

密度成層を考慮した山地流域における風場の解析

Analysis of Wind Field Considering the Effects of Stratified Atmosphere in Mountainous Area

山田 正¹, 日比野忠史², 深和岳人³, 中津川誠⁴

By Tadashi YAMADA, Tadashi HIBINO, Gakuto FUKAWA and Makoto NAKATSUGAWA

A new analytical method of wind field considering stratified atmosphere is presented. The analytical solutions of wind u, v and w were obtained by using the perturbation method and double Fourier Transform for the basic equations. The solutions can be applied for arbitrary topography of basins in meso- β scale. The results of analysis show following characteristics. 1) Ascending wind is suppressed by stratification effects of atmosphere comparing with potential flow. 2) In the case of the range of mountain, it is shown that blocking appears in the case of less than the critical internal Froude number. 3) In the case of internal Froude number sufficiently larger than the critical number, the solution approaches asymptotically the one for potential flow.

Key words: Stratified Atmosphere, Wind Field, Lee Wave, Fourier Transform, Internal Froude Number

1. はじめに

近年、洪水予測のためのインプットデータとして降雨予測が盛んに行われるようになり、気象力学的なモデルを用いた解析が行われている。この解析に用いる風場の解析には実測値を内挿する Mascon model やコリオリ力を考慮した Kao model が提案されている。また近年、中北(1992)^[8]らはレーダによる降雨場の逆解析から風場の求める手法を提案している。一方流域スケール(meso- β scale)では降雨場は一般に地上1000m以上であることが多いため、下端境界(地上)における粘性効果や渦の影響は小さいと考え、著者らはポテンシャルフローモデル^[7]を提案している。しかし著者らの解析では密度成層を考慮していないために実際の大気の運動の性質を十分に表現し切れていないと言え難い。密度成層を考慮すると内部重力波やそれにとまう Lee 波さらにはブロッキングなどの複雑な現象が起こるため解析は一般に複雑なものとなる。ところで Long(1955)^[3]に始まった Lee 波の研究は G.D.Crapper(1969)^[2]や Umeki & Kanbe(1989)^[1]らにより厳密解を求めるために数学的に非常に複雑な解析が数多く行われており、成層効果を考慮した孤立峰周りの風場の解析を行うために数々の数学的手法を用いて、厳密な解析解を求めている。ところがこれらの研究では下端境界条件を厳密に考慮にしているために解析解を求めるためには数式で表された単純な地形にしか適用することができない。本研究ではこの下端境界条件を考慮に入れる際に、地形が平均値からの微小振幅であると考え波数成分に分解することにより、実地形に適用できる密度成層を考慮にいたした風場の解析解を求めている。

2. 基礎式の導出

本研究では非粘性圧縮性流体の定常流を取り扱う。流れ場は図2のように定義し考慮する変数(圧力、密度、温度、風速)は平均場の非摂動項 $\bar{p}, \bar{\rho}, \bar{T}, \mathbf{V}(U(z), 0, 0)$ と地形による摂動項 $p, \rho, T, \mathbf{v}(u, v, w)$ の和で表す。ただし $\bar{p}, \bar{\rho}, \bar{T}$ は z のみの関数であるとする。基礎方程式は Euler の運動方程式、連続の式、熱量保存の式を考える。これらの式で摂動項の2次以上の項を無視し、Oseen 近似を行うと基礎方程式は次のようになる。

¹正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112 文京区春日1-13-27)

²正会員 中央大学技術員 理工学部土木工学科 (〒112 文京区春日1-13-27)

³学生員 中央大学大学院 理工学研究科土木工学専攻 (〒112 文京区春日1-13-27)

⁴正会員 工修 開発土木研究所研究員 水工部環境研究室 (〒062 札幌市豊平区平岸1条3丁目)

$$\bar{\rho}U \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\rho}w \frac{dU}{dz} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad x \text{ 方向の運動方程式 (1)}$$

$$\bar{\rho}U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad y \text{ 方向の運動方程式, (2)}$$

$$\bar{\rho}U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad z \text{ 方向の運動方程式 (3)}$$

$$U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \bar{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + w \frac{d\bar{\rho}}{dz} = 0 \quad \text{連続式 (4)}$$

$$U \frac{\partial p}{\partial x} + w \frac{d\bar{p}}{dz} = c^2 \left(U \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{d\bar{\rho}}{dz} \right) \quad \text{熱量保存の式 (5)}$$

