

複雑平面領域内の水環境流れ解析のための自動要素分割法の提案

Automatic Mesh Generation Method for Water Environmental Flow Analysis
with Complicated Planner Domain

檜山 和男¹

Kazuo Kashiyaama

This paper presents an optimal automatic mesh generation method based on Delaunay triangulation for the analysis of water environmental flow with complicated planner domain. The key feature of this method is that an appropriate mesh can be generated in accordance with the configuration of water depth and boundaries. This method is shown to be a useful and powerful tool for the preparation of the optimal finite element mesh data.

Key Words: automatic mesh generation, complicated planner domain, Delaunay trianguration

1. はじめに

河川や海岸域の流れ解析を高精度に行うためには、解析領域内の地形の変化に応じた適切な格子や要素を用いてモデル化を行うことが要求される。^[1] これまで、モデル化の妥当性を表す指標としては、1波長を何分割するかという波長要素幅比が用いられ、その値が10以上が望ましいとされてきた。しかし、複雑な境界形状を有する領域内に対して、この要求を満たすモデル化を自動的に行うことは容易ではない。また、数値解析において最も労力が要求される工程は解析領域のモデル化である。したがって、これらの流れ解析を迅速にかつ高精度に行うために、上記の要求を満足するモデル化を自動的に行う方法を構築することは、水工学上重要であると考えられる。

著者はこれまで、河川や海岸域の流れ解析のための自動要素分割法に関する研究を行ってきた。^{[2],[3]} その方法の特徴は、解析領域全体で波長要素幅比がほぼ一定となるように要素分割を行うものであった。これにより、波長の変化に応じた要素分割を自動的に行うことが可能となり、計算精度の向上が図れることが確認された。しかし、従来の方法では、水深形状の変化に対応した要素分割は実現できるものの、平面形状の複雑さは考慮されていなかった。そこで、本論文では、平面形状の複雑さをも考慮にいたした自動要素分割法を提案する。また、本手法では、山地流域のモデル化^[4] への適用も可能とするため、谷線や山線などの地性線は必ず要素の辺で表現されるように改善されている。本論文では、本手

¹正会員 工博 中央大学専任講師 理工学部土木工学科

(〒112 東京都文京区春日 1-13-27)

法の理論の展開について述べた後、本手法の有用性を示すために平面形状や水深形状が複雑な河口部と山地流域のモデル化に適用した。なお、要素としては任意形状への適合性の良い三節点三角形要素を用いている。

2. 自動要素分割法

2.1 アルゴリズム

本手法のフローチャートを示すと、図-1 になる。本手法では、仮要素と本要素という二つの要素分割を導入する。仮要素分割とは、事前に入力データとして与えた節点群から構成される要素分割であり、節点を発生させる際の要素サイズ関数（後述）と水深または標高の補間に用いる。本要素分割とは、実際の計算に用いる要素分割である。アルゴリズムを示すと、以下のようになる。

ステップ1：解析領域の境界上および水深または標高が既知な場所に節点を入力する。その際、外部境界は反時計回りに、内部境界は時計回りに連続して入力する。また、地性線上の点についても連続して入力する。その他の入力データは、波長要素幅比 n 、波の周期 T 、節点の発生間隔 δ である。

ステップ2：ステップ1で設定した節点を用いて、解析領域全体をデラウニー法^{[5],[6]}により三角形要素で分割する。ただし、従来のデラウニー法では凹部が存在する場合には、凹部内にも要素分割を行ってしまうため、特別な考慮を行う必要がある。この点については、次項で説明する。この要素を仮要素と定義する。

ステップ3：解析領域の境界上および領域内に新節点を発生させる。この際、波長要素幅比を一定とするように節点を発生させる。この点については、2.3 項で述べる。

ステップ4：ステップ1で入力データとして設定した節点とステップ3で発生させた節点を用いて、解析領域全体をデラウニー法により三角形要素に分割する。この要素を、本要素と定義する。

