

入力データの不確定性を考慮した水面波動問題の確率有限要素解析

STOCHASTIC FINITE ELEMENT ANALYSIS OF WAVE DIFFRACTION-REFRACTION CONSIDERING THE INDETERMINACY OF INPUT DATA

櫻庭 雅明¹

樫山 和男²

Masaaki SAKURABA and Kazuo KASHIYAMA

This paper presents a stochastic finite element method for wave diffraction-refraction considering the indeterminacy of the input data. The expected value and the standard deviation of the wave height distribution are solved by a perturbation method based on first-order approximation. Two typical numerical examples are carried out to show the validity of the present method.

Keywords: stochastic finite element method, wave diffraction-refraction, reflection coefficient

1. はじめに

一般に、従来の水面波動解析では、壁面反射率、水深、入射波条件などの入力データは不確定変動のないものと仮定され代表値が用いられ、確定論的な解析が行われてきた。しかし、入力データには多くの不確定性が含まれており、結果の信頼性を深く追求するためには、その不確定性に起因する変動量を知ることが工学上重要であると考えられる。従来において、このような解析を行う場合には、モンテカルロ法に基づく繰り返し計算により入力データに変動を与え、入力母集団から解の統計量を評価することが行われてきた。しかし、この方法は膨大な計算量が要求されるため、実用上有効な手法とは言い難い。

本論文ではこのような問題点を解決するために、水面波動問題の解析において入力データとして用いられる壁面反射率に不確定成分を与え、振幅関数の不確定挙動を1次摂動法を用いた確率有限要素法によって求める方法を提案する。なお、本論文では、本手法の理論の展開について述べた後、本手法の有効性についての検討を行うために解析解の存在する長方形港湾の湾水振動解析及び任意形状港湾内の静穏度解析を行った例について述べる。なお、解の統計量の評価法としては1次近似法を用いている。

¹学生員 中央大学大学院博士前期課程 理工学研究科土木工学専攻

²正会員 工博 中央大学専任講師 理工学部土木工学科

(〒112 東京都文京区春日 1-13-27)

2. 基礎方程式と境界条件

流体は非圧縮、非粘性とし非回転の流体運動を仮定する。水面波動問題の解析における基礎方程式としては、緩やかな水深変化を考慮した緩勾配方程式^[1]を用いる。

$$(CC_g\eta_{,i})_{,i} + k^2 CC_g\eta = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ここに、 η は振幅関数、 C は波速、 C_g は群速度、 k は波数、 Ω は解析領域を示す。境界は図-1に示すように、構造壁面境界 Γ_s と無限遠方の仮想境界 Γ_∞ に分けられ、境界条件は次式で与えられる。

$$\eta_{,n} = ik \sin \theta \frac{1 - K_r}{1 + K_r} \eta \quad \text{on } \Gamma_s \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (\eta_{sc,r} - ik\eta_{sc}) = 0 \quad \text{on } \Gamma_\infty \quad (3)$$

ここに、 θ は構造壁面での反射角、 η_{sc} は散乱波の振幅関数、 r は散乱源からの距離、 K_r は壁面反射率、 i は虚数単位である。

また、合成波の振幅関数は線形であるので、入射波の振幅関数 η_{in} 、反射波の振幅関数 η_{re} 、および散乱波の振幅関数 η_{sc} の和で示される。