(5) は鉛直質量フラックス $q = \bar{\rho}w$ を用いて次のように書き換えることができる。

$$U \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{U}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{N^2}{g} q \quad (6)$$

$$\text{ここで} \quad c^2 = \gamma \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}, \quad N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz} - \frac{g^2}{c^2}$$

c は音速, N は Brünt-Väisälä の振動数, $\gamma = c_p/c_v$, c_p : 定圧比熱, c_v : 定積比熱 である。

次に運動方程式の発散を取り、(4) を用いて u, v を消去すると

$$-U^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + 2\bar{\rho} \frac{dU}{dz} \frac{\partial w}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) - g \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (7)$$

(3) と (6) を用いて p_{zz}, ρ_{xx} を消去し、 w を q で表現すると

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = U \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial z} + \frac{U}{g} N^2 \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{dU}{dz} \quad (8)$$

また (3) と (6) から ρ_x を消去すると

$$U^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + N^2 q = -U \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} - g \frac{U}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9)$$

今後は未知数 p, q のみの (8), (9) を基礎式として解析を行う。次に摂動項 f について次式で示される x, y 2 次元のフーリエ変換を行う。

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi, \eta, z) \exp(i\xi x + i\eta y) d\xi d\eta \quad (10)$$

(8), (9) に対し (10) を適用すると

$$[-(\xi^2 + \eta^2) + M^2 \xi^2] \bar{p} = i\xi U (\bar{q}_z + \frac{N^2}{g} \bar{q}) - i\xi U_z \bar{q} \quad \text{ここで} \quad M = U/c: \text{マッハ数} \quad (11)$$

$$(-\xi^2 U^2 + N^2) \bar{q} = -i\xi U (\bar{p}_z + \frac{g}{c^2} \bar{p}) \quad (12)$$

(11) 式は $c \cong 300 \text{ m/s}$, $U \cong 10 \text{ m/s}$ とすると $M \ll 1$ より次のようにできる。

$$\bar{p} = -\frac{i\xi U}{K^2} \left[\bar{q}_z + \left(\frac{N^2}{g} - \frac{U_z}{U} \right) \bar{q} \right] \quad \text{ここで} \quad K^2 = (\xi^2 + \eta^2) \quad (13)$$

以下の計算においては等温大気 ($\bar{T}(z) = \bar{T} = \text{const.}$) を扱い、密度、圧力に関しては通常大気を考慮して次式のように表す。

$$\frac{\bar{p}(z)}{\bar{p}(0)} = \frac{\bar{\rho}(z)}{\bar{\rho}(0)} = \exp(-\alpha z) \quad \text{ここで} \quad \alpha = 1/H_0 \quad (H_0 \text{ はスケールハイト}) \quad (14)$$

また以下のために次のように α, N, c を定義しておく。

$$\alpha = \frac{g}{RT}, \quad N^2 = \frac{(\gamma - 1)g^2}{c^2}, \quad c^2 = \gamma R \bar{T} \quad \text{ここで} \quad R: \text{気体定数} \quad (15)$$

次に今回の計算では接地境界層を考えない様風速を取り扱い $U(z) = U = \text{const.}$ とすると、(12), (13) 式より p を消去して、

$$\bar{q}_{zz} + \alpha \bar{q}_z - \left\{ \frac{K^2}{\xi^2} (k_0^2 - \xi^2) + \frac{N^2}{c^2} \right\} \bar{q} = 0 \quad \text{ここで} \quad k_0 = N/U \quad (16)$$