ステップ5：ステップ3で発生させた新節点の水深または標高を求める。これは、新節点が仮要素のどの要素内に含まれるかを判定した後、仮要素の節点値を用いて線形補間により求める。

ステップ6：各要素の波長要素幅比が解析領域全体でほぼ一定となるように、要素の平滑化手法を用いて節点の移動を行う。節点の移動後は、再びステップ5に戻り水深または標高を求める。

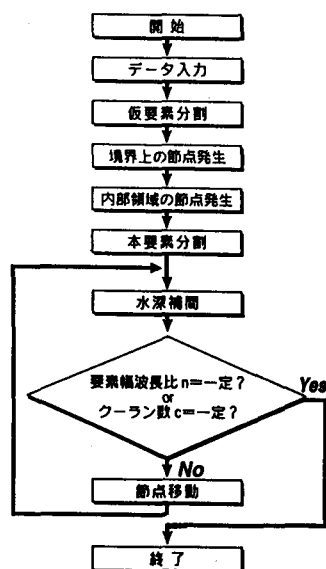


図-1 フローチャート

2.2 デラウニー法の改良

デラウニー法は、局所的最小角最大原理に基づき、任意に設定された節点群を最も正三角形に近い形で分割する方法である。ただし、デラウニー法は境界という概念がないため、領域内に凹部がある場合には、境界形状を壊して凹部内にも要素分割を行ってしまう。例えば、図-2 (a) に示すような入力節点に対して、デラウニー法を適用すると、図-2 (b) のようになる。図中、太線は境界を表している。従って、以下に示すアルゴリズムを付加してデラウニー法の改良を行なう。

ステップ1：境界辺を横切る要素を抽出し、境界辺を境にして2つの小領域に分割する（図-3 (a),(b) 参照）。

ステップ2：各小領域においてデラウニー法を適用して、要素の細分割を行う。この際、小領域が凹部を有する場合には、領域外の凹部内にも要素分割を行ってしまう（図-3 (c) 参照）。

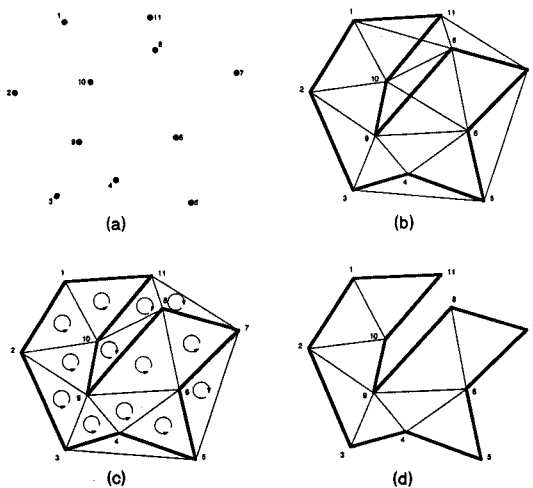


図-2 デラウニー法による三角形分割

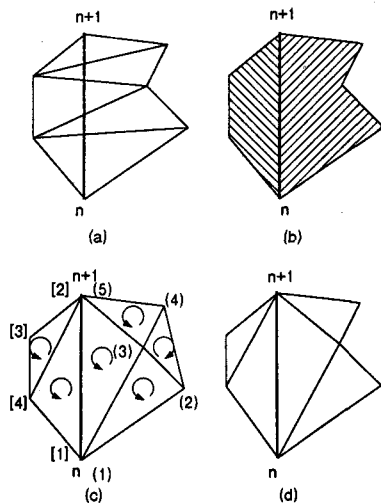


図-3 境界形状の再現

ステップ3：領域外の要素を削除するために、図-3 (c) に示すように各小領域の節点を反時計回りに番号付けする。そして、小領域の各要素の節点の並び順を、節点番号の小さい順に読むと、外部領域の要素はその並び順が反時計方向になる。この判別法により、外部領域の要素を削除する。(図-3 (d) 参照)