$$\eta = \eta_{in} + \eta_{re} + \eta_{sc} \quad (4)$$

ここで、入射波と反射波は外部領域 Ω_o において既知量であり、次式で示される。

$$\eta_{in} = A \exp \{ ikr \cos(\theta - \theta_{in}) \} \quad (5)$$

$$\eta_{re} = K_r A \exp \{ ikr \cos(\theta - \theta_{in}) \} \quad (6)$$

ここに、 A は入射波の振幅、 θ_{in} は波の入射角である。

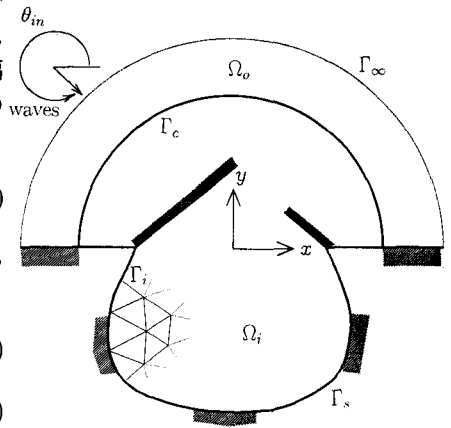


図-1 領域の定義

3. 有限要素方程式

基礎方程式と境界条件の離散化には、水深変化を許容する内部領域 Ω_i には Kashiya, Kawahara が提案した境界型有限要素法^[2]、水深一定を仮定した外部領域 Ω_o には固有関数展開表示された解析解^[3]を用いた結合解法を適用する。(図-1 参照)

無限遠方での条件 (3) 式を満足する外部領域での基礎方程式の一般解は次式で示される。

$$\bar{\eta}_{sc} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n H_n^1(kr) \cos n\theta \quad (7)$$

ここに β_n は未定定数、 H_n^1 は第一種 n 次ハンケル関数を表す。また、開境界 Γ_c 上で課せられる圧力と流速の連続条件を自然境界条件として満足させるために、ハイブリッド型の変分原理を導入した。^[3]

$$\eta = \bar{\eta} \quad , \quad CC_g\eta_{,n} = CC_g\bar{\eta}_{,n} \quad \text{on } \Gamma_c \quad (8)$$

これより、基礎方程式と境界条件に等価な汎関数は次式で示される。

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_o \quad (9)$$

ここに、 Π_i, Π_o は、それぞれ次式で与えられる内部領域、および外部領域での汎関数を表している。

$$\Pi_i = \sum_{e=1}^{M_x} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ie}} CC_g \eta \eta_{,n} d\Gamma \right\} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} ik \sin \theta \frac{1 - K_r}{1 + K_r} CC_g \eta^2 d\Gamma \quad (10)$$

$$\Pi_o = \int_{\Gamma_c} CC_g \left[\left(\frac{1}{2} \bar{\eta}_{sc} - \eta_{sc} \right) \bar{\eta}_n - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{sc} \eta_{ir,n} \right] d\Gamma \quad (11)$$

ここに、 Γ_{ie} は内部領域の要素境界、 η_{ir} は入射波と反射波の振幅関数である。汎関数(10)、(11)式を停留化し、内部領域 Ω_i には三角形境界型有限要素、外部領域 Ω_o には開境界 Γ_c 上に幾つかの節点を持つ特殊要素を用いて離散化を行うと、最終的に次式のような有限要素方程式が得られる。

$$[K]\{\eta\} = \{F\} \quad (12)$$

ここに、 $[K]$ は対称な剛性マトリックス、 $\{F\}$ は入射波による荷重ベクトルである。

4. 1次摂動法に基づく確率有限要素解析

本解析では、壁面反射率 K_r が不確定変動するものと仮定する。なお、その確率変動は微小であるとする。いま、壁面反射率 K_r をその期待値 $\bar{K}_r$ と微小確率変数 α_k を用いて表すと次式で示される。

$$K_r = \bar{K}_r (1 + \alpha_k) \quad (13)$$

(12)式で求められた剛性マトリックスは、壁面反射率に変動成分を考慮することにより次式のような2次の項を無視したテイラー級数展開された近似式で表される。

$$[K] = [\bar{K}] + \sum_{k=1}^n [K_k^I] \alpha_k \quad (14)$$

ここに、 $[K_k^I]$ は $[K]$ の α_k に関する1階微分値(1次変動率)、 n は領域内に含まれる確率変数の個数、 α_k は反射率に含まれる要素での期待値0の微小確率変数を表す。