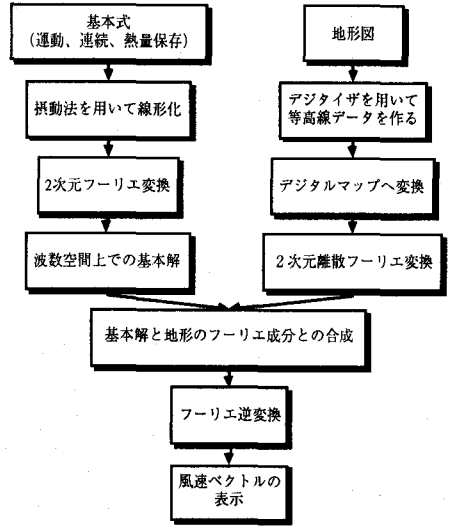


図-1 解析の流れ

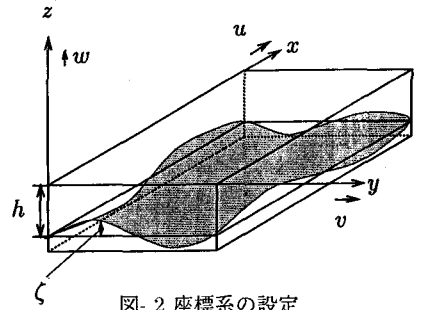


図-2 座標系の設定

を得る。(15) より $N^2/c^2 = (\gamma - 1)g^2/c^4 \ll 1$ であるのでこれを見捨てる、(14) と $\bar{q} = \bar{\rho}\bar{w}$ より鉛直風速の摂動項 $\bar{w}$ に関して次式を得る。

$$\bar{w}_{zz} - \alpha\bar{w}_z - \frac{K^2}{\xi^2}(\xi^2 - k_0^2)\bar{w} = 0 \quad (17)$$

u, v のフーリエ成分 $\bar{u}, \bar{v}$ については (1), (2), (13) より

$$\bar{u} = \frac{i\xi}{K^2}[\bar{w}_z + (\frac{N^2}{g} - \alpha)\bar{w}] \quad , \quad \bar{v} = \frac{i\eta}{K^2}[\bar{w}_z + (\frac{N^2}{g} - \alpha)\bar{w}] \quad (18), (19)$$

を得る。なおここまでの取扱については Umeki & Kanbe(1989) と全く同じものである。

3. 境界条件の導入

前節で求められた (17) は線形微分方程式であるために、 C_1, C_2 を比例係数として解の形を次のようにおける。

$$\bar{w} = C_1 \exp(\lambda_1 z) + C_2 \exp(\lambda_2 z) \quad \text{ここで} \quad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4K^2(1 - k_0^2/\xi^2)}\} \quad (20)$$

上端及び下端の境界条件を次のように与える。

$$w = 0 \text{ at } z = 0, \quad w = U \frac{\partial \zeta}{\partial x} \text{ at } z = -h \quad \text{ここで} \quad \zeta: \text{地形の流域平均標高からの変動量} \quad (21)$$

本研究ではデジタルマップ化された地形に対してこれを流域平均標高からの微小振幅と考え、2重離散フーリエ変換を用いて波数成分 $\tilde{\zeta}$ に分解すると、波数空間上では次のような下端境界条件を適用することになる。

$$\bar{w} = 0 \text{ at } z = 0, \quad \bar{w} = i\xi U \tilde{\zeta} \text{ at } z = -h \quad (22)$$

これにより C_1, C_2 が決まる。次に求められた波数空間上での解析解をフーリエ逆変換することによって最終的な物理空間上での風速の摂動成分が求められる。

$$u = U \exp\{\frac{1}{2}\alpha(z+h)\} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2 \tilde{\zeta}(\xi, \eta)}{K^2} \left[\frac{\sqrt{B} \cosh(\frac{1}{2}z\sqrt{B})}{2 \sinh(\frac{1}{2}h\sqrt{B})} + (\frac{N^2}{g} - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sinh(\frac{1}{2}z\sqrt{B})}{\sinh(\frac{1}{2}h\sqrt{B})} \right] \exp(i\xi x + i\eta y) d\xi d\eta \quad (23)$$

$$v = U \exp\{\frac{1}{2}\alpha(z+h)\} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \eta \tilde{\zeta}(\xi, \eta)}{K^2} \left[\frac{\sqrt{B} \cosh(\frac{1}{2}z\sqrt{B})}{2 \sinh(\frac{1}{2}h\sqrt{B})} + (\frac{N^2}{g} - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sinh(\frac{1}{2}z\sqrt{B})}{\sinh(\frac{1}{2}h\sqrt{B})} \right] \exp(i\xi x + i\eta y) d\xi d\eta \quad (24)$$

$$w = -U \exp\{\frac{1}{2}\alpha(z+h)\} \iint_{-\infty}^{+\infty} i\xi \tilde{\zeta}(\xi, \eta) \frac{\sinh(\frac{1}{2}z\sqrt{B})}{\sinh(\frac{1}{2}h\sqrt{B})} \exp(i\xi x + i\eta y) d\xi d\eta \quad (25)$$