上記のアルゴリズムにより、境界形状が再現され、図-2 (c) の結果を得る。そして最後に、上記のステップ3の判別法を領域全体について適用する。これにより、外部領域の要素が削除され、図-2 (d) の結果を得る。

2.3 新節点の発生法

本手法では、解析領域全体で波長要素幅比がほぼ一定となるように要素分割を行う。すなわち、

$$n = \frac{L}{\Delta x} = \text{constant} \quad (1)$$

ここに、 n は波長要素幅比、 L は波長、 Δx は代表的要素サイズである。波長 L は、次の分散関係式から決定される。

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad (2)$$

ここに、 σ は波の角振動数、 g は重力加速度、 k は波数、 h は水深である。

さらに、本論文では、平面形状の複雑さをも考慮にいった要素分割を実現するために、流況や波高分布に大きな変化が生じる凸部点付近に節点が自動的に多く発生するように考慮する。そのために、まず、すべての境界節点 n の内角 α (節点 $n-1$ の方向から時計回りに $n+1$ の方向にとった角) を節点座標から計算する。そして、その値がある値 (外部境界の場合には 270° 以上、内部境界の場合には 90° 以下) を越える節点を持つ仮要素を抽出する (図-4 参照)。

新節点を発生させるために、入力した各節点において、以下に示す要素サイズ関数を定義する。

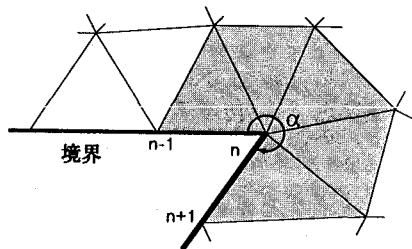


図-4 凸部節点周りの要素の抽出

$$f_i = \frac{L_i}{n} \quad (3)$$

ここに、 f_i と L_i はそれぞれ節点における要素サイズ関数と波長である。新節点の発生は、図-5に示すように要素毎に下方から δ 間隔で検討する。いま、着目する点を P とすると、まず点 P が要素内に含まれる否かを調べる。図-5において、点 P が三角形要素内に含まれる場合には、次式が成立する。

$$A_1 > 0 \quad , \quad A_2 > 0 \quad , \quad A_3 > 0 \quad (4)$$

ここに、 A_1 は三角形 P -2-3、 A_2 は三角形 1 - P -3、 A_3 は三角形 1 -2- P の面積であり、例えば A_1 は次式により算定される（図-6参照）。

$$A_1 = \frac{1}{2}(x_p(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_p) + x_3(y_p - y_2)) \quad (5)$$

点 P が着目する要素内に含まれない場合には、いずれかの面積が必ず負となる。^[3] そして、点 P が要素内に含まれる場合には、点 P の要素サイズ関数と水深は三節点の値を用いて、次式の線形補間によって求める（図-6参照）。

$$f_p = \Phi_1 f_1 + \Phi_2 f_2 + \Phi_3 f_3 \quad (6)$$

$$h_p = \Phi_1 h_1 + \Phi_2 h_2 + \Phi_3 h_3 \quad (7)$$

ここに、 Φ_i は面積座標であり、次式で与えられる。

$$\Phi_i = \frac{A_i}{A} \quad (8)$$

ここに、 A は三角形 A - B - C の面積である。そして、次式が成立する場合に点 P を新節点とする。

$$f_p < l \quad (9)$$

ここに、 f_p は点 P の要素サイズ関数、 l は点 P から最も近い既存節点までの距離である。図-5において、●印が新節点である。点 p が凸部の節点を有する要素内に含まれる場合には、 $\delta/2$ 間隔で節点の発生を検討する。これにより、平面形状の複雑さを考慮して、波長要素幅比を一定とする節点発生が可能となる。