これより、壁面反射率の変動に対する振幅分布関数 η の変動を次式で仮定する。

$$\{\eta\} = \{\bar{\eta}\} + \sum_{k=1}^n \{\eta_k^I\} \alpha_k \quad (15)$$

(12)、(14)式から1次摂動法^[5]による振幅関数とその変動は次式で求められる。

$$\{\bar{\eta}\} = [\bar{K}]^{-1} \{F\} \quad (16)$$

$$\{\eta_k^I\} = -[\bar{K}]^{-1} [K_k^I] \{\bar{\eta}\} \quad (17)$$

ここに $\{\bar{\eta}\}$ は振幅関数の確定解、 $\{\eta_k^I\}$ は1次変動率を表す。また、統計量の評価には1次近似法^[6]を用いて任意の要素での平均、分散を求めた。(15)、(16)式より振幅関数の平均、分散は次式で表される。

$$E[\eta] = \bar{\eta} \quad (18)$$

$$Var[\eta] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i^I \eta_j^I E[\alpha_i \alpha_j] \quad (19)$$

ここで $E[\alpha_i \alpha_j]$ は確率変数 $\alpha_i \alpha_j$ の共分散を表す。また、共分散の評価としては次式で示される共分散マトリックス C_{ij} 、および自己相関関数 R を用いて計算を行った。

$$C_{ij} = \rho \sigma_i \sigma_j \quad (20)$$

$$R(\Delta x, \Delta y) = \sigma^2 \exp \{-\Delta d\} \quad (21)$$

ここで、 ρ は相関係数、 σ は微小確率変数の標準偏差、 Δd は要素重心間の距離を示す。

5. 数値計算例

5.1 長方形港湾の湾水振動解析

数値計算例として、図-2に示す一定水深の長方形港湾の湾水振動解析に本手法の適用を行った。計算に用いた有限要素の節点総数は86、要素総数は118である。計算条件として、湾奥A-B間で反射率を0.8とし、その他の境界では完全反射とした。また、A-B間に含まれる各要素での微小確率変数の標準偏差を0.05、相関係数を距離に関わらず1.0、波は直角に汀線に対して入射するものとした。ここではP点での周波数応答計算を行った。図-3に反射率変動を考慮しない場合での $K_r=1.0$ 、0.8の周波数応答曲線を示す。また1次摂動法の解の精度を示すために、 $K_r=0.8$ 、 $kl=1.35$ の場合で、微小確率変数 α_k を-0.2から0.2まで変化させ、それを(13)式に代入して確定的有限要素解析を行ったときの結果と1次摂動法を用いた場合の結果との比較を図-4に示す。図より、 $\alpha_k=-0.05$ の場合に誤差が5%程度であるため、確率変数が微小であることを仮定すると、1次摂動法は有効な手法であることがわかる。図-5に、1次摂動法を用いて解析を行った場合の期待値と 3σ 限界、およびBox-Müllerの方法によって確率変数 α_k を正規分布に従って乱数を発生させ(サンプル数1000)、繰り返し計算を行ったときの 3σ 限界を示す。両手法は比較的同じ傾向を示し、乱数を発生させる方法と比較して、本手法の計算時間は1/1000程度となるため、本手法は計算時間の観点から有効な手法といえる。また、図より、不確定性を考慮することにより $kl=1.35$ 、4.2付近の固有周期の所で振幅の変動が大きく現れていることがわかり、入力データの不確定変動が固有値近傍の解に大きく影響することが確認された。

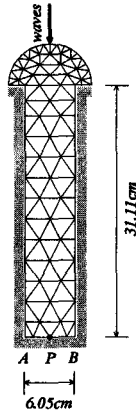


図-2 要素分割図
(要素数118, 節点数86)

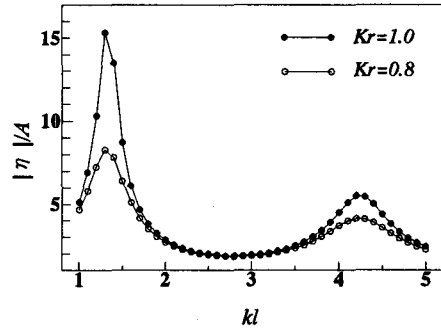


図-3 P点での周波数応答曲線
(反射率変動を考慮しない場合)