$$\text{ここで} \quad B = \alpha^2 + 4K^2(1 - k_0^2/\xi^2) \quad (26)$$

ここで求められた解析解はポテンシャル解に修正が加わった形をしており、密度成層の効果を表すパラメータ N, k_0, α を無視すればポテンシャル解そのものになる。また主流風速 U が十分大きい場合には $k_0 \rightarrow 0$ となりさらにスケールハイト H_0 が十分に大きいときには $\alpha \rightarrow 0$ となり解はポテンシャル解に漸近する。

4. ラディエーション条件を考慮した減衰項について

今回示した解析手法ではフーリエ変換を用いているので、上下流及び左右の境界条件は自然に周期境界条件となっている。このため計算領域外にも設定した地形が存在すると考えなければならず、ここで発生した $-\infty$ から $+\infty$ までの波動成分を足し合わせるようになるため解は発散してしまう。そこで実際の計算においては x 方向に波が距離に比例して減衰するものとして人工的な減衰項を付加し、計算領域内での波動のみを考察できるようにしている。具体的には解析解 (23), (24), (25) を計算する際に (26) で示された B が $B < 0$ なら波動成分が発生するので、このときの波数成分に $\exp(-\beta\xi x)$ の形で付加する。これは渦粘性の効果を導入していることに相当すると考えることができるので、 β の値は渦粘性係数のオーダーを考慮して決めることになる。実際の大气における渦粘性係数の値は $1 \sim 10 \text{ m}^2/\text{s}$ とされているが、平均風速、地表面の凸凹、成層の程度等により大きく異なるものであるためここではひとつの計算例として $\beta = 10$ の場合を示すにとどめる。また B の値によっては分母が 0 となる特異点が現れこのとき lee wave が発生することがある。実際に特異点まわりの留数計算を行うにはかなり長い計算を必要とするため今回の解析ではこれを示すことはせずに別途示す予定である。

5. 解析例と考察

解析例として a) 2 次元の山脈状地形 ($63\text{km} \times 63\text{km}$: 標高 1200m)、b) 孤立峰 ($63\text{km} \times 63\text{km}$: 標高 1200m)、c) 実地形 (北海道夕張岳流域) ($32\text{km} \times 32\text{km}$) の 3 つの地形について計算を行った。密度成層を考慮した場合には内部フルード数を $F_r = U/(Nh)$ で定義し、流れを表すパラメータとする。解析は表 1 に示す各ケースで行い、ポテンシャル解との比較を行った。

表 1: 計算条件

	主流風速 U	上端境界 h	F_r
ケース 1	10m/s	2000m	0.277
ケース 2	11m/s	2000m	0.304
ケース 3	50m/s	2000m	1.384
ケース 4	90m/s	2000m	2.491
ケース 5	10m/s	5000m	0.110
ケース 6	20m/s	5000m	0.221
ケース 7	50m/s	5000m	0.553
ケース 8	10m/s	5000m	0.114

$T = 293\text{K}$ (ケース 8 のみ 313K), $\beta = 10$

a) 山脈状地形の場合 (図 3-7) まず単純な地形でさらに極端な例で本解析解の特徴を把握する目的で温度逆転層が低い位置にある場合を考える。ポテンシャル流れ (図 3) では地形により風上側斜面上昇風が発生するがケース 1 で計算した場合には成層効果により押さえられた x 方向風速は側面に逃げる事が出来ない。数学的には解の適用範囲を越えていると考えることが出来るが強い解釈するならばブロッキングを表現していると言える (図 4)。ケース 2 から 4 と内部フルード数が大きくなるにつれて成層効果よりも慣性力が卓越するようになるのでポテンシャル流れに近づくことがわかる (図 5-7)。またこの場合の計算においては内部フルード数のブロッキングの臨界値は $F_r = 0.30$ 前後であると言える。

b) 孤立峰の場合 (図 8-11) a) の場合ではブロッキングが発生したケース 1 で孤立峰まわりを解析すると、a) の場合と違って側面へ回り込むことが出来るのでブロッキングは起こらない。しかしポテンシャル流れの場合と比較して側面への回り込みは強いことがわかる。またわずかではあるが波動成分を有していることがわかる。