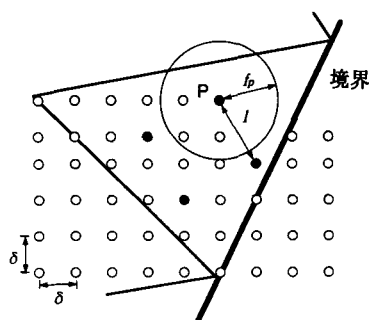


図-5 新節点の発生

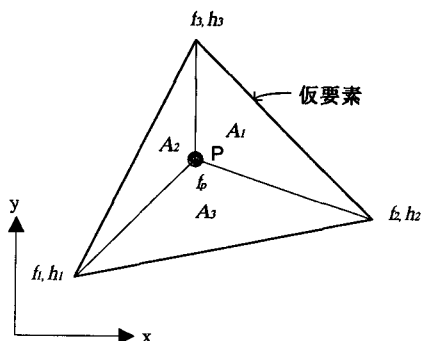


図-6 要素サイズ関数と水深の補間

3. 適用例

本手法の有用性を検討するために、解析領域の平面形状と水深形状が複雑な高知港河口部周辺のモデル化に適用した。

図-7にデータとして入力させた節点図を示す。入力された節点総数は878である。その他の入力データとしては、波の周期 $T = 60$ 秒、波長要素幅比 $n = 20$ 、節点の発生間隔 $\delta = 20m$ を用いている。図-8に本手法によって最終的に得られた要素分割図を示す。節点総数は4,863、要素総数は8,871である。また、図-9に水深図を示す。図より、自動的に境界形状および水深に応じた要素分割が実現されていることがわかる。また、防波堤先端などの凸部の周辺の要素分割が細かくなっていることがわかる。このことにより、高精度な計算結果が得られることが期待される。

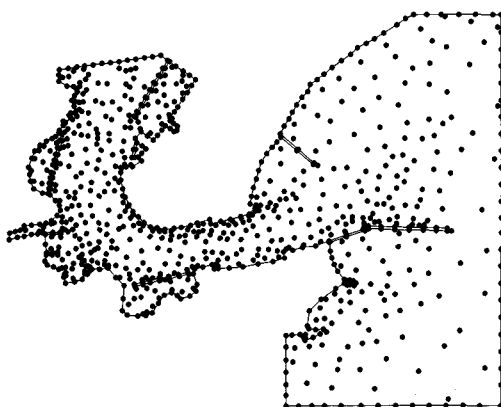


図-7 入力節点

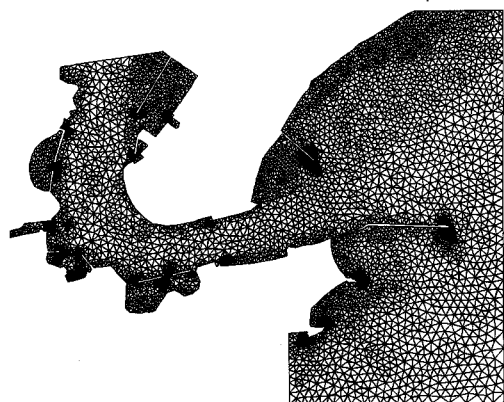


図-8 本要素分割図

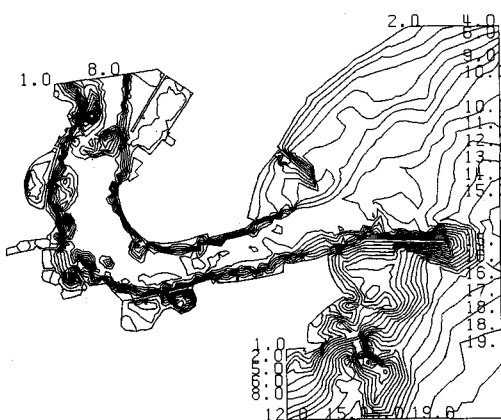


図-9 水深図

4 山地流域のモデル化への応用

次に、本手法を山地流域のモデル化に応用した。山地流域のモデル化では、流域の微地形を正確に表現することが必要となる。このため、入力データとして与える節点として、標高が既知の点と山線、谷線、傾斜変換線などの地性線上に節点を配置する。地性線の再現は、地性線を内部境界として取扱い、2.2項のアルゴリズムを適用することにより行った。なお、新節点は、 δ 間隔で発生を行う。