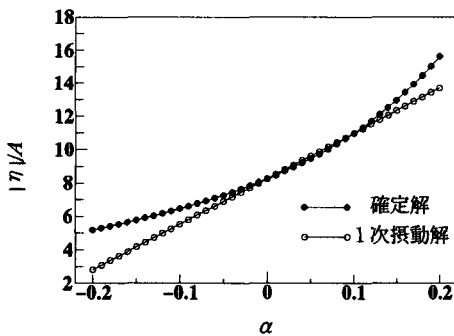


図-4 確定解と1次摂動解の比較($kl=1.35$)

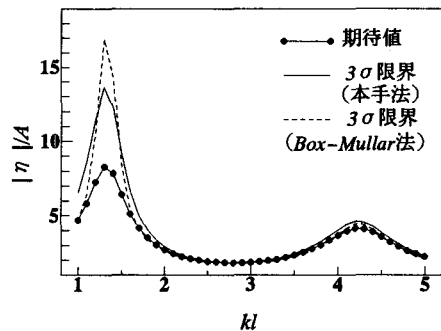


図-5 P点での周波数応答曲線

5.2 任意形状港湾の港内静穏度解析

次に、図-6に示す任意形状港湾^[7]の港内静穏度解析を行った。水深形状は湾奥に向かって一様上り勾配(1/15)であり、入射波の波向きは湾口に対して直角に入射するものとする。また、壁面での反射率は0.8と仮定した。有限要素分割は図-7に示し、節点総数は1353、要素総数は2496である。また、壁面反射率の微小確率変数の標準偏差を0.5とし、自己相関関数(17)式を用いてA、B、C点での周波数応答計算を行った。このときの本手法による期待値と3 σ 限界を、それぞれ図-8、図-9、図-10に示す。A、B点での解の変動は0.8秒付近での固有周期を過ぎたところで比較的小さなものとなり、周期の変化による変動の差異は見られず、B点では周期0.8、3.0、4.5秒の固有周期付近で激しい変動が見られる。図-11にA、B、C各点でのの変化による標準偏差の比較を示す。各点で固有周期付近での変動は大きくなるが、B、C点での変動は周期が長くなると小さくなっていることがわかる。また、反射率の不確定性に寄因する計算結果の変動は、湾口に比べ湾奥のB点付近で大きく、また、固有周期付近で大きなものとなることがわかる。

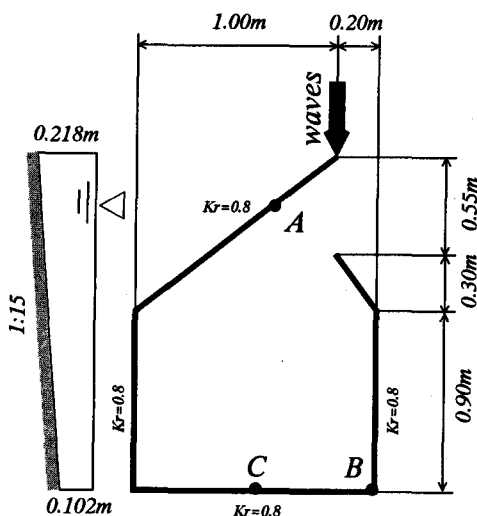


図-6 解析モデル

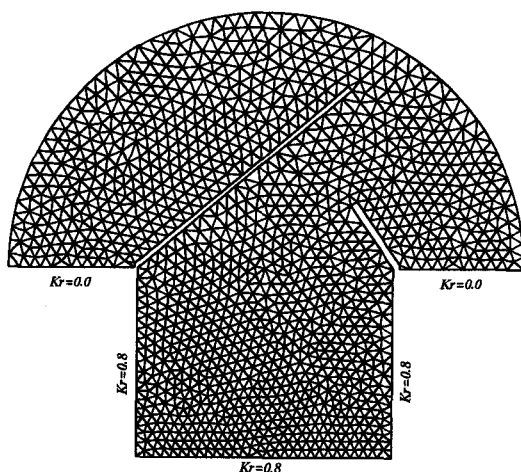


図-7 要素分割図
(節点数2496, 要素数1353)