c) 実地形 (夕張岳流域) の場合 (図 12-18) 実地形の例として夕張岳流域を計算した。ケース 5 で計算した場合実地形においても先に示した a) や b) の場合と同様に、ポテンシャル流れ (図 12) で風上側斜面上で強く現れる上昇気流は成層効果により押さえられ (図 13) 主流風速は側面に逃けている。z 平面で見た場合ポテンシャル流れでは地形に沿った迂回する流れが表現されている (図 14) が、成層効果を入れた場合 (図 15) 風速の y 成分は複雑な地形の効果により y 方向に波数成分を有していることがわかる。また上層を見ると明瞭な内部重力波が形成されていることがわかる。ケース 6 (図 16) では主流風速が大きくなったことにより内部重力波がケース 5 よりも大きくなっている。このような条件の時にいわゆる lee wave 雲が発生すると考えられる。さらに主流風速を大きくしたケース 7 (図 17) ではポテンシャル流れにほぼ近づいているがポテンシャル流れよりも上層まで地形の影響を受けている様子がわかる。ケース 8 (図 18) は領域内の温度を 40°C とし成層効果を弱くした場合つまり α を小さくした場合を示したものである。これをケース 5 と比較すると下層における上昇風速の発生のにくさは変わらないが、上層における内部重力波が発生していないことがわかる。つまりこのことは内部重力波の発生には内部フルード数そのものよりも、成層の効果の度合いを決定する温度の設定が重要であると言えることが出来る。

6. 結論

本研究により実地形に適用できる密度成層を考慮した風の場の解析解を得ることができた。解析により得られたことを以下にまとめる。

1) 成層効果により上昇風速は押さえられるが主流風速が大きくなればこの効果は薄れポテンシャル解に近づく。

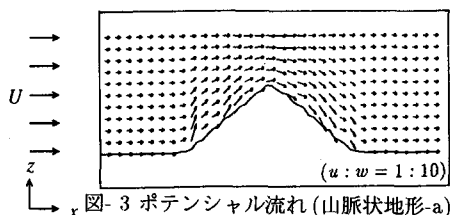


図-3 ポテンシャル流れ (山脈状地形-a)

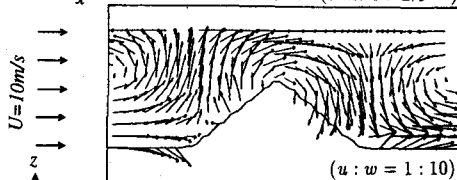


図-4 ケース 1-a ($F_r = 0.277$)

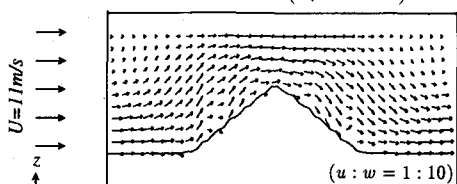


図-5 ケース 2-a ($F_r = 0.304$)

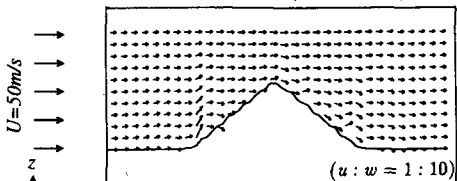


図-6 ケース 3-a ($F_r = 1.384$)