適用例として、筑波山西側斜面のモデル化に適用した例を示す。図-10にデータとして入力した節点図を示す。入力された節点総数は418である。図中、実線は地性線を表し、これらの節点は連続して入力されている。その他の入力データとしては、節点の発生間隔 $\delta = 40m$ を与えた。図-11に最終的に得られた要素分割図を示す。節点総数は1,910、要素総数は3,613である。図-12に計算された標高の等高線を示す。これらの図より、地性線は境界辺で構成されて分割が行われていることがわかる。

5. おわりに

本論文において、複雑平面領域内の流れ解析のための自動要素分割法を提案した。そして、その有用性を検討するために、解析領域の幾何学的形状が複雑な領域のモデル化に適用した。本論文によって示された結論をまとめると以下のようになる。

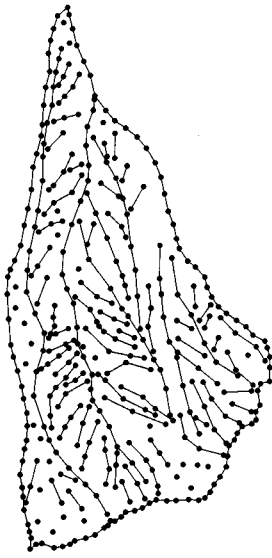


図-10 入力節点

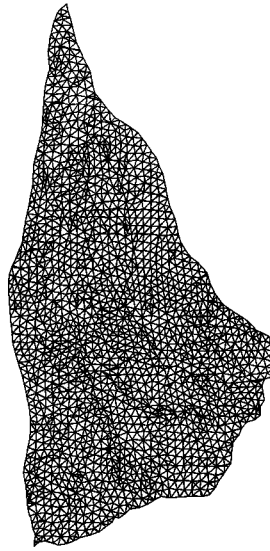


図-11 本要素分割図



図-12 等高線図

- 1) 解析領域の平面形状が複雑な領域に対して、波長要素幅比を一定とするような要素分割を自動的に行うことが可能となった。これにより、高精度な計算結果が得られることが期待できる。
- 2) 地性線を内部境界として取り扱うことにより、山地流域のモデル化にも適用できることが明かとなった。
- 3) 平面データのみならず、水深データまたは標高データも同時に作成することができるため、解析領域のモデル化に要する労力が大幅に軽減される。
- 4) 入力データを変化させることにより、節点総数を制御することができる。

謝辞：本研究を行うにあたり、中央大学学生の山下智也君、藤本耕司君の協力を得た。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- [1] Thacker, W.C., Gonzales, A. and Putland, G.E., 'A method for automating the construction of irregular computational grids for storm surges forecast models', J. Comp. Physics, Vol.37, pp.371-387, 1980.
- [2] Kashiya, K. and Okada, T., 'automatic mesh generation method for shallow water flow analysis', Int. J. Numer. Methods Fluids., Vol.15, pp.1037-1057, 1992.
- [3] 檜山和男、岡田毅, '水面波動解析のための最適自動要素分割システムの開発', 土木情報システム論文集, 1992年度, pp.57-64, 1992.
- [4] 高棹啄馬、椎葉充晴、立川康人、大江郁夫, 'TIN-DEM データ形式を用いた流域場情報システムの開発', 水工学論文集, 第36巻, pp.677-684, 1992.
- [5] Sloan, S.A., 'A fast algorithm for computing Delaunay triangulations in the plane', Adv. in Eng. Soft., Vol.9, pp.34-55, 1987.
- [6] 谷口健男、太田親, '直線辺で構成される任意二次元領域へのデラウニー三角分割の適用', 土木学会論文集, No.432, pp.69-77, 1991.