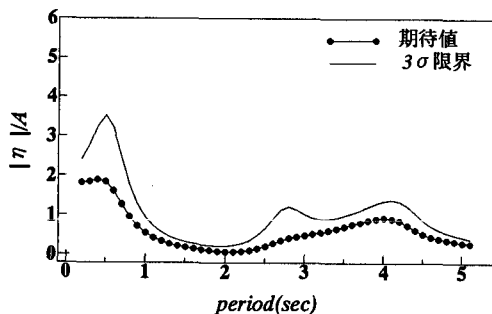


図-8 A点での周波数応答曲線

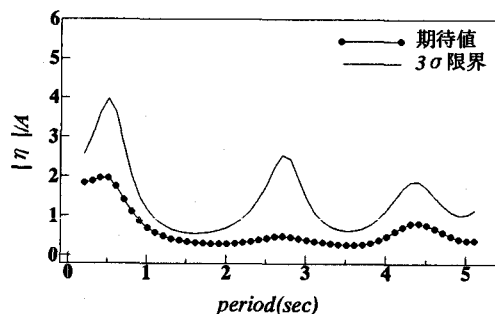


図-9 B点での周波数応答曲線

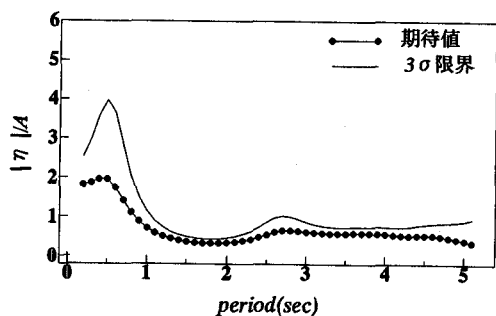


図-10 C点での周波数応答曲線

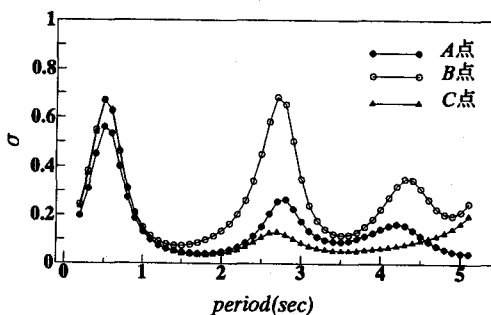


図-11 各点での標準偏差の比較

6. おわりに

本論文において、入力データの不確定性を考慮した水面波動解析を1次摂動法に基づく確率有限要素法により行う手法を提案した。本論文では、データの不確定量として壁面反射率を仮定して検討を行った。その結果、以下の結論が得られた。

- (1) 本手法によって得られた結果は、従来行われている繰り返し計算を行う方法による結果と良い一致を示した。
- (2) 本手法は入力データの不確定性に起因する計算結果の変動量を、繰り返し計算をする必要がなく求めることができ、従来の方法に比べ計算時間の点で大変有利である。
- (3) 不確定変動が微小であることを仮定すると、1次摂動法は有用な手法といえる。

今後は、複数の入力データの不確定変動を考慮にいたした水面波動解析を行う予定である。

参考文献

- [1] Berkhoff, J.C.W., Computation of combined refraction, Proc. 13th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE, pp.471-490, 1972
- [2] Kashiyaama .K and Kawahara .M A boundary type finite element method for water surface wave problems, Int. J. Number. Methods Fluids, Vol.8 pp.65-69, 1988
- [3] Chen, H.S., and Mei, C.C., Oscillations and wave forces in an offshore harbor, Ralph M. Persons Lab., MIT, Report No.190, 1974
- [4] Chen, H.S., Effects of bottom friction and boundary absorption on water wave scattering, Appl. Ocean Res., Vol.8, pp.99-104, 1986
- [5] 中桐滋, 久田俊明: 確率有限要素法入門, 培風館出版, pp.28-29, 1990
- [6] Ang, A.H-S. and Tang, W.H., Probability, Statistics, and Decision for Design, Vol. I-Basic Principles, John Wiley and Sons, pp. 194-196, 1977
- [7] Sato .N, Isobe .M and Izumiya .T A numerical model for calculating wave height distribution in a harbor of arbitrary shape, Coastal Eng. in Japan, Vol.33, No.2, pp.119-131, 1990