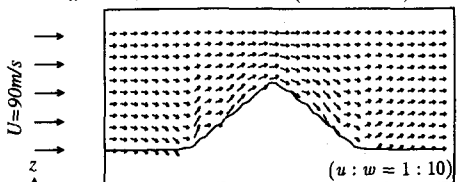
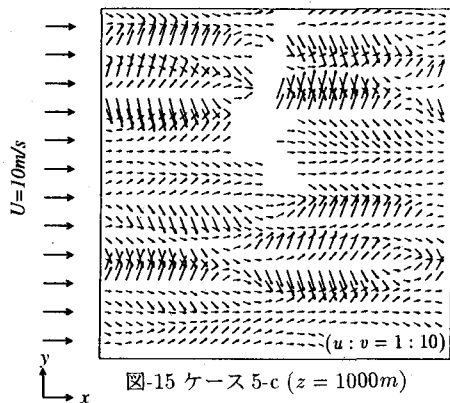
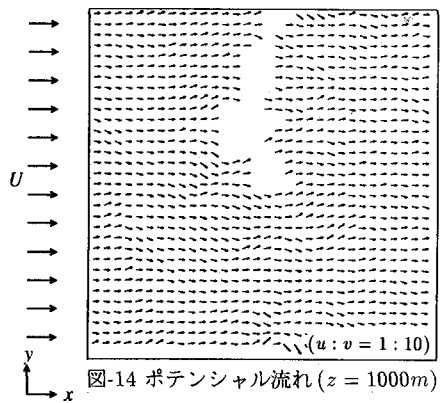
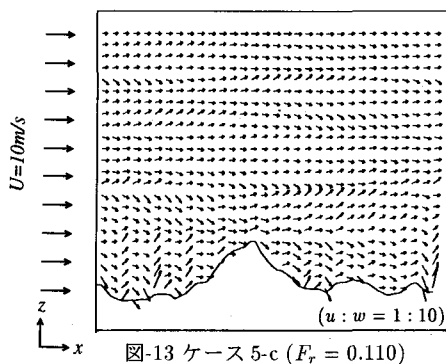
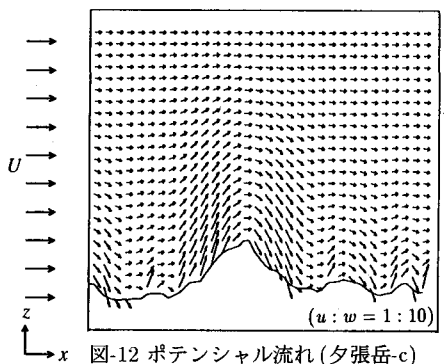
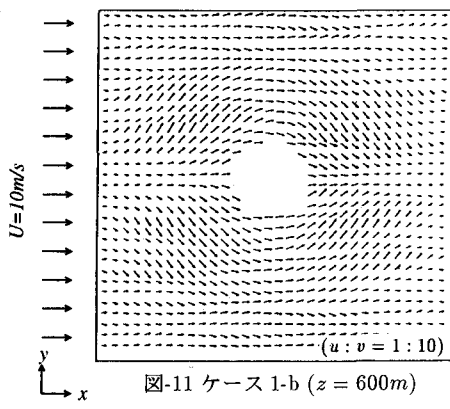
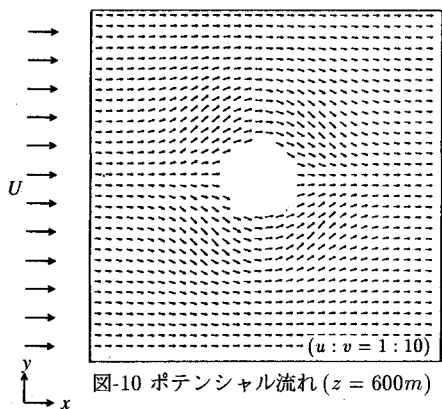
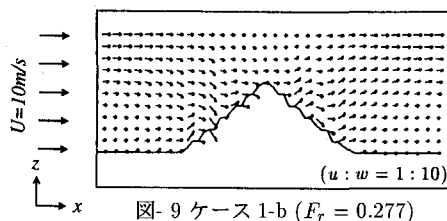
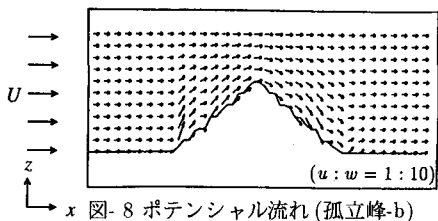


図-7 ケース 4-a ($F_r = 2.491$)



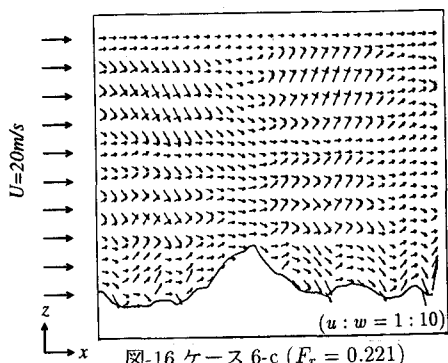


図-16 ケース 6-c ($F_r = 0.221$)

