適用できる。粗面に対しては別のモデルが必要となる。

#### 参考文献

- 1) 細井由彦, 村上仁士, 上月康則: 底泥による酸素消費に関する研究, 土木学会論文集, No.456/ II-21, pp.83-92, 1992.
- 2) 中村由行: 底層の酸素消費過程における濃度境界層の役割, 水環境学会誌, 第16巻, pp.732-741, 1993.
- 3) Dade, W.B.: Near-bed turbulence and hydrodynamic control of diffusional mass transfer at the sea floor: *Limnology and Oceanography*, Vol.38, pp.52-69, 1993
- 4) Nakamura, Y. and Stefan, H.G.: Effect of flow velocity on sediment oxygen demand: Theory: *J. Envir., Engn., ASCE* (accepted), 1993.
- 5) Joergensen, B.B. and Revsbech, N.P.: Diffusive boundary layers and the oxygen uptake of sediment and detritus: *Limnology and Oceanography*, Vol.30, pp.111-122, 1985.
- 6) Joergensen, B.B. and DesMarais, D.J.: The diffusive boundary layer of sediments: Oxygen microgradients over a microbial mat: *Limnology and Oceanography*, Vol.35, pp.1343-1355, 1990
- 7) Patel, V.C., Rodi, W. and Scheuerer, G.: Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: A Review: *AIAA J.*, Vol.23, pp.1308-1319, 1984.
- 8) Nagano, Y. and Hishida, M.: Improved form of the  $k-\epsilon$  model for wall turbulent shear flows: *J. Fluids Eng., Trans. ASME*, Vol.109, pp.156-160, 1987.
- 9) Svensson, U. and Rahm, L.: Modeling the near-bottom region of the benthic boundary layer: *J. Geophys. Res.*, Vol.93, pp.6909-6915, 1988.
- 10) Sherwood, T.K., Pigford, R.L. and Wilke, C.R.: *Mass Transfer*, McGraw Hill, 1975.
- 11) Lin, C.S., Moulton, R.W. and Putnam, G.L.: Mass transfer between solid wall and fluid stream: *Ind. Eng. Chem.*, Vol.45, pp.636-640, 1953.
- 12) Chapman, D. and Kuhn, G.: The limiting behavior of turbulence near a wall: *J. Fluid Mech.*, Vol.170, pp.265-292, 1986.
- 13) Schubauer, G.B.: Turbulent processes as observed in boundary layer and pipe: *J. Applied Physics*, Vol.25, pp.188-196, 1954.