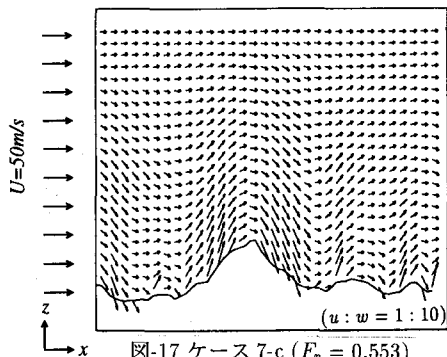


図-17 ケース 7-c ($F_r = 0.553$)

2) 2次元的な山脈上の山を解析した場合、内部フルード数の値が小さいときには主流風速が側面へ回り込めないためにブロッキングが起こる。

3) 上層においては内部重力波が発生し内部フルード数の値が大きくなるにしたがって波も大きくなる。

4) 計算領域内の温度を高くし成層効果を弱めると、内部重力波は発生しにくくなる。

降雨予測を行う場合の風場の解析は内部フルード数が大きい、つまり主流風速が台風並に十分に大きければ慣性力が成層効果よりも卓越するのでポテンシャル流れでも十分に表現できることがわかった。逆に言えば主流風速が小さい時は成層効果により上昇風速が発生しにくくなるので密度成層を考慮にいれなければ十分な解析は出来ないとすることになる。今後は本研究で得られた解析結果を降雨モデルと組み合わせることにより成層効果が降雨域に及ぼす影響を考察する予定である。

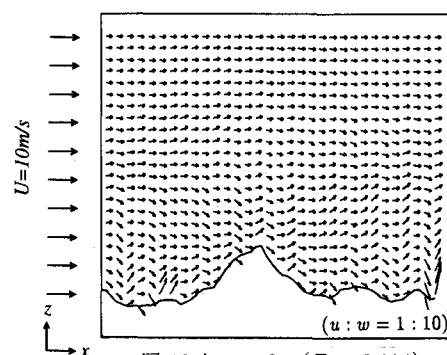


図-18 ケース 8-c ($F_r = 0.114$)

参考文献

- [1] M.Umeki and T.Kambe: Stream patterns of an isothermal atmosphere over an isolated mountain, Fluid Dynamics Research 5, pp.91-109, 1989.
- [2] G.D.Crapper: A three-dimensional solution for waves in the lee of mountains, J.F.M. 6, pp.51-76, 1959.
- [3] Long, R.R.: Some aspects of the flow of stratified fluids, Continuous density gradients, Tells 5, pp.342-357, 1955.
- [4] John W. Miles: Lee waves in a stratified flow. Part 2. Semi-circular obstacle, J.F.M. 33, pp.803-814, 1968.
- [5] Castro, I.P., Snyder, W.H., and Marsh, G.L.: Stratified flow over three-dimensional ridge, J.F.M. 135, pp.261-282, 1983.
- [6] Janowitz, G.S.: Lee waves in three-dimensional stratified flow, J. F. M. 148, pp.97-108, 1984.
- [7] Tateya K., Nakatsugawa M. and Yamada T.: Investigation of rainfall by field observations and a physically based model, Pacific international seminar on water resources systems, Tomamu, pp.385-483, 1989.
- [8] 中北英一, 田中実, 椎葉亮晴, 池淵周一, 高棹啄馬: 3次元レーダーによるエコー強度情報を用いた水蒸気相変化量と大気3次元風速の同時推定手法, 水工学論文集, 第36巻, pp.483-488, 1992.
- [9] 日野幹雄, 大西外明: 密度成層流に及ぼす point sink の高さの効果, 土木学会論文報告集, 第163号, 1969.
- [10] 北林興二: 密度成層大気中の物体上流側のよどみ域について, 土木学会論文報告集, pp.85-95, 1981.
- [11] 吉川秀夫, 山田正, 水谷俊孝: 非定常選択取水に関する研究, 第22回水理講演会論文集, pp.95-100, 1978.
- [12] 深和岳人, 日比野忠史, 中津川誠, 山田正: 密度成層の効果을考慮した山地流域における風場の計算, 1993年水文水資源学会要旨集, pp.204-205, 1993.
- [13] 日比野忠史, 山田正, 中津川誠: 地形の形状によって引き起こされるメソβスケールの風場, 第48回土木学会第48回年次学術講演会講演概要集, pp.162-163, 